Triangles semblables

POFM - Groupe B

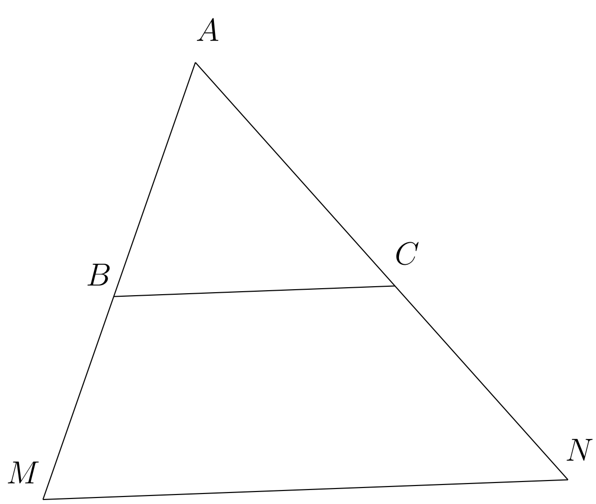
15 novembre 2020

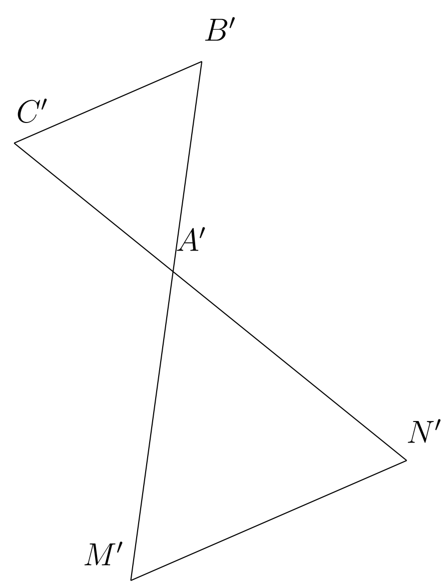
Ce cours a pour but d'introduire la notion de triangles semblables et de montrer son utilité en géométrie olympique : après avoir rappelé le théorème de Thalès, on définira la notion de triangles semblables, puis on en verra diverses applications en exercices ou par des résultats classiques.

1 Rappel : théorème de Thalès

Théorème 1.1 (Théorème de Thalès)**.** Soient A, B, M et A, C, N deux triplets de points alignés. Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors :

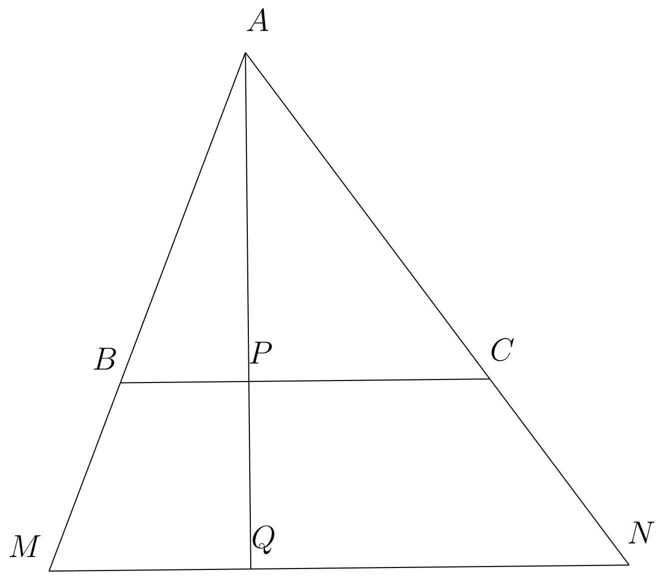
$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$





Démonstration. On utilise le fait que l'aire d'un triangle vaut $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$: notamment si deux triangles ont même hauteur alors le rapport des bases est le rapport des aires. Notamment $\frac{AB}{BM} = \frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(BMC)}$. De même $\frac{AC}{CN} = \frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(BNC)}$. Or les triangles BMC, BNC ont même base BC et ont une hauteur commune qui est la distance entre (MN) et (BC) (elle est bien définie car les droites (MN) et (BC) sont parallèles).

Ainsi $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CN}$. De même $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{CN}$, donc $\frac{BM}{AM} = \frac{CN}{CM}$. En faisant le produit des égalités : $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$.
Soit P le projeté orthogonal de A sur (BC) et Q le projeté orthogonal de A sur (MN). D'après ce qu'on a montré précédemment $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{AP}{AQ}$. Comme $\mathcal{A}(PQC) = \mathcal{A}(PNC)$, alors $\mathcal{A}(AQC) = \mathcal{A}(APN)$. Donc $AQ \cdot PC = AP \cdot QN$, d'où $\frac{AP}{AQ} = \frac{PC}{QN}$, et de même $\frac{AP}{AQ} = \frac{BP}{MQ}$.
Donc $\frac{AP}{AQ} = \frac{BP+PC}{MQ+QN} = \frac{BC}{MN}$.
Donc $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$, ce qui montre le théorème de Thalès. □



Théorème 1.2 (Réciproque du théorème de Thalès)**.** Soient A, B, M et A, C, N deux triplets de points alignés. Si $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$, alors (BC) et (MN) sont parallèles.

Démonstration. Soient A, B, M et A, C, N alignés, supposons $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$. Soit C' l'intersection de (AC) avec la parallèle à (MN) passant par B. Alors d'après le théorème de Thalès : $\frac{AC'}{AN} = \frac{AB}{AM} = \frac{BC'}{MN}$. En particulier $AC = AC'$ donc $C = C'$.
Donc les droites (BC) et (MN) sont parallèles. □

2 Définition des triangles semblables

Intuitivement, on dit que deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont les mêmes « formes ». On précise dans cette partie cette définition intuitive.

2.1 Propriétés fondamentales

Définition 2.1. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles, on dit que ABC et $A'B'C'$ sont semblables, et on note $ABC \sim A'B'C'$, si $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$ et $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$.

