Cours/Exercices/Corrections Équations Fonctionnelles. Groupe B

Raphael Ducatez

December 6, 2020

Les équations fonctionnelles.

Une équation fonctionnelle (E-F) est une équation dont l'inconnue est une fonction. Le but du jeu est en générale de retrouver la ou les fonctions possible à partir des informations de l'énoncé. Tout d'abord il faut savoir que l'espace des fonctions est extrèmement vaste et que l'ensemble des fonctions usuelles (polynomes, cos, sin...) ne forme qu'une infime partie.

Voici un exemple d'équation fonctionnelle : Trouver $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

$$f(x+y) = f(y) + x.$$

Pour une fonction, on dispose en réalité d'une infinité d'inconnue : pour chaque x, $f(x)$ est une inconnue. Par contre on dispose également ici d'une infinité d'équation. Dans notre exemple on sait par exemple que $f(5) = f(2)+3$ ou que $f(2) = f(0) + 2$, etc...

Pour résoudre une équation fonctionnelle il faudra presque toujours raisonner par Analyse/Synthèse. l'analyse c'est collecter le plus d'informations possible sur la fonction en question et trouver la solution. Il est tout à fait possible qu'il existe plusieurs solutions (voir toute une famille de solutions). Si on pense qu'on effectivement trouver les solutions il faut alors faire la synthèse, c'est à dire vérifier que ces solutions fonctionnent.

Cependant il n'existe pas de méthode générale . Il s'agit avant tout de tatonnements, de choix astucieux dans les variables choisies, de prendre en considération des particularités de l'équation. Voici tout de même quelques conseil pour attaquer une E-F

1. Tester des solutions faciles par exemple $f(x) = c$ ou $f(x) = x$, peut-être un polynome.

2. Trouver des valeurs de la fonction en quelques points : que vaut $f(0)$ ou $f(1)$ par exemple? Si on n'arrive pas à trouver ces valeurs peut-être qu'on peut les garder comme des inconnues et continuer de faire des calcules avec.

3. Regarder ce que donne l'équation si on fixer un paramêtre par exemple $x = 0$ ou $y = 0$ ou si on fait varier les plusieurs variable en même temps en posant par exemple $x = -y$. Il s'agit toujours de faire des choix astucieux. Par exemple pour une equation de la forme $f(x + 2y) = ...$ peut-être est ce une bonne idée de choisir $x = -2y$ car alors on a $f(0) = ...$

4. Être malin.

Sur notre exemple $f(x + y) = f(y) + x.$:

1. On peut remarquer que la fonction $f(x) = x$ est solution. En effet $f(x + y) = x + y$ et $f(y) + x = x + y$.

2. Peut-on trouver $f(0)$? Si je choisit $x = 0$, $y = 0$ et cela donne

$$f(0) = f(0) + 0 \Rightarrow f(0) = f(0).$$

   Rien d'intéressant, bon passons. Je n'ai pas réussit à trouver $f(0)$ mais je vais noter cette inconnue $f(0) = c$.

3. Fixons $y = 0$, on a

$$f(x + 0) = f(0) + x = c + x \Rightarrow f(x) = x + c$$

   J'en déduit que la fonction est de la forme $f(x) = x + c$. Très bien cela me semble suffisant et je pense que c'est la solution. Il faut maintenant faire la synthèse et vérifier que ces fonctions sont effectivements solutions.

Synthèse:
On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = t + c$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(x + y) = (x + y) + c = y + c + x = f(y) + x$$

Conclusion les fonctions $f(x) = x + c$ sont bien solutions (et ce sont les seules).
Remarquer qu'ici on a trouvé toute une famille de solution. Par exemple $f(x) = x$ ou $f(x) = x + 1$ sont des solutions.

Manipuler les équations fonctionnelles.

Exercise 1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) = f(x) - f(y).$$

Solution 1. On essaye de suivre pas à pas l'exemple

1. On peut voir que $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ fonctionne. En effet $f(x+y) = 0$ et $f(x) - f(y) = 0 - 0 = 0$. Mais pour le moment on n'arrive pas trop à en trouver d'autres.

