PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 25 NOVEMBRE 2020

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2006 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Pour chaque exercice, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l’on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s’il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n’est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.
`contact-pofm@animath.fr`

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit ABC un triangle et Soit E, F et G les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. Montrer que l'aire du triangle ABC vaut 4 fois l'aire du triangle EFG.

Solution de l'exercice 1 Dans la suite, on emploie la notation $\mathcal{A}_{XYZ}$ pour désigner l'aire du triangle XYZ.

Les points F et G sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AC]$. D'après le théorème de Thalès, les droites (AB) et (FG) sont parallèles avec $FG = \frac{1}{2}AB = AE = EB$.

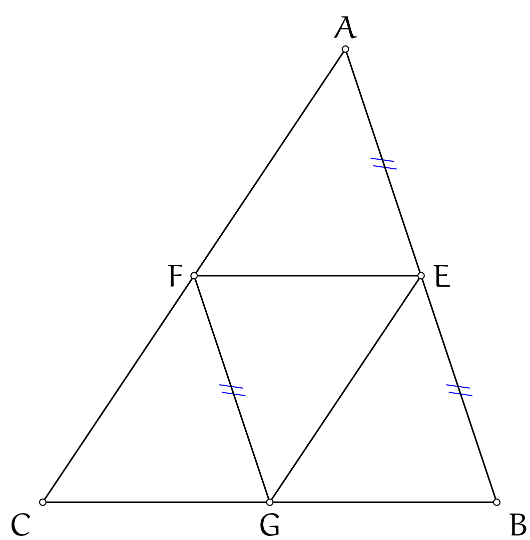
Le quadrilatère $AEGF$ est donc un parallélogramme (deux côtés opposés sont égaux et portés par des droites parallèles). Les triangles AFE et GEF sont donc isométriques. En particulier, ils ont la même aire. Ainsi,

$$\mathcal{A}_{AEF} = \mathcal{A}_{EFG}$$

De même, on établit que $\mathcal{A}_{BEG} = \mathcal{A}_{EFG}$ et $\mathcal{A}_{CFG} = \mathcal{A}_{EFG}$.
Ceci donne bien que l'aire du triangle ABC vaut 4 fois l'aire du triangle EFG.

Solution alternative n°1 On propose une deuxième façon d'établir les diverses égalités d'aire. De la même manière que précédemment, on établit que $FG = \frac{1}{2}AB = AE = EB$.

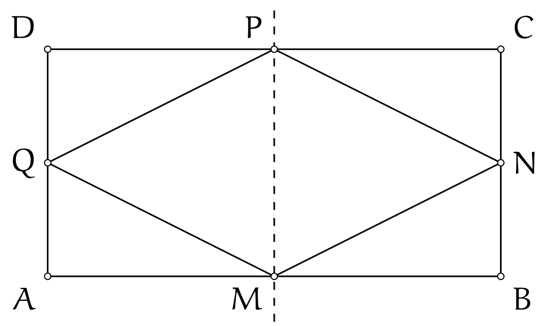
La hauteur issue du sommet F dans le triangle AEF est de même longueur que la hauteur issue du sommet E dans le triangle EFG et de même longueur que la hauteur issue du sommet G dans le triangle EGB.
Ainsi, on a $\mathcal{A}_{AEF} = \mathcal{A}_{EFG} = \mathcal{A}_{EGB}$.
On peut alors conclure comme dans la première solution.



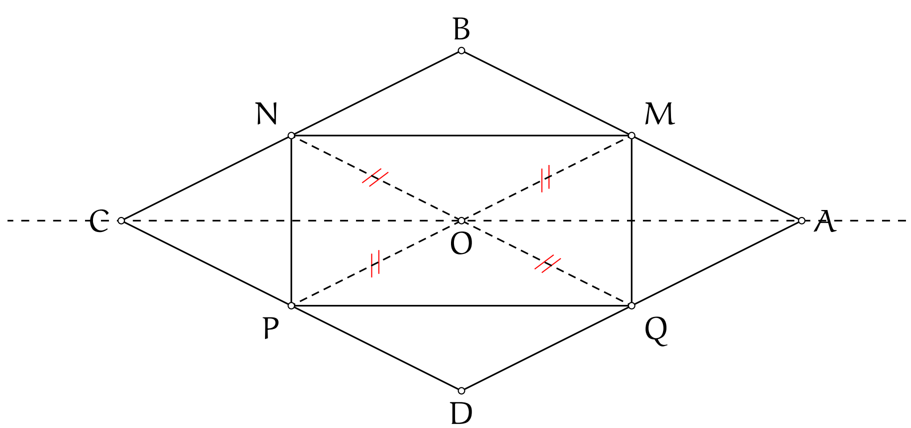
Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien réussi par la très grande majorité des élèves.

Exercice 2. Soit $ABCD$ un quadrilatère et Soit M, N, P et Q les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$. Montrer que si $ABCD$ est un rectangle alors le quadrilatère $MNPQ$ est un losange, et que si $ABCD$ est un losange alors le quadrilatère $MNPQ$ est un rectangle.

Solution de l'exercice 2



Montrons la première partie du problème. Si $ABCD$ est un rectangle alors MP est l'axe de la symétrie axiale qui envoie A sur B et D sur C donc la symétrie envoie aussi Q sur N. Par symétrie on a l'égalité des longueurs $QM = MN$ et $QP = PN$.
De même la symétrie d'axe QN envoie $[MQ]$ sur $[QP]$, $[MN]$ sur $[PN]$. On obtient $QM = MN = PN = QP$, ainsi $QMNP$ est un losange.