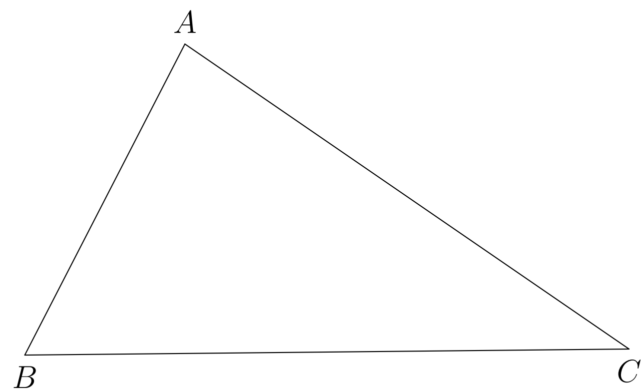
Remarque 2.2. Comme la somme des angles d'un triangle vaut $180°$, il suffit d'avoir deux de ces égalités pour avoir la troisième.

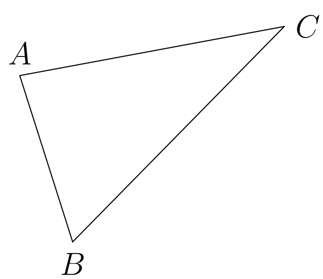
Proposition 2.3. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

i. ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

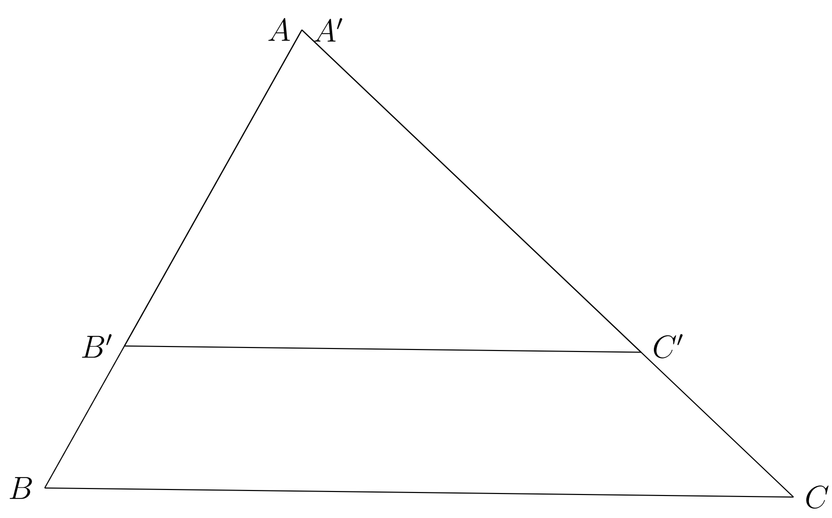
ii. $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{CA}{C'A'} = \dfrac{BC}{B'C'}$.

iii. $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.





Démonstration. On effectue une rotation envoyant A' sur A et B' sur $[AB)$.



• Montrons que iii $\implies$ i. Supposons iii

Par hypothèse $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ donc C' est sur $[AC)$. Comme $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}$ alors d'après le théorème de Thalès $(B'C')//(BC)$, donc par angles correspondants $\widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$, donc ABC et $A'B'C'$ sont semblables.
Donc iii $\implies$ ii.

• Montrons que si i alors ii. Supposons i.

On effectue une rotation envoyant A' sur A et B' sur $[AB)$. Comme $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, alors C' est sur $[AC)$. Comme $A = A'$ alors $\widehat{C'B'A} = \widehat{CBA}$, donc par angles correspondants $(BC)//(B'C')$, donc d'après le théorème de Thalès $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$. Donc i $\implies$ ii.

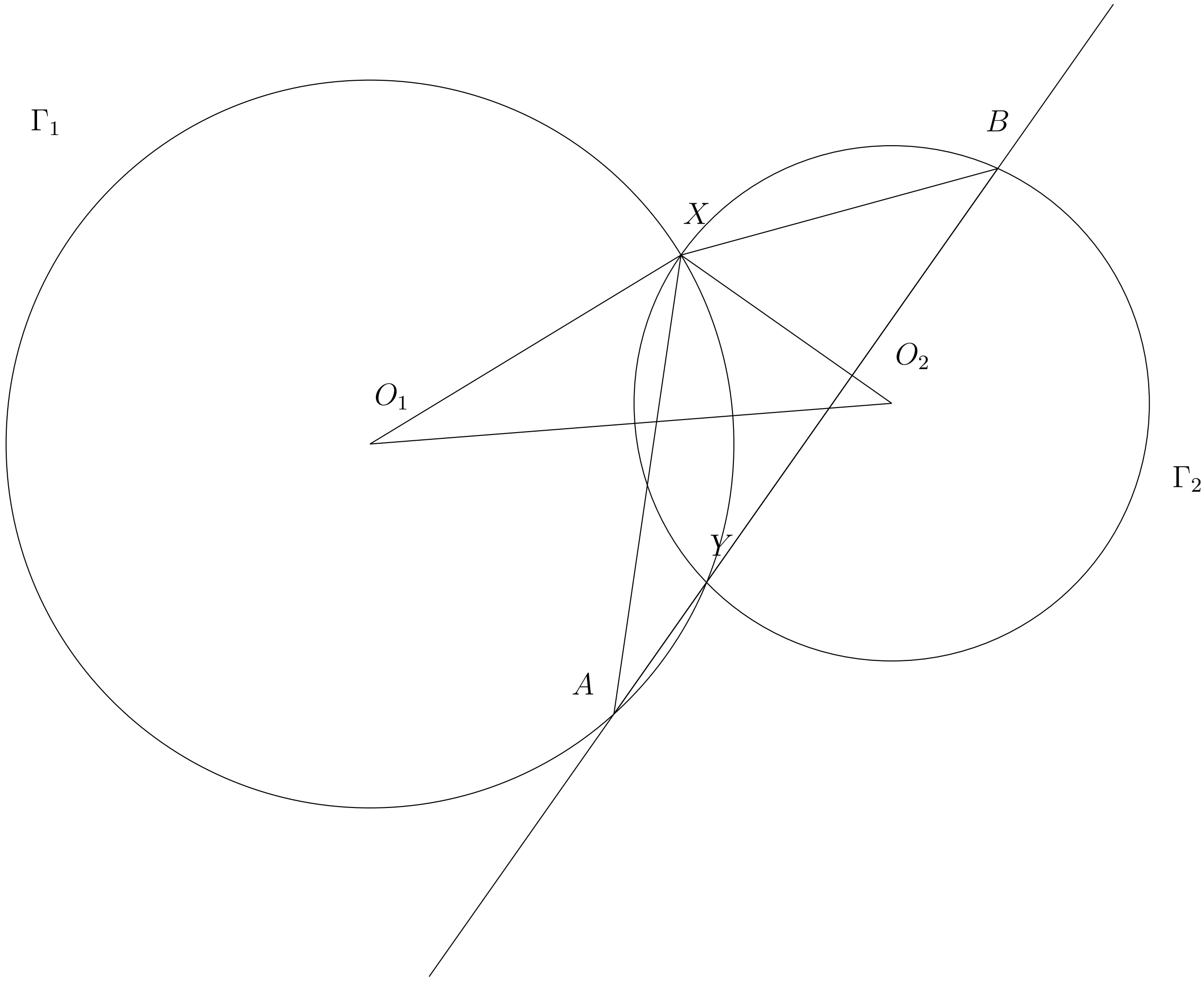
• Montrons que ii $\implies$ iii. Supposons ii.