2. Je cherche $f(0)$. Avec $x = 0$ et $y = 0$ on a
$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) - f(0) = 0.$$
Donc $f(0) = 0$

3. Si je fixe $y = 0$ j'obtiens
$$f(x) = f(x + 0) = f(x) - f(0) = f(x)$$
soit $f(x) = f(x)$ c'est à dire rien d'intéressant. Par contre si je fixe $x = 0$ j'obtiens
$$f(y) = f(0 + y) = f(0) - f(y) = -f(y)$$
et donc $f(y) = -f(y)$ pour y. Mais alors pour tout y, $f(y) = 0$. On en déduit que $f(y) = 0$ est la seule solution possible. Pour la synthèse on a déjà vu que $f(y) = 0$ fonctionne.

Autre méthode de preuve :(être malin). On remarque que si on échange x et y le terme de gauche ne change pas. On a alors ces deux équation pour tout x et y
$$\begin{cases} f(y + x) = f(x) - f(y). \\ f(y + x) = f(y) - f(x) \quad \text{(en inversant)}x, y \end{cases}$$
Si on somme les deux lignes on obtient
$$f(y + x) + f(y + x) = f(x) - f(y) + f(y) - f(x) = 0$$
et donc $2f(x + y) = 0$ pour tout x et pour tout y. La fonction $f(t) = 0$ pour tout t est donc la seule solution.

Exercise 2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Solution 2. (Dans la série.)

Exercise 3. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$
$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)).$$

Solution 3. On suit encore un peu l'exemple

1. On remarque que la fonction $f(x) = 0$ est solution
$$f(x^2 - y^2) = 0 \qquad (x - y)(f(x) + f(y)) = (x - y) \times (0 + 0) = 0.$$
De même que la $f(x) = x$
$$f(x^2 - y^2) = x^2 - y^2 \qquad (x - y)(f(x) + f(y)) = (x - y)(x + y) = x^2 - y^2.$$
Après un peu de réfléxion on voit que en fait les fonctions de la forme $f(x) = kx$ pour $k \in \mathbb{R}$ sont ausi solutions
$$f(x^2 - y^2) = kx^2 - ky^2 \quad (x - y)(f(x) + f(y)) = (x - y)(kx + ky) = kx^2 - ky^2.$$

2. Si on choisit $x = y = 0$.
$$f(0) = f(0^2 + 0^2) = (0 - 0) \times (f(0) + f(0)) = 0$$
Donc $f(0) = 0$.

3. On tente $y = 0$
$$f(x^2 + 0) = (x - 0)(f(x) + f(0)) = xf(x)$$
donc $f(x^2) = xf(x)$ (peut-être intéressant on ne sait pas encore). Si on tente maintenant $x = 0$ on a
$$f(0 - y^2) = (0 - y)(f(0) + f(y)) = -yf(y)$$
donc $f(-y^2) = -yf(y)$. En regroupant ces deux résultats (avec $x = y$ pour le premier) on alors que $f(-y^2) = -f(y^2)$. Puisque tout nombre positif peut s'écrire de la forme y^2 on en déduit que pour tout $t \geq 0$
$$f(-t) = -f(t).$$
Définition :
   (a) On dit que$f$ est une fonction impaire si $f(-t) = -f(t)$ pour tout t. (Exemple $f(t) = t$, $f(t) = t^3$,...)
   (b) On dit que f est une fonction paire si $f(-t) = f(t)$. (Exemple $f(t) = 1$ ou $f(t) = t^2, ...$)