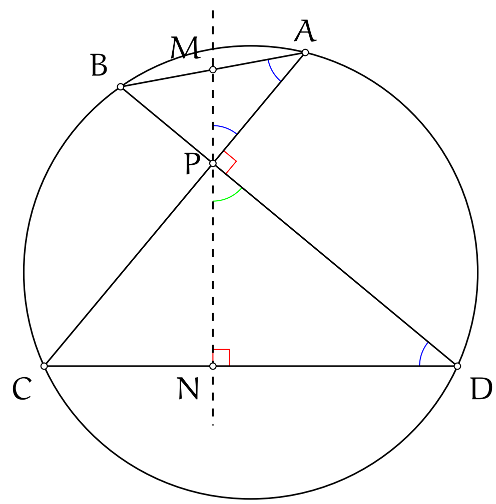


On montre à présent la deuxième partie de l'énoncé. On suppose que le quadrilatère $ABCD$ est un losange. On note O le point d'intersection de ses diagonales.
La symétrie centrale de centre O envoie A sur C et B sur D. Le milieu M du segment $[AB]$ est donc envoyé sur le milieu P du segment $[CD]$. Ainsi le point O est le milieu du segment $[MP]$. On obtient de la même façon que le point O est le milieu du segment $[QN]$.
On a montré pour l'instant que les diagonales du quadrilatère se coupent en O et qu'elles se coupent en leur milieu, ainsi $MNPQ$ est un parallélogramme.
AC est l'axe de la symétrie axiale envoyant le segment $[MO]$ sur le segment $[QO]$ et le segment $[NO]$ sur le segment $[PO]$. Ainsi $MO = NO = PO = QO$ et donc les diagonales du quadrilatère sont en plus de même longueur. Le quadrilatère $MNQP$ est bien un rectangle.

Commentaire des correcteurs : Les élèves ont montré une bonne maitrise des critères sur les différents quadrilatères particuliers. La rédaction est très souvent excellente !

Exercice 3. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle. On suppose que les diagonales (AC) et (BD) de ce quadrilatère sont perpendiculaires et on note P leur point d'intersection. Montrer que la droite perpendiculaire à la droite (DC) passant par le point P coupe le segment $[AB]$ en son milieu.

Solution de l'exercice 3



On note N le pied de la hauteur issue du sommet P dans le triangle CDP. On note M le point d'intersection de la droite (PN) avec le segment $[AB]$. Il s'agit de montrer que le point M est le milieu du segment $[AB]$.

On commence par chercher des égalités d'angles dans la figure.
D'après le théorème de l'angle inscrit,

$$\widehat{PBM} = \widehat{DBA} = \widehat{DCA} = \widehat{PCN}$$

Puisque l'angle $\widehat{BPC}$ est droit, on a $\widehat{MPB} + \widehat{NPC} = 90°$. Puisque l'angle $\widehat{PNC}$ est droit, on a aussi $\widehat{NPC} = 90° - \widehat{PCN}$. Ainsi,

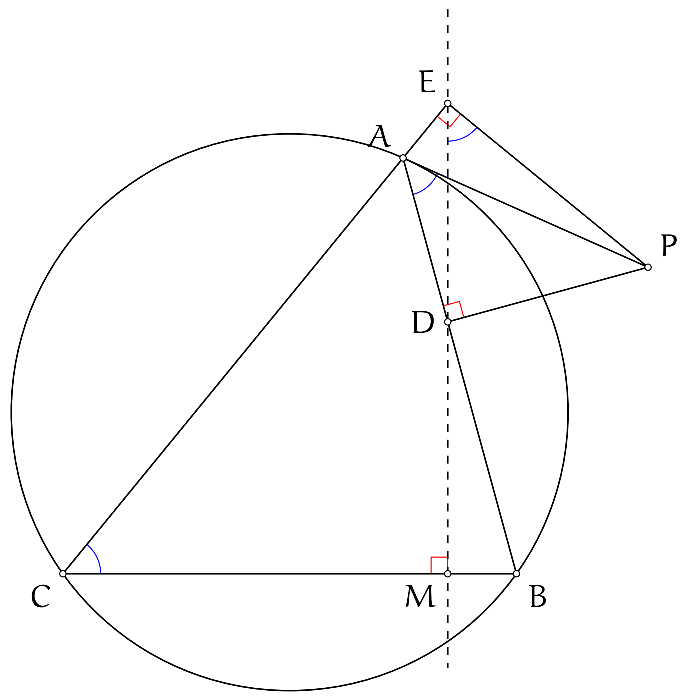
$$\widehat{MPB} = 90° - \widehat{NPC} = 90° - (90° - \widehat{PCN}) = \widehat{PCN} = \widehat{PBM}$$

Le triangle PBM est donc isocèle au point M, ce qui nous donne $MB = MP$. On obtient de la même manière que le triangle AMB est isocèle et que $MA = MP$. Finalement, $MA = MP = MB$ est le point M est bien le milieu du segment $[AB]$.

Commentaire des correcteurs : Exercice assez bien résolu, il faut faire attention à bien introduire les nouveaux points que l'on rajoute à la figure originelle.

Exercice 4. Soit ABC un triangle et soit Ω son cercle circonscrit. Soit P un point sur la tangente en A au cercle Ω. On note E et D les projections orthogonales de P sur les côtés AC et AB. Montrer que la droite (ED) est perpendiculaire à la droite (BC).