Soit C'' le point de $[AC)$ tel que $AC' = AC''$. Alors $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C''}$, or $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C''}$ d'où $ABC \sim A'B'C''$, d'où $\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C''}$ donc $B'C'' = B'C'$, d'où $C' = C''$, donc $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.
Donc ii $\implies$ iii.

On a bien montré l'équivalence entre i, ii et iii. $\square$

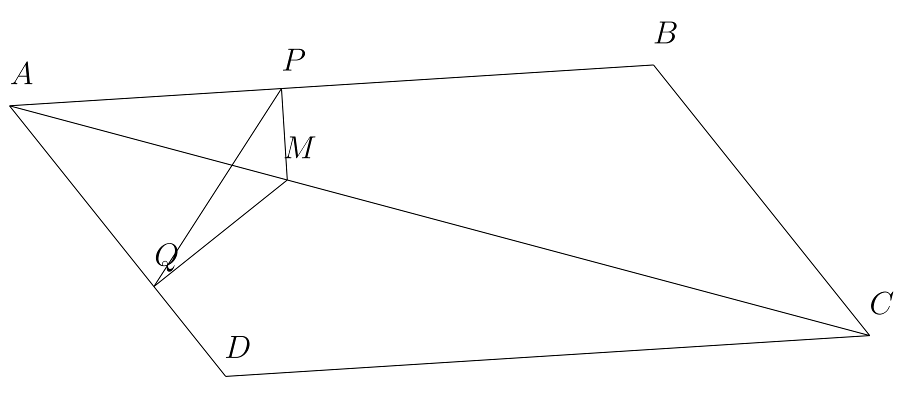
2.2 Exemples

Exercice 1. Soient Γ_1, Γ_2 deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2, qui s'intersectent en deux points X, Y. Soit A un point de Γ_1 et B l'intersection, autre que Y, de (AY) avec Γ_2. Montrer que les triangles XO_1O_2 et XAB sont semblables.



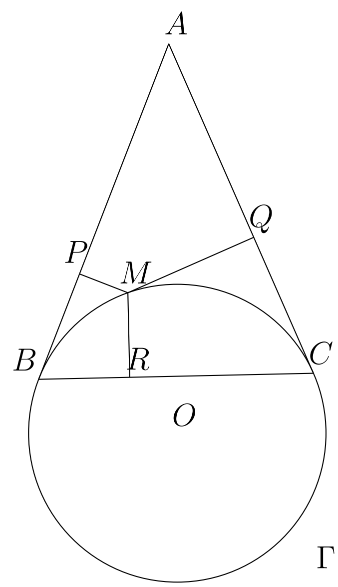
Solution de l'exercice 1 C'est une chasse aux angles : $O_1X = O_1Y$ et $(O_1O_2) \perp (XY)$ donc (O_1O_2) est la bissectrice intérieure de (O_1X, O_1Y) d'où $(O_1O_2, O_1X) = \frac{1}{2}(O_1Y, O_1X) = (AY, AX) = (AB, AX)$, et de façon totalement analogue $(O_2X, O_2O_1) = (BX, BA)$, donc les triangles XO_1O_2 et XAB sont semblables.

Exercice 2. Soit $ABCD$ un parallélogramme et M un point sur $[AC]$. Soient P et Q les projetés orthogonaux de M sur (AB) et (AD) respectivement. Montrer que $\frac{MP}{MQ} = \frac{AD}{CD}$.



Solution de l'exercice 2 Les points A, P, Q, M sont sur le cercle de diamètre $[AM]$ donc $\widehat{PMQ} = 180° - \widehat{PAQ} = \widehat{ADC}$. De plus $\widehat{QPM} = \widehat{QAM} = \widehat{DAC}$. Donc MPQ et DAC sont semblables, d'où $\dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{AD}{CD}$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle isocèle en A et Γ le cercle tangent à (AB) et (AC) en B et C respectivement. Soit M un point de l'arc de Γ situé dans le triangle ABC. Soient P et Q les projetés orthogonaux de M sur $[AB]$ et $[AC]$, et R le projeté orthogonal de M sur $[BC]$.
Montrer que $MP \cdot MQ = MR^2$.

