Polynômes

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dont les fonctions marginales, c'est-à-dire les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto f(t,y)$, sont polynomiales. Démontrer que f est polynomiale.

Exercice 2

Trouver tous les polynomes P à coefficients réels tels que

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

pour tous les réels a, b et c tels que $ab + bc + ca = 0$.

Exercice 3

Trouver le plus petit réel M tel que l'inégalité

$$|ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2)| \leqslant M(a^2+b^2+c^2)^2$$

soit vérifiée pour tous nombres réels a, b et c.

Exercice 4

Montrer que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1$$

pour tous les nombres réels x, y, z différents de 1 vérifiant $xyz = 1$, et démontrer que le cas d'égalité est atteint pour une infinité de nombres rationnels x, y, z.

Exercice 5

On dit qu'un ensemble d'entiers est *parfumé* s'il contient au moins deux éléments et si chacun de ses éléments possède un facteur premier en commun avec au moins l'un des autres éléments. Soit $P(n) = n^2 + n + 1$. Déterminer le plus petit entier $b \geqslant 1$ pour lequel il existe un entier $a \geqslant 0$ tel que l'ensemble

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

soit parfumé.

Exercice 6

Morgane a écrit l'équation

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2020) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2020)$$

au tableau, avec 2020 facteurs dans chaque membre. Elle souhaite effacer k de ces facteurs de sorte que l'équation obtenue ait au moins un facteur dans chaque membre, mais n'ait aucune solution réelle. Quel est le plus petit entier k pour lequelle elle peut arriver à ses fins ?

Exercice 7

Une paire d'entiers (x,y) est dite *primitive* si $\mathrm{PGCD}(x,y) = 1$. Étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de paires primitives, démontrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ et des entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1$$

pour toute paire $(x,y) \in \mathcal{S}$.