Solution de l'exercice 4



Supposons sans perte de généralité que $AB < AC$.
Tout d'abord, puisque les points D et E sont les projetés orthogonaux du point P sur les droites (AB) et (AC), on a $\widehat{AEP} + \widehat{ADP} = 90° + 90° = 180°$ donc les points E, A, D et P sont cocycliques.
On en déduit que $\widehat{DEP} = \widehat{DAP}$.
Puisque la droite (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC, $\widehat{DAP} = \widehat{BAP} = \widehat{BCA}$.
Si on note M le point d'intersection des droites (BC) et (DE), on trouve

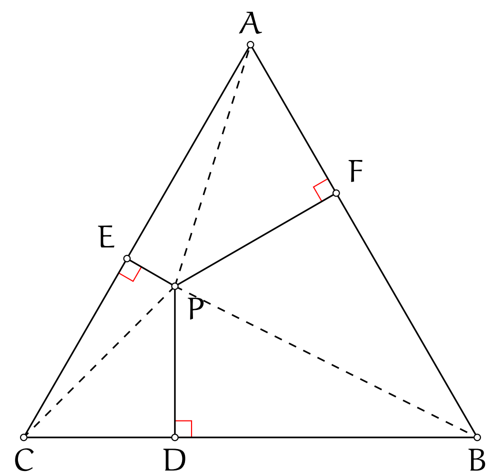
$$\begin{aligned}\widehat{MEC} &= \widehat{DEA} \\ &= 90° - \widehat{DEP} \\ &= 90° - \widehat{DAP} \\ &= 90° - \widehat{BCA} \\ &= 90° - \widehat{MCE}\end{aligned}$$

donc $\widehat{CME} = 90°$ est les droites (DE) et (BC) sont perpendiculaires.

Commentaire des correcteurs : Exercice bien résolu par la majorité des élèves. Néanmoins, attention pour ceux qui utilisent les triangles semblables de bien ordonner les lettres : dire que le triangle ABC est semblable à DEF, n'est pas du tout la même chose que de dire que le triangle ABC est semblable à EFD.

Exercice 5. Soit ABC un triangle équilatéral et P un point à l'intérieur du triangle. On note D, E et F les projections orthogonales du point P sur les trois côtés du triangle. Montrer que $PE + PD + PF$ a toujours la même valeur quelque soit la position du point P.

Solution de l'exercice 5



Pour un tel exercice, c'est-à-dire un exercice demandant de montrer qu'une valeur reste constante alors qu'un paramètre varie, on peut essayer de trouver la valeur de la constante (en espérant que celle-ci s'exprime facilement en fonction des longueurs du triangle).
Ici, pour deviner la constante, on peut par exemple la calculer pour le point P au centre du triangle.

Une stratégie envisageable pour montrer que la somme de trois longueurs est constante est d'exprimer chaque longueur séparément en fonction d'autres paramètres dont la somme serait plus explicite.

Essayons d'exprimer la longueur PD en fonction d'autres paramètres. Le fait que le point D soit le projeté orthogonal du point P peut s'interpréter comme le fait que la droite (PD) est la hauteur issue du sommet P dans le triangle BPC. Ceci nous invite à utiliser l'aire du triangle BPC. On a en effet

$$\mathcal{A}_{BPC} = \frac{PD \cdot BC}{2}$$

Si bien que $PD = \frac{2\mathcal{A}_{BPC}}{BC}$.
Ainsi,

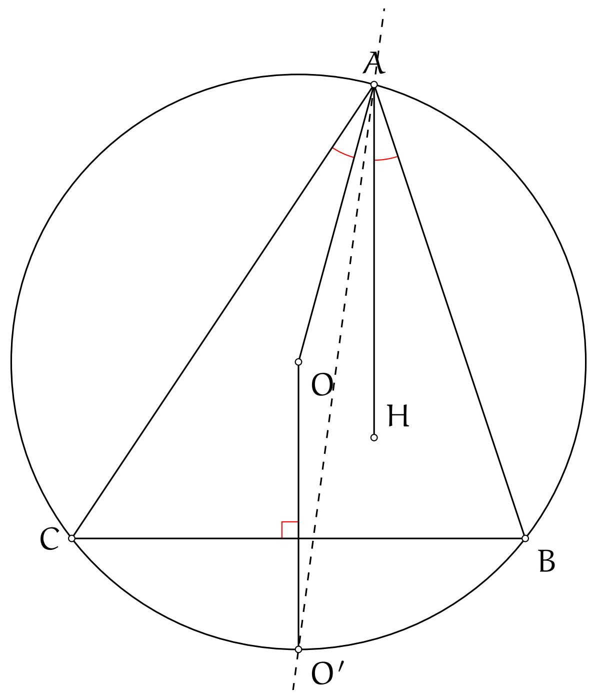
$$PD + PE + PF = \frac{2\mathcal{A}_{BPC}}{BC} + \frac{2\mathcal{A}_{APC}}{CA} + \frac{2\mathcal{A}_{BPA}}{AB} = \frac{2}{AB}(\mathcal{A}_{BPC} + \mathcal{A}_{APC} + \mathcal{A}_{BPA}) = \frac{2\mathcal{A}_{ABC}}{AB}$$

Puisque $\mathcal{A}_{ABC}$ et AB ne dépendent pas de la position du point P, on trouve bien que la somme $PD + PE + PF$ ne dépend pas de la position du point P. On peut même calculer cette valeur qui est $\frac{\sqrt{3}}{2}AB$.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> Exercice bien traité par ceux qui l'ont rendu. Certains ont même fourni une preuve originale en montrant que $PD + PE + PF$ ne changeait pas lorsqu'on dépalçait P perpendiculairement ou parallèlement à un des côtés.

Exercice 6. Soit ABC un triangle. Soit O, H respectivement le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle ABC. On note O' le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point O et de l'arc BC du cercle circonscrit au triangle ABC ne contenant pas le point A. Montrer que la droite (AO') est la bissectrice de l'angle $\widehat{HAO}$.

Solution de l'exercice 6



Cet exercice rassemble plusieurs configurations classiques qu'il faut essayer de reconnaître.