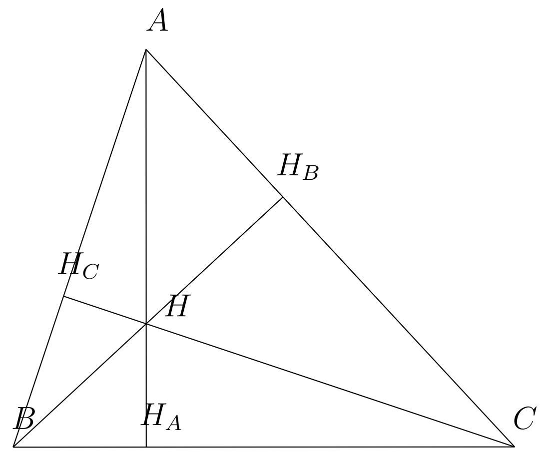


Solution de l'exercice 3 On sait que A, P, M, Q sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[AM]$. De même P, M, R, B sont cocycliques et C, R, M, Q aussi. Montrons que les triangles PMR et RMQ sont semblables. On a $\widehat{PMR} = 180° - \widehat{ABC} = 180° - \widehat{ACB} = \widehat{RMQ}$. De plus $\widehat{PRM} = \widehat{PBM} = \widehat{BCM} = \widehat{RQM}$. Donc $PMR \sim RMQ$ d'où $\dfrac{MP}{MR} = \dfrac{MR}{MQ}$ soit $MP \cdot MQ = MR^2$.

3 Quelques résultats classiques

3.1 Les hauteurs d'un triangle sont concourantes

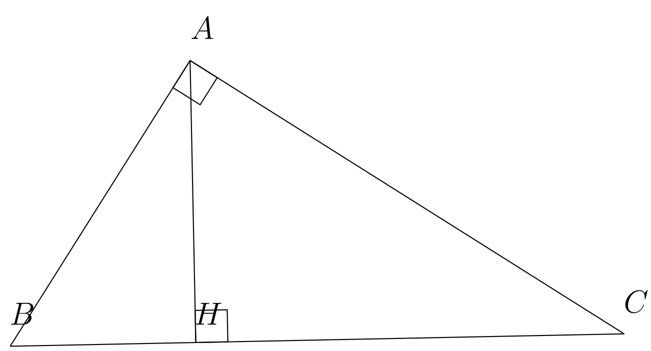
Exercice 4. Concours des hauteurs : Soit ABC un triangle et H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement. Montrer que $(AH_A), (BH_B), (CH_C)$.



<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Soit H l'intersection de (CH_C) et de (BH_B), montrons que H est sur (AH_A). On considère H_A comme l'intersection de (AH) et (BC). Montrons que $(AH_A) \perp (BC)$. On a $\widehat{H_AHC} = \widehat{H_CHA}$. De plus A, H_C, H, H_B sont cocycliques et B, H_B, H_C, C sont cocycliques. Donc $\widehat{H_ACH} = \widehat{BCH_C} = \widehat{BH_BH_C} = \widehat{HH_BH_C} = \widehat{HAH_C}$ donc les triangles HAH_C et H_ACH sont semblables d'où $(AH_A) \perp (BC)$.

3.2 Théorème de Pythagore

Exercice 5. Théorème de Pythagore : Soit ABC un triangle rectangle en A, montrer que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Montrer la réciproque.