4. Astuce : Le terme de gauche de $f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$ ne change pas si on change $y \to (-y)$. On peut écrire deux équations
$$\begin{cases} f(x^2 - (-y)^2) = (x + y)(f(x) + f(-y)) = (x + y)(f(x) - f(y)) & \text{car } f(-y) = -f(y) \\ f(x^2 - (-y)^2) = f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)) \end{cases}$$
On a alors
$$\begin{aligned} (x + y)(f(x) - f(y)) &= (x - y)(f(x) + f(y)) \\ xf(x) + yf(x) - xf(y) - yf(y) &= xf(x) - yf(x) + xf(y) - yf(y) \\ yf(x) - xf(y) &= -yf(x) + xf(y) \end{aligned}$$
Et donc $2yf(x) = 2xf(y)$. Conclusion pour tout $x, y \in \mathbb{R}$
$$yf(x) = xf(y)$$
Ça c'est une équation très utile qui va permettre de conclure. Si on fixe maintenant $y = 1$ alors
$$1 \times f(x) = x \times f(1)$$
Si on écrit $k = f(1)$ on a alors $f(x) = kx$. Conclusion les seules solutions possibles sont les fonctions de la forme $f(x) = kx$. (Remarque pour $y = 2$ cela donne $2f(x) = xf(2)$ donc $f(x) = \frac{f(2)}{2} \times x$, même conclusion avec $k = \frac{f(2)}{2}$).

Synthèse : on a déjà montré que les fonctions de forme $f(x) = kx$ sont solutions.

Exercise 4. Déterminer les fonctions de $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que

$$f(f(x)) = x + 1$$

Solution 4. _

Fonctions injectives/surjectives/bijectives.

Definition 1. On dit que $f : E \to F$ est *injective* si $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Autrement dit, il n'existe pas deux points dont la fonction a la même valeur.
Exemple : la $f(x) = x^3$ est injective. $f(x) = \frac{1}{x}$ injective. Mais la $f(x) = x^2$ n'est pas injective car $f(1) = 1 = f(-1)$

Definition 2. On dit que la fonction $f : E \to F$ est surjective si pour $t \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = t$.

Exemple: $f(x) = x + 1$ est surjective, $f(x) = x^2$ n'est pas surjective car ne peut pas prendre de valeur négative.
Remarquer que la définition d'injective ou surjective dépend du domaine de définition E et du domaine d'arrivée F et non seulement de la formule de f.
Par exemple : $f : [0, 1] \to [0, 1]$ $f(x) = x$ est surjective. par contre $f : [0, 1] \to [0, 2], f(x) = x$. n'est pas surjective (il n'existe pas de x dans $[0, 1]$ tel que $f(x) = 2$.). Un autre exemple $f : [0, 1] \to [0, 1]$ $f(x) = x^2$ est surjective. En effet pour tout $t \in [0, 1]$ il existe $x = \sqrt{t} \in [0, 1]$ tel que $x^2 = t$.
Encore un exemple: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ elle n'est pas surjective ($\sin(x) = 2$ est impossible). Elle n'est pas injective non plus car $\sin(360) = \sin(0)$.

Definition 3. Bijective $\Leftrightarrow$injective + surjective.

Il y a une interprétation ces notions avec une équation. Considérons

$$f(x) = t.$$

1. Dire que f injective c'est la même chose que "Quel que soit t il existe au plus une seule solution à cette équation (unicité)".
2. Dire que f surjective c'est la même chose que "Quel que soit t il existe au moins une solution à cette équation (existence)".
3. Dire que f bijective c'est la même chose que "Quel que soit t il existe une et uen seule solution à cette équation (existence+unicité)".

Les notions d'injectivité et surjectivité sont courante dans les exercices d'équations fonctionnelles. Par exemple

$$f(\text{"}truc\text{"}) = f(\text{"}bidule\text{"}) \quad \text{et f est injective} \;\Rightarrow \text{"}truc\text{"} = \text{"}bidule\text{"}.$$