Tout d'abord, puisque la perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point O est la médiatrice du segment $[BC]$, le point O' est le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ avec l'arc BC ne contenant pas le point A, il s'agit donc du pôle Sud du point A dans le triangle ABC !

Le point O' appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Pour montrer qu'il appartient à la bissectrice de l'angle HAO, il suffit de montrer que $\widehat{HAB} = \widehat{OAC}$ (qui est également un résultat bien connu sur l'orthocentre).

Le triangle AOC est isocèle au point O donc $\widehat{COA} = 180° - 2\widehat{CAO}$. D'après le théorème de l'angle au centre, on a $\widehat{COA} = 2\widehat{CBA}$. Ainsi, $2\widehat{CBA} = 180° - 2\widehat{CAO}$. Si bien que

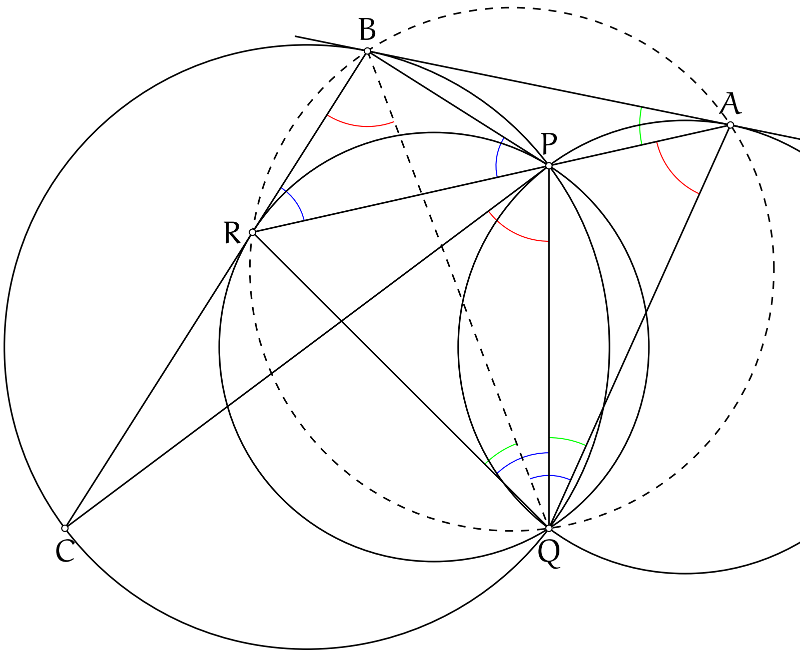
$$\widehat{CAO} = 90° - \widehat{CBA}$$

Or la droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires donc $90° - \widehat{CBA} = \widehat{HAB}$. On retrouve donc bien que $\widehat{CAO} = \widehat{HAB}$, ce qui permet de conclure.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> Exercice globalement très bien réussi par ceux qui l'ont traité. La majorité des élèves n'ont pas remarqué que O' était le pôle Sud comme le corrigé, mais ont juste utilisé que comme $OO'A$ est isocèle en O, $\widehat{OAO'} = \widehat{OO'A}$ et que comme (AH) et (OO') sont perpendiculaires à (BC), par angles alternes-internes $\widehat{OO'A} = \widehat{O'AH}$, donc $\widehat{O'AH} = \widehat{OAO'}$ ce qui donne bien que (AO') est la bissectrice de $\widehat{OAH}$.

Exercice 7. Soit ω_1 et ω_2 deux cercles qui se coupent en deux points qu'on note P et Q. Soit t une tangente commune aux cercles ω_1 et ω_2, de telle sorte que la droite t est tangente au cercle ω_1 au point A et au cercle ω_2 au point B et on suppose que le point P est plus proche de la droite t que le point Q. On note C le second point d'intersection de la tangente en P au cercle ω_1 avec le cercle ω_2. La droite (AP) et la droite (BC) se coupent au point R. Montrer que le cercle circonscrit au triangle PRQ est tangent aux droites (BP) et (BC).

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>



Pour montrer que les droites (BP) et (BC) sont tangentes au cercle circonscrit au triangle PRQ, il suffit de montrer que $\widehat{BPR} = \widehat{PQR} = \widehat{BRP}$, d'après le théorème de l'angle tangentiel.

Commençons par utiliser les hypothèses que nous avons à notre disposition. La droite (PC) est tangente en P au cercle ω_1 donc $\widehat{PAQ} = \widehat{CPQ}$ d'après le théorème de l'angle tangentiel. Les points B, P, Q et C appartiennent tous au cercle ω_2, si bien que par le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{CPQ} = \widehat{CBQ}$. Ainsi

$$\widehat{RAQ} = \widehat{PAQ} = \widehat{CPQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{RBQ}$$

et les points A, Q, R et B sont cocycliques.

Nous n'avons pas encore utilisé l'hypothèse que la droite t est tangente aux deux cercles ω_1 et ω_2 en A et B.
On a en effet, en utilisant que les points A, Q, R et B sont cocycliques :

$$\widehat{PQA} = \widehat{BAP} = \widehat{BAR} = \widehat{BQR}$$

Ainsi

$$\widehat{PQR} = \widehat{BQR} + \widehat{BPQ} = \widehat{PQA} + \widehat{BPQ} = \widehat{BQA} = \widehat{BRA} = \widehat{BRP}$$

Ceci nous donne la première égalité recherchée.