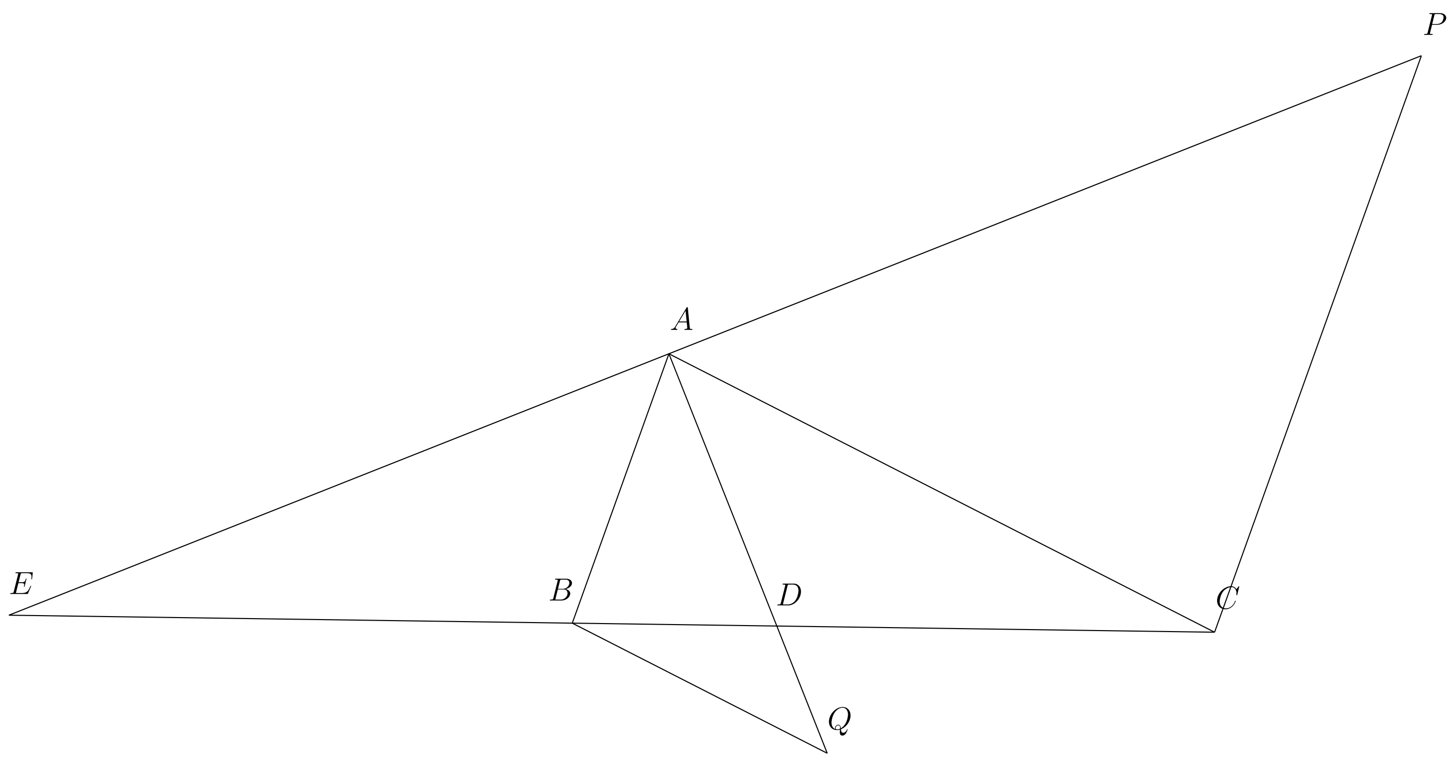


<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Soit H le pied de la hauteur issue de A dans ABC. On sait que $\widehat{BAC} = \widehat{AHC} = \widehat{BHA}$. De plus $\widehat{ABH} = \widehat{CBA} = 90° - \widehat{ACB} = \widehat{CAH}$. Donc les triangles ABC, HBA et HAC sont semblables.
On a d'une part $\dfrac{CH}{CA} = \dfrac{CA}{CB}$ soit $AC^2 = BC \cdot HC$ et de même $\dfrac{BH}{BA} = \dfrac{BA}{BC}$ d'où $AB^2 = BC \cdot BH$.
Ainsi $AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BH + HC)$ donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
Réciproquement, soit ABC un triangle vérifiant $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Soit C' le point d'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par A et du cercle de centre A passant par C tel que C, C' soient du même côté de (AB). Alors ABC' est rectangle en A : $AB^2 + AC'^2 = BC'^2$ d'après le théorème de Pythagore. Or $AC = AC'$ donc $BC^2 = AC^2 + AB^2 = AC'^2 + AB^2 = BC'^2$ d'où $BC = BC'$ donc $C = C'$ (deux intersections de cercle du même côté de la droite des centres).

3.3 Théorème de la bissectrice

Théorème 3.1. Soit ABC un triangle qui n'est pas isocèle en A. Soit D le pied de la A-bissectrice intérieure et E le pied de la A-bissectrice extérieure. Alors $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC}$.

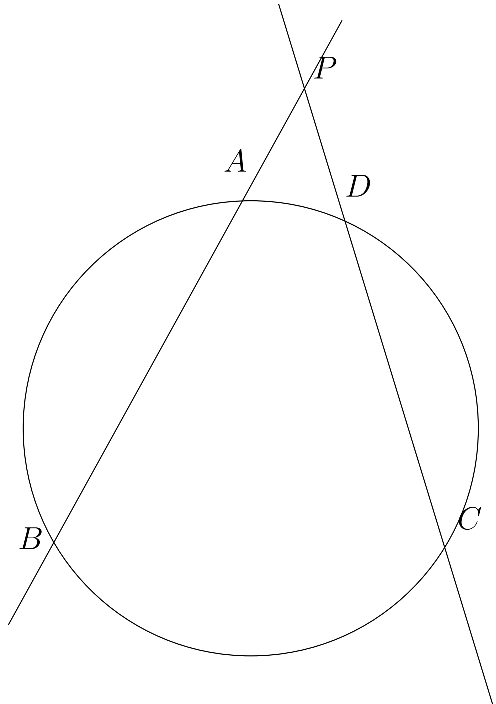
Démonstration. On montre d'abord que $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$. On introduit P l'intersection de (EA) et de la parallèle à (AB) passant par C. D'après le théorème de Thalès, $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{PC}$, or $\widehat{APC} = \widehat{EAB} = \widehat{CAP}$ donc $CP = CA$, d'où $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$.
Soit Q le point d'intersection de (AD) avec la parallèle à (AC) passant par B. D'après le théorème de Thalès, $\frac{DB}{DC} = \frac{QB}{QC}$. Or $\widehat{BQD} = \widehat{BQA} = \widehat{DAC} = \widehat{BAQ}$ donc $QB = AB$, d'où $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.
On a bien montré $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC}$. □



3.4 Puissance d'un point

Théorème 3.2. Soient A, B, C, D quatre points cocycliques tels que (AB) et (CD) ne sont pas parallèles, et P l'intersection de (AB) et (CD), alors $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.

Démonstration. On traite le cas de la figure ci-dessous, les autres cas se traitant de même.
On sait que $\widehat{BPC} = \widehat{APD}$ et $\widehat{BCP} = 180° - \widehat{BCD} = \widehat{BAD} = \widehat{PAD}$ donc les triangles PBC et PDA sont semblables, d'où $\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PD}}$ et donc $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$. □

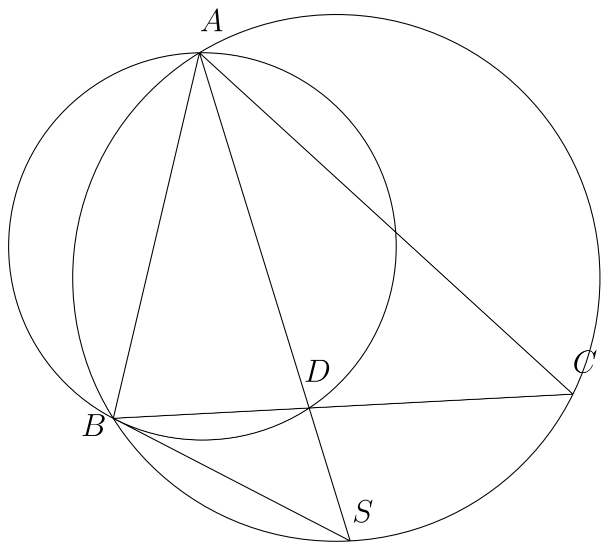


Proposition 3.3 (Réciproque)**.** Soient A, B, C, D quatre points du plan tels que (AB) et (CD) ne sont pas parallèles, soit P l'intersection de (AB) et (CD). On suppose que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$, alors A, B, C, D sont cocycliques.

Démonstration. On utilise aussi la figure précédente, les autres cas étant analogues.
Supposons $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$, alors $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PD}}$, or $\widehat{BPC} = \widehat{APD}$, donc PBC et PDA sont semblables, d'où $\widehat{BAD} = \widehat{PAD} = \widehat{BCP} = 180° - \widehat{BCD}$ donc A, B, C, D sont cocycliques. □

Remarque 3.4. Dans le cas $C = D$, ceci nous donne une relation avec la tangente au cercle (PD) en C : $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2 = PC^2$.

