POFM

Lenoir Théo

7 décembre 2020

Proposition

Soit $x \in \mathbb{R}$*. On a* $x^2 \geq 0$*, avec égalité si et seulement si* $x = 0$*.*

Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. *Alors* $a^2 + b^2 \geq 2ab$, *avec égalité si et seulement si* $a = b$.

Corollaire

Soit $a \in \mathbb{R}$*. Alors* $a^2 + 1 \geq 2a$*, avec égalité si et seulement si* $a = 1$*.*

Proposition

Soit c, d des réels positifs. Alors $c + d \geq 2\sqrt{cd}$,avec égalité si et seulement si $c = d$. En particulier pour $d = 1$, on a $1 + c \geq 2\sqrt{c}$, avec égalité si et seulement si $c = 1$.

Théorème

Soit n un entier strictement positif et $x_1 \dots x_n$ des réels positifs. On a l'inégalité suivante : $\frac{x_1+\dots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$. Il y a égalité si et seulement si tous les x_i sont égaux.

Corollaire

Soit n un entier strictement positif, $y_1, \ldots, y_n$ *des réels positifs. On a les inégalités suivantes :* $\frac{y_1^n + \cdots + y_n^n}{n} \geq y_1 \ldots y_n$ *et* $\left(\frac{y_1 + \ldots y_n}{n}\right)^n \geq y_1 \ldots y_n$ *avec égalité si et seulement si tous les* y_i *sont égaux*

Théorème

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots a_n$ et $b_1, \dots b_n$ des réels. On a l'inégalité suivante :

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2$$

.
On a égalité si et seulement si tous les b_i sont nuls ou il existe λ réel tels que $a_i = \lambda b_i$ pour tout entier i entre 1 et n.

Corollaire

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $c_1, \ldots c_n$ et $d_1, \ldots d_n$ des réels positifs. On a l'inégalité suivante :

$$(c_1 + \cdots + c_n)(d_1 + \cdots + d_n) \geq \left(\sqrt{c_1 d_1} + \cdots + \sqrt{c_n d_n}\right)^2$$

Il y a égalité si et seulement si les d_i sont tous nuls ou s'il existe λ réel positif tel que $c_i = \lambda d_i$ pour tout i entre 1 et n.

Théorème

Soit n un entier strictement positif, $e_1, \ldots, e_n$ des réels, et $f_1 \ldots f_n$ des réels strictement positifs. On a l'inégalité suivante :

$$\frac{e_1^2}{f_1} + \cdots + \frac{e_n^2}{f_n} \geq \frac{(e_1 + \cdots + e_n)^2}{f_1 + \cdots + f_n}.$$

Il y a égalité si et seulement s'il existe un réel λ tel que $e_i = \lambda f_i$ pour tout i entre 1 et n.

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ des réels. On dit que les (y_i) sont une permutation des (x_i) si ce sont les mêmes nombres mais placés dans un ordre différent.

Théorème

Soit $n \geq 1$ un entier et $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ et $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ des réels, et $c_1, c_2, \ldots, c_n$ une permutation des (b_i). On a l'inégalité suivante :

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + \cdots + a_n c_n.$$