Pour la deuxième égalité, notons que :

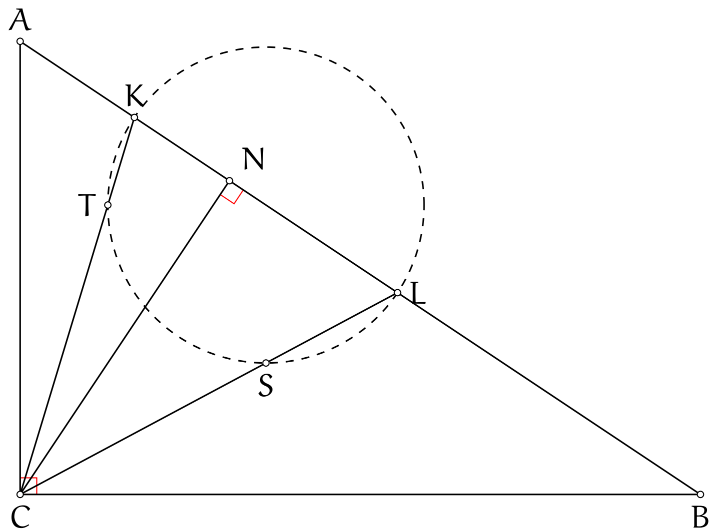
$$\begin{array}{rcll} \widehat{BPR} & = & 180° - \widehat{BPA} & \\ & = & \widehat{PAB} + \widehat{PBA} & \text{car la somme des angles du triangle } ABP \text{ fait } 180° \\ & = & \widehat{PQA} + \widehat{PBA} & \text{car la droite } (BA) \text{ est tangente au cercle } \omega_1 \\ & = & \widehat{PQA} + \widehat{PQB} & \text{car la droite } (BA) \text{ est tangente au cercle } \omega_2 \\ & = & \widehat{BQA} & \\ & = & \widehat{PRQ} & \text{comme on l'a établi précédemment} \end{array}$$

ce qui donne la deuxième égalité et permet de conclure que les droites (BP) et (BC) sont tangentes au cercle circonscrit au triangle PQR.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> Exercice globalement très bien réussi par ceux qui l'ont traité. Il faut penser à ne pas introduire trop d'angles, souvent introduire 2 ou 3 valeurs d'angles est amplement suffisant ! La clé de l'exercice était de remarquer que $ABQR$ était cocyclique : souvent, quand une chasse à l'angle n'aboutit pas, il faut trouver un quadrailatère cocyclique pour déduire des équation inédites entre les angles.

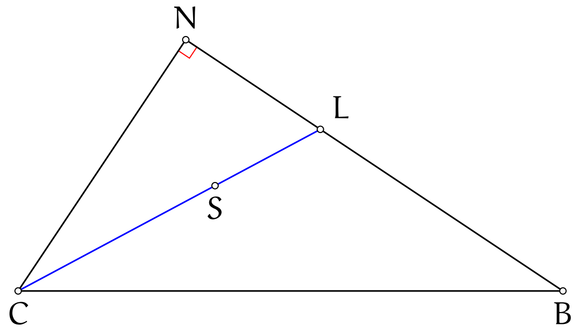
Exercice 8. Soit ABC un triangle rectangle en C. On note N le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC. Les bissectrices des angles $\widehat{NCA}$ et $\widehat{BCN}$ coupent la droite (AB) respectivement en K et L. Soit S et T les centres des cercles inscrits des triangles BCN et NCA. Montrer que les points S, K, T et L sont cocycliques.

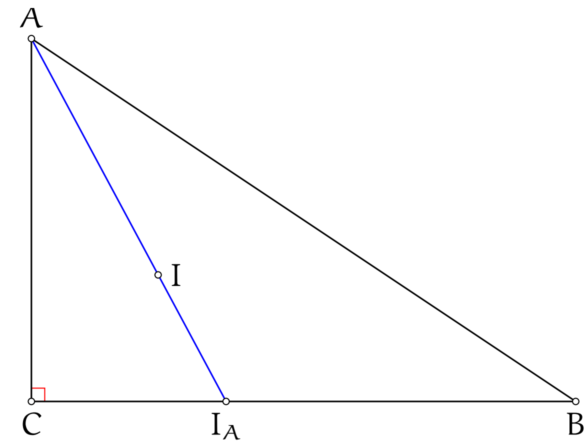
Solution de l'exercice 8



Pour montrer que les quatre points donnés sont cocycliques, nous allons utiliser la puissance d'un point plutôt que le théorème de l'angle inscrit. En effet, il semble difficile de relier par des angles les points S et T ou les points K et L, tandis que les droites (LS) et (KT) se coupe au point C. Il est donc plus commode de vouloir montrer que $CT \cdot CK = CS \cdot CL$, ce qui nous permet de conclure par la réciproque de la puissance d'un point par rapport à un cercle.
Notons que si le triangle est isocèle rectangle, la droite (CN) est un axe de symétrie du triangle et donc $CT = CS$ et $CK = CL$, si bien que l'égalité est vraie. On peut donc supposer par la suite que $AC \neq BC$.

La deuxième observation est qu'on dispose de nombreux triangles semblables. En effet, les triangles CNB, ANC et ACB sont semblables.
Les triangles semblables sont très pratiques pour des calculs de longueur, puisque les calculs de longueur dans un triangle se ramènent aux calculs de longueur dans son triangle semblable.
Pour illustrer ce propos, notons I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC et I_A le point d'intersection de la droite (AI) avec le segment $[AC]$.