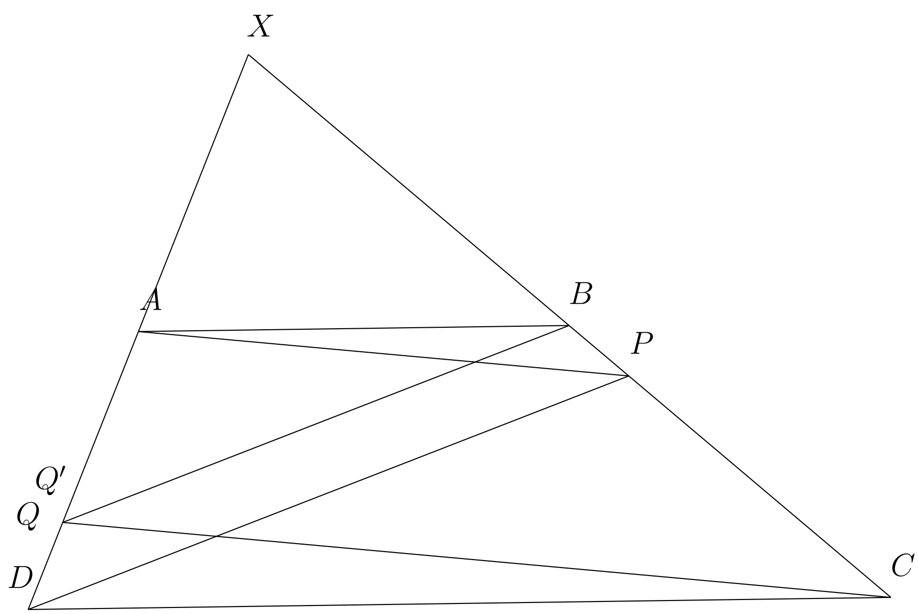
Exercice 6. Soit ABC un triangle, S le pôle Sud de A, D le point d'intersection de (AS) et (BC). Montrer que (SB) est tangente au cercle circonscrit à ABD.



Solution de l'exercice 6 Par chasse aux angles, $\widehat{BAS} = \widehat{CAS} = \widehat{CBS} = \widehat{DBS}$, de plus $\widehat{ASB} = \widehat{BSD}$, donc les triangles sont ABS et BDS sont semblables. Ainsi $\frac{\overline{SD}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SA}}$, d'où $\overline{SD} \cdot \overline{SA} = \overline{SB}^2$, donc par puissance du point S par rapport au cercle circonscrit à ABD, (SB) est tangente au cercle circonscrit à ABD.

4 Exercices

Exercice 7. Soit $ABCD$ un trapèze tel que (AB) et (CD) sont parallèles et $AB < CD$. Soit P un point de $[BC]$. La parallèle à (AP) passant par C coupe (AD) en Q. Montrer que (BQ) et (DP) sont parallèles.

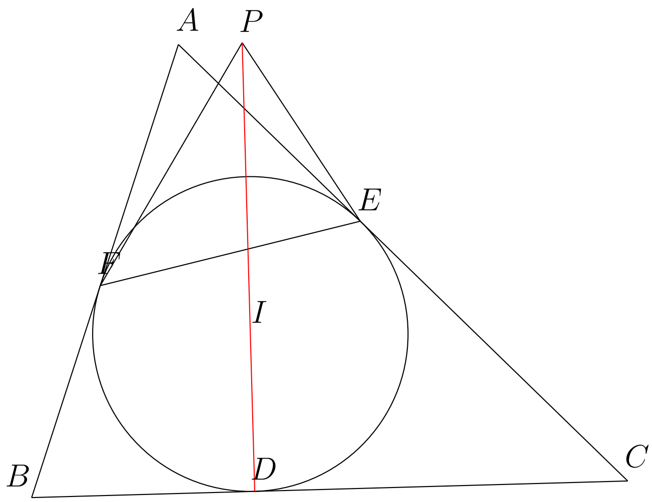


Solution de l'exercice 7 Soit Q' le point d'intersection de la parallèle à (DP) passant par B et de (AD). Montrons que $Q = Q'$.
Soit X le point d'intersection de (AD) et (BC). Les triangles ABX et DCX sont semblables (théorème de Thalès). Donc $\frac{XA}{XB} = \frac{XD}{XC}$, ainsi $XA \cdot XC = XB \cdot XD$. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{XA}{XQ} = \frac{AP}{QC} = \frac{XP}{XC} \text{ et } \frac{XQ'}{XD} = \frac{BQ'}{DP} = \frac{XB}{XQ}$$