On aimerait aussi faire des changement de variable. Par exemple sur cette équation

$$(...f(y) + f(y)^2 + ...) = ...$$

On aimerait poser $u = f(y)$ pour avoir

$$(...u + u^2 + ...) =$$

mais attention à quelles valeurs peut prendre u. Cette équation peut ne pas être vrai tout le temps. Par exemple si $f(y) = y^2$ alors elle n'est vrai que pour les $u \geq 0$. Par contre si f est surjectif tout va bien car toute les valeurs de u sont possible.Et on peut alors le choisir comme on veut comme par exemple $u = 0$

$$(...0 + 0 + ...) = ...$$

Exercise 5. Pour les solutions des équations fonctionnelles ci dessous lesquelles sont injectives ou surjectives de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. $f(f(x) - 1) = x + 1$.
2. $f(2x + f(3y)) = f(x) + y^5$.
3. $f(f(x) - f(y)) = xf(x - y)$.
4. $f(f(x) + f(y)) - f(f(x) - f(y)) = 2x + 3y$.

Solution 5. .

1. Est ce qu'on peut avoir $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$? Si c'est le cas alors

   $$f(x) - 1 = f(y) - 1 \Rightarrow f(f(x) - 1) = f(f(y) - 1) \Rightarrow x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y$$

   Absurde. Donc la fonction est injective. Montrons maintenant que la fonction est surjective. Soit $t \in \mathbb{R}$ je choisit $x = t - 1$. Alors

   $$f(f(x) - 1) = x + 1 = t$$

   Donc avec $u = f(x) - 1$, on a bien $f(u) = t$. La fonction est donc bien surjective.

2. Par absurde supposons $y_1 \neq y_2$ tel que $f(3y_1) = f(3y_2)$ alors

   $$2x + f(3y_1) = 2x + f(3y_2) \Rightarrow f(2x + f(3y_1)) = f(2x + f(3y_2)) \Rightarrow f(x) + y_1^5 = f(x) + y_2^5 \Rightarrow y_1 = y_2$$

   Absurde. Donc la fonction est injective. Montrons qu'elle est surjective. Soit $t \in \mathbb{R}$, alors il existe y tel que $t = f(x) + y^5$ (on choisit $y = (t - f(x))^{1/5}$) alors

   $$f(2x + f(3y)) = f(x) + y^5 = t$$

avec $u = 2x + f(3y)$ on a bien que $f(u) = t$ et donc la fonction est bien surjective. [Remarquer aussi que pour $y = 0$ on a

$$f(2x + f(0)) = f(x)$$

et si on choisit x tel que $2x + f(0) \neq x$ ($x \neq -f(0)$) on a que f n'est pas injective. Conclusion : pour cette équation il n'existe pas de solution possible.

3. On remarque que la fonction $f(t) = 0$ est solution. Or cette solution n'est ni injective ni surjective.

Exercise 6. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$f(f(x+1) + y - 1) = f(x) + y.$$

Solution 6. On refait comme au début du cours:

1. On essaye $f(x) = x$ et cette fonction est bien solution:

$$f(f(x+1) + y - 1) = f(x + 1 + y - 1) = x + y \qquad f(x) + y = x + y.$$

2. On ne sait pas trop comment avoir $f(0)$ ou une autre valeur. Passons.

3. De même..._

4. La fonction est elle surjective? Soit $t \in \mathbb{R}$, on choisit $x = 0$ et $y = f(0) - t$. On a alors
$$f(f(1) + y - 1) = f(0) + y = t$$
avec $u = f(1) + y - 1$ on a bien $f(u) = t$ donc la fonction est surjective. Puisque f est surjective on va pouvoir choisir x pour simplifier le terme $f(x+1)+y-1$. Il existe u tel que $f(u) = 1$ et on fixe $x_* = u - 1$ et donc $f(x_* + 1) = f(u) = 1$. On a alors

$$f(y) = f(1 + y - 1) = f(x_*) + y$$

Conclusion en notant $c = f(x_*)$ on a $f(y) = y + c$. On a presque terminer on remarque que pour $x = 0$ et $y = 0$ an alors $f(1+c+0-1) = c+c = 2c$ et $f(0) + 0 = c$. Donc le c possible est $c = 0$ soit $f(y) = y$ pour tout y.

Exercise 7. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(f(f(x))) + f(f(y)) = f(y) + x.$$

Exercise 8. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y.$$

Equations de Cauchy.