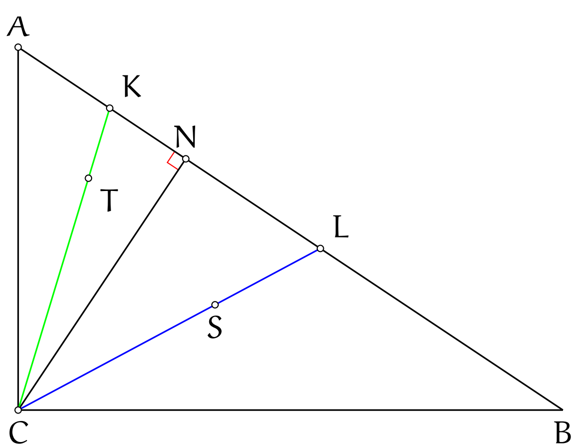


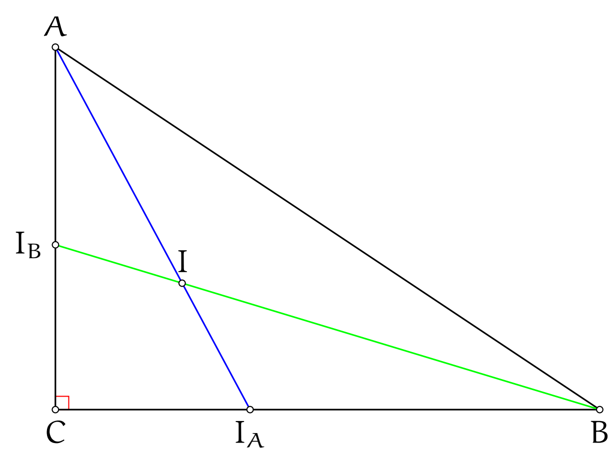


Les triangles CNB et ACB sont semblables et le point S joue le même rôle dans le triangle CNB que le point I dans le triangle ACB. Le point L joue le même rôle dans le triangle CNB que le point I_A dans le triangle ACB. Ainsi, si k est le rapport d'agrandissement entre le triangle ACB et le triangle CNB, alors $CS = kAI$ et $CL = kAI_A$. Or $k = \frac{BC}{AB}$. Ainsi,

$$CL \cdot CS = k^2 AI \cdot AI_A = \frac{BC^2}{AB^2} \cdot AI \cdot AI_A$$

De même, on peut calculer $CK \cdot CT$. On note I_B le point d'intersection des droites (IB) et (AC).





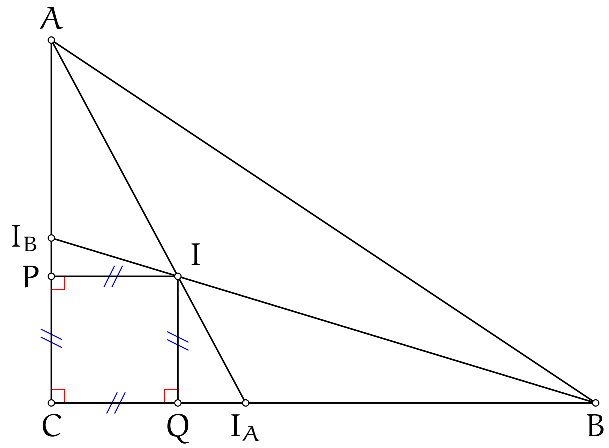
Les triangles CNA et BCA sont semblables et le point T joue le même rôle dans le triangle CNA que le point I dans le triangle BCA. Le point L joue le même rôle dans le triangle CNA que le point I_B dans le triangle BCA. Ainsi, si k' est le rapport d'agrandissement entre le triangle BCA et le triangle CNA, alors $CT = k'BI$ et $CK = k'BI_B$. Or $k' = \frac{AC}{AB}$. Ainsi,

$$CT \cdot CK = k'^2 BI \cdot BI_B = \frac{AC^2}{AB^2} \cdot BI \cdot BI_B$$

Nous nous sommes donc ramenés à effectuer des calculs de longueur dans un unique triangle rectangle, le triangle ABC. Il s'agit donc de montrer

$$AC^2 \cdot BI \cdot BI_B = BC^2 \cdot AI \cdot AI_A$$

Observons la nouvelle figure qui s'offre à nous :



Soient P et Q les points de contact du cercle inscrit au triangle ABC avec les côtés AC et BC. Le quadrilatère $IQCP$ possède trois angles droits et deux côtés adjacentes de même longueur, il s'agit donc d'un carré, dont on note r la longueur commune des côtés.

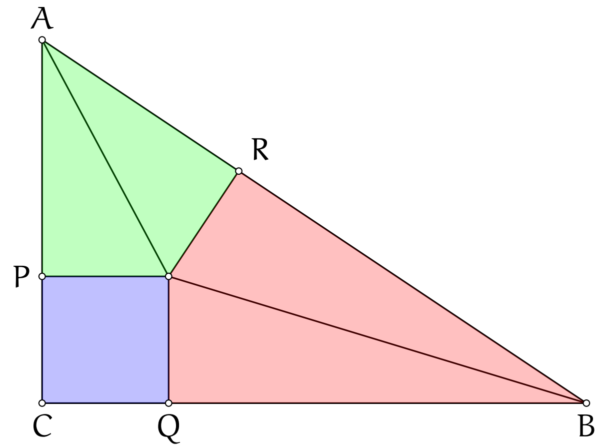
D'après le théorème de Thalès appliqué aux triangles IBQ et I_BBC, $\frac{BI_B}{BI} = \frac{BC}{BQ}$, si bien que $BI \cdot BI_B = BI^2 \cdot \frac{BC}{BQ}$. De même, on obtient $AI \cdot AI_A = AI^2 \cdot \frac{AC}{AP}$. En réinjectant dans l'égalité à démontrer, on trouve qu'il faut démontrer que

$$AC^2 \cdot BI^2 \cdot \frac{BC}{BQ} = BC^2 \cdot AI^2 \cdot \frac{AC}{AP}$$

On réécrit désormais toutes les longueurs uniquement en fonction de AC, BC et r. D'après le théorème de Pythagore, $BI^2 = BQ^2 + IQ^2 = (BC - r)^2 + r^2$ et $AI^2 = (AC - r)^2 + r^2$. L'équation devient, après simplifications :