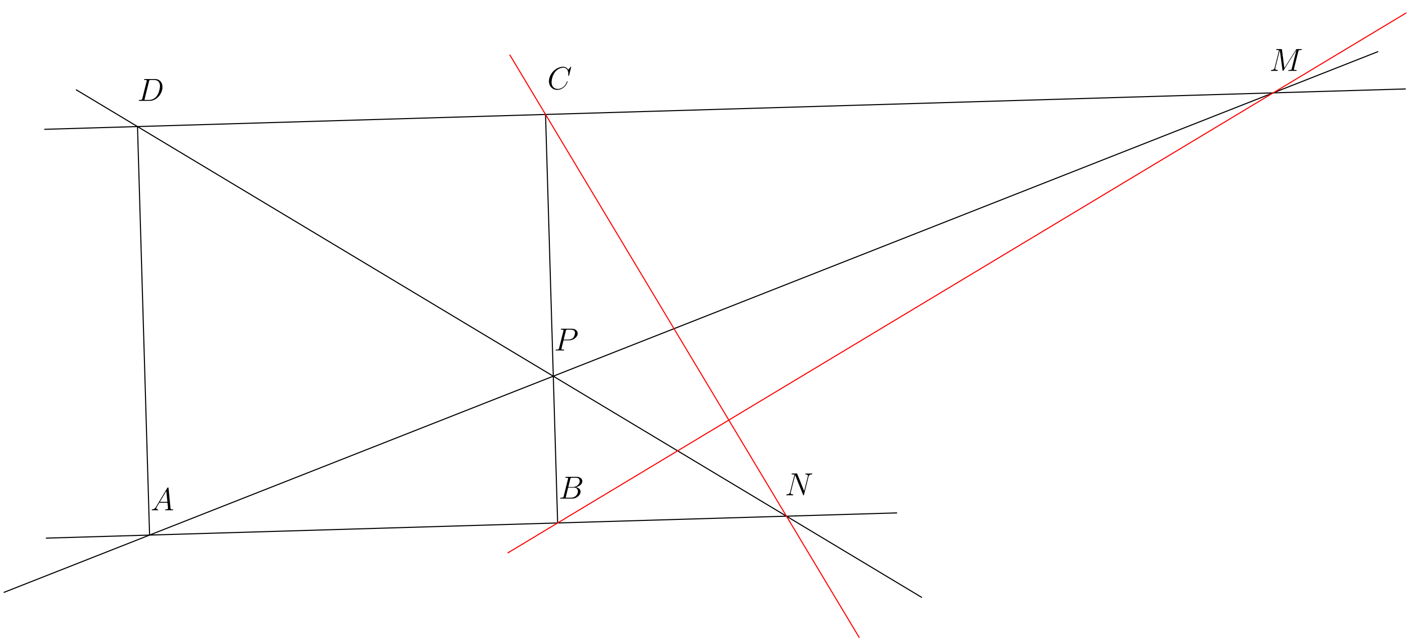
Ainsi $XQ = \frac{XA \cdot XC}{XP}$ et $XQ' = \frac{XB \cdot XD}{XP}$, or $XA \cdot XC = XB \cdot XD$, donc $XQ = XQ'$, d'où $Q = Q'$ (ils sont sur la demi-droite $[XA)$).
Donc (DP) et (BQ) sont parallèles.

Exercice 8. Soit un triangle ABC et I le centre de son cercle inscrit. Le cercle inscrit est tangent en $[BC], [CA], [AB]$ en D, E, F respectivement. Soit P un point du même côté que A de (EF) vérifiant $\widehat{PEF} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{PFE} = \widehat{ACB}$. Montrer que P, I, D sont alignés.



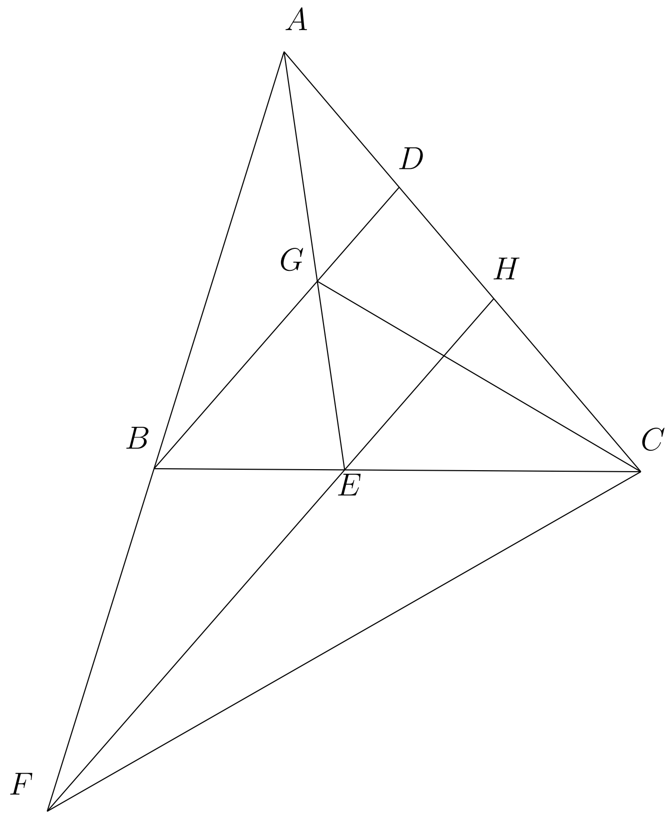
Solution de l'exercice 8 Par construction de P les triangles ABC et PEF sont semblables. Donc P, A, E, F sont cocycliques et comme $\widehat{IEA} = \widehat{IFA} = 90°$, I est sur ce cercle. On procède par chasse aux angles : $\widehat{FIP} = \widehat{FEP} = \widehat{CAB} = \widehat{DBF} = 180° - \widehat{FID}$ car $\widehat{IFB} = \widehat{IDB} = 90°$.
Donc les points P, I, D sont bien alignés.

Exercice 9. Soit $ABCD$ un carré et P un point du segment $[BC]$ (différent de B et C). Soit M le point d'intersection de (AP) et (DC), et N le point d'intersection de (DP) et (AB).
Montrer que les droites (BM) et (CN) sont perpendiculaires.



Solution de l'exercice 9 D'après le théorème de Thalès, $\frac{BN}{DC} = \frac{PB}{PC}$ et $\frac{AB}{CM} = \frac{PB}{PC}$, donc $\frac{BN}{DC} = \frac{AB}{CM}$. Or $AB = DC = BC$ donc $\frac{BN}{BC} = \frac{BC}{CM}$, or $\widehat{NBC} = 90° = \widehat{BCM}$ donc NBC et BCM sont semblables. Ainsi $\widehat{CBM} = \widehat{BNC}$ et $\widehat{MBN} = 90° - \widehat{MBC}$ d'où $\widehat{NBM} + \widehat{CNB} = 90°$, donc les droites (CN) et (BM) sont perpendiculaires.

Exercice 10. Soit ABC un triangle et D le point d'intersection de (AC) et de la médiatrice de $[BC]$. Soit E un point de $[BC]$ et F le point d'intersection de la parallèle à (BD) passant par E avec (AB). Soit G le point d'intersection de (BD) et (AE).
Montrer que $\widehat{BCG} = \widehat{FCB}$.