$$\begin{aligned}
AC(AC - r)(r^2 + (BC - r)^2) &= BC(BC - r)(r^2 + (AC - r)^2) \\
r^2[AC(AC - r) - BC(BC - r)] &= (AC - r)^2 BC(BC - r) - (BC - r)^2 AC(AC - r) \\
r^2[AC^2 - BC^2 - r(AC - BC)] &= (AC - r)(BC - r)[BC(AC - r) - AC(BC - r)] \\
r^2[(AC - BC)(AC + BC - r) &= (AC - r)(BC - r)r(AC - BC)] \\
r(AC + BC - r) &= (AC - r)(BC - r) \\
2r(AC + BC) &= 2r^2 + AC \cdot BC \\
r \cdot AC + r \cdot BC &= r^2 + \tfrac{AC \cdot BC}{2}
\end{aligned}$$

Il s'agit de montrer cette dernière égalité, qui semble bien s'interpréter comme une égalité d'aire.
Observons la figure suivante :



On peut encore réécrire l'égalité comme $r(AC-r)+r(BC-r)=\frac{AC\cdot BC}{2}-r^2$. Alors $r(AC-r)=2\cdot\mathcal{A}_{API}=\mathcal{A}_{APIR}$ et $r(BC-r)=\mathcal{A}_{RIQB}$. Ainsi on a bien

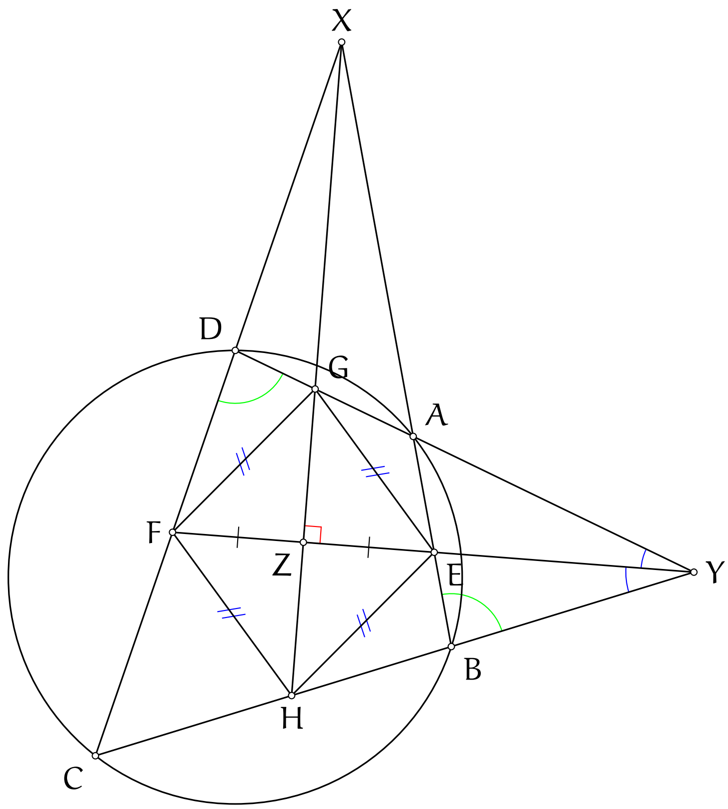
$$\mathcal{A}_{APIR}+\mathcal{A}_{RIQB}=\mathcal{A}_{ABC}-\mathcal{A}_{PICQ}=\frac{AC\cdot BC}{2}-r^2$$

ce qui donne l'égalité désirée et conclut l'exercice.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> De nombreuses preuves variées ont été présentées : attention toutefois à ne pas introduire trop de mesures d'angles, ce qui complique souvent artificiellement le raisonnement (ici un ou deux angles étaient suffisants) et attention à l'ordre dans les triangles semblables : si ABC est semblable à DEF, il n'est pas forcément semblable à EDF. Quelques copies ont confondu le centre du cercle circonscrit (point d'intersection des médiatrices du triangle) et le centre du cercle inscrit (point d'intersection des bissectrices du triangle).

Exercice 9. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique avec des côtés opposés non parallèles. Soit X le point d'intersection des droites (AB) et (CD) et soit Y le point d'intersection des droites (AD) et (BC). La bissectrice de l'angle $\widehat{DYC}$ coupe la droite (AB) au point E et la droite (CD) au point F. La bissectrice de l'angle $\widehat{BXC}$ coupe la droite (BC) au point G et la droite (AD) au point H. Montrer que $GF=EH$.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>



Sur la figure, les droites (XH) et (YF) ont l'air perpendiculaires. Après l'avoir vérifié sur une deuxième figure, on s'empresse de démontrer ce résultat.
Pour cela on introduit Z le point d'intersection des droites (XH) et (YF). On peut par exemple démontrer que $\widehat{GYZ} = 90° - \widehat{ZGY}$.

$$\begin{array}{rcll}
\widehat{GYZ} & = & \frac{1}{2}\widehat{AYB} & \text{car la droite } (YE) \text{ est la bissectrice de l'angle } \widehat{AYB} \\
& = & \frac{1}{2}(180° - \widehat{BAY} - \widehat{ABY}) & \\
& = & 90° - \frac{1}{2}\widehat{BAY} - \frac{1}{2}\widehat{ABY} & \\
& = & 90° - \frac{1}{2}\widehat{DAX} - \frac{1}{2}\widehat{ABY} & \\
& = & 90° - \frac{1}{2}\widehat{DAX} - \frac{1}{2}\widehat{CDA} & \text{car les points } A, B, C \textbf{ et } D \text{ sont cocycliques} \\
& = & 90° - \frac{1}{2}(180° - \widehat{XDA} + \widehat{DAX}) & \\
& = & 90° - \frac{1}{2}(\widehat{DGX} + \widehat{DXG} + \widehat{GAX}) & \\
& = & 90° - \frac{1}{2}(\underbrace{\widehat{GXA} + \widehat{GAX}}_{DGX} + \widehat{DXG}) & \text{car la droite } (DG) \text{ est la bissectrice de l'angle } \widehat{DXA} \\
& = & 90° - \widehat{DGX} & \\
& = & 90° - \widehat{ZGY} &
\end{array}$$