<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Soit H le point d'intersection de (EF) et (AC). Montrons que les triangles FHC et CDG sont semblables. D'après le théorème de Thalès $BDC \sim EHC$, donc $EH = HC$. De plus par angles correspondants $\widehat{GDC} = \widehat{CHF}$. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{GD}{HC} = \frac{GD}{EH} = \frac{AD}{AH} = \frac{BD}{FH} = \frac{CD}{FH}$$

Donc $\dfrac{GD}{CD} = \dfrac{CH}{FH}$. On a bien prouvé que $FHC \sim CDG$. Dès lors :

$$\widehat{BCF} = \widehat{ECF} = 180° - \widehat{CEF} - \widehat{CFH} = \widehat{CEH} - \widehat{CFH}$$

Comme $FHC \sim CDG$, $\widehat{CFH} = \widehat{GCD}$, d'où :

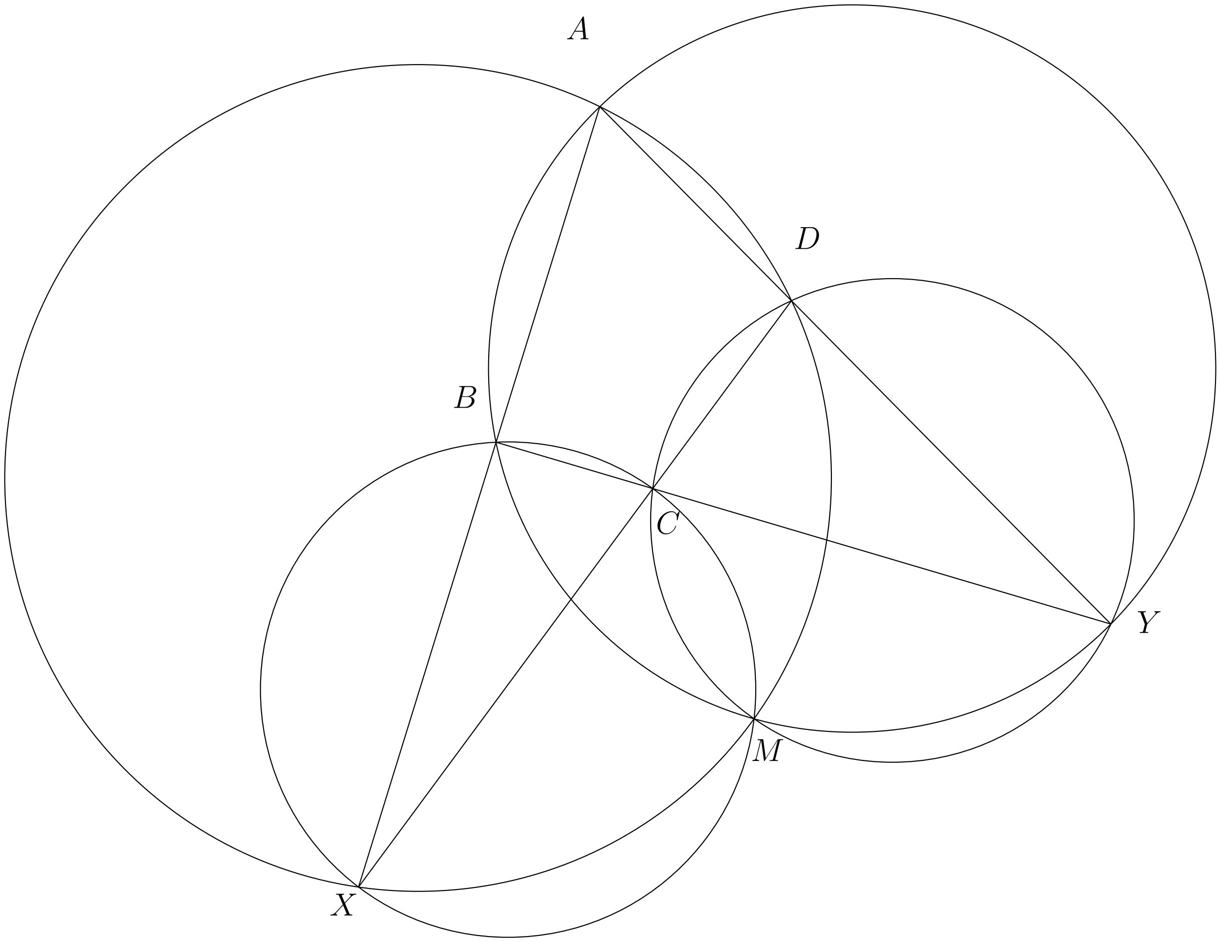
$$\widehat{BCF} = \widehat{DBC} - \widehat{GCD} = \widehat{DCB} - \widehat{GCD} = \widehat{BCG}$$

On a bien $\widehat{FCB} = \widehat{BCG}$.

Exercice 11. Soit $ABCD$ un quadrilatère,X le point d'intersection de (AB) et (CD), Y le point d'intersection de (AD) et (BC).

1. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles ABY, DCY, ADX, BCX sont concourants en un point M. Le point M est appelé point de Miquel.

2. Montrer que $MBC \sim MAD$, $MXD \sim MBY$ et $MXC \sim MDY$.



<u>*Solution de l'exercice 11*</u> 1. On définit M comme étant l'intersection, autre que Y, des cercles circonscrits à ABY et DCY. Montrons que M est sur le cercle circonscrit à ADX. On sait que $\widehat{XAM} = \widehat{BAM} = \widehat{BYM} = \widehat{CYM} = \widehat{CDM} = \widehat{XDM}$ donc A, D, X, M sont cocycliques.
De plus $\widehat{MXC} = \widehat{MXD} = \widehat{MAD} = \widehat{MAY} = \widehat{MBY} = \widehat{MBC}$ donc M, B, X, C sont cocycliques.
Les quatre cercles sont donc bien concourants.

2. Montrons que $MBC \sim MAD$. On a $\widehat{MBC} = \widehat{MBY} = \widehat{MAY} = \widehat{MAD}$ et $\widehat{BMC} = \widehat{BXC} = \widehat{AXD} = \widehat{AMD}$ donc $MBC \sim MAD$.
De même on montre que $MXC \sim MDY$ et $MXD \sim MBY$.