Ceci montre bien que les droites (FE) et (GH) sont perpendiculaires. Le point Z est donc le pied de la hauteur issue du sommet X dans le triangle EFX mais aussi le pied de la bissectrice du sommet X dans ce triangle. Le triangle EXF est donc isocèle au point X. Le point Z est donc le milieu du segment $[EF]$. De même, il s'agit du milieu du segment $[GH]$. Nous avons établi que les diagonales du quadrilatère $GEHF$ se coupent perpendiculairement en leur milieu, ce quadrilatère est donc un losange. En particulier, on trouve bien que $GF = EH$.

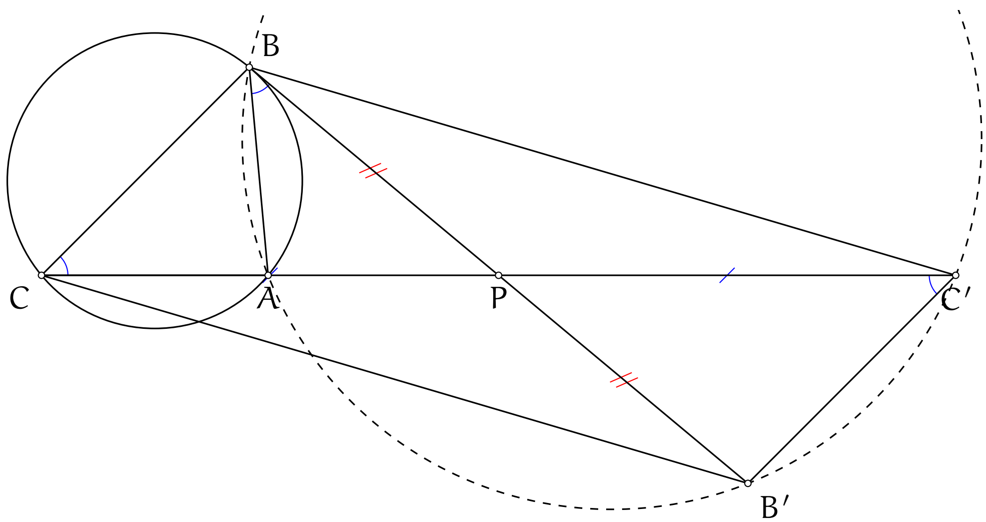
De nombreuses propriétés sont cachées dans cette configuration. Par exemple, les droites (AC), (EG) et (FH) sont parallèles, de même que les droites (BD), (EH) et (FG).

<u>Commentaire des correcteurs :</u> Dernier exercice d'envoi plutôt bien réussi. Il y avait beaucoup de conjectures possibles à faire, cela donne des points et aide dans la mise en place de la chasse aux angles.

Exercices seniors

Exercice 10. Soit ABC un triangle. On note P le point d'intersection de la droite (AC) avec la tangente en B au cercle circonscrit du triangle ABC. On note B' et C' les symétriques respectifs des points B et C par rapport au point P. Montrer que les points B, A, B' et C' sont cocycliques.

Solution de l'exercice 10



Puisque $PC' = PC$ et $PB' = PB$, le point P est le milieu des segments $[CC']$ et $[BB']$, le quadrilatère $CBC'B'$ est donc un parallélogramme. On a donc $\widehat{PCB'} = \widehat{PCB} = \widehat{ACB}$. Or, par le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{ACB} = \widehat{ABP}$. On a donc

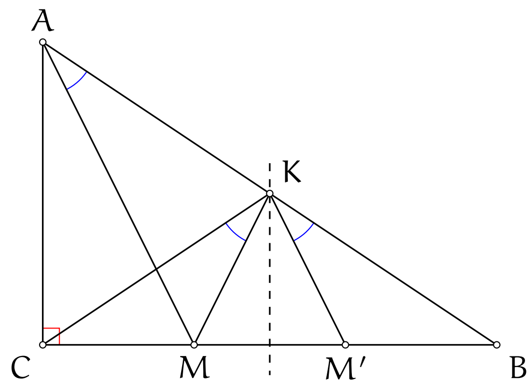
$$\widehat{ABB'} = \widehat{ABP} = \widehat{ACB} = \widehat{AC'B'}$$

et on peut conclure que les points B, A, B' et C' sont cocycliques d'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien résolu.

Exercice 11. Soit ABC un triangle rectangle en C. Soit K le milieu du segment $[AB]$, et soit M un point du segment $[BC]$ tel que $MB = 2MC$. Montrer que $\widehat{MAB} = \widehat{MKC}$.

Solution de l'exercice 11



La relation de longueur sur M nous invite à rajouter un peu de symétrie à la figure et d'introduire le point M' tel que $M'C = 2M'B$.

Puisque le point K est le milieu du segment $[AB]$, il est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Il est donc sur la médiatrice du segment $[BC]$, qui est aussi la médiatrice du segment $[MM']$. Les triangles CMK et $BM'K$ sont donc symétriques par rapport à la médiatrice du segment $[BC]$. On a donc $\widehat{CKM} = \widehat{BKM'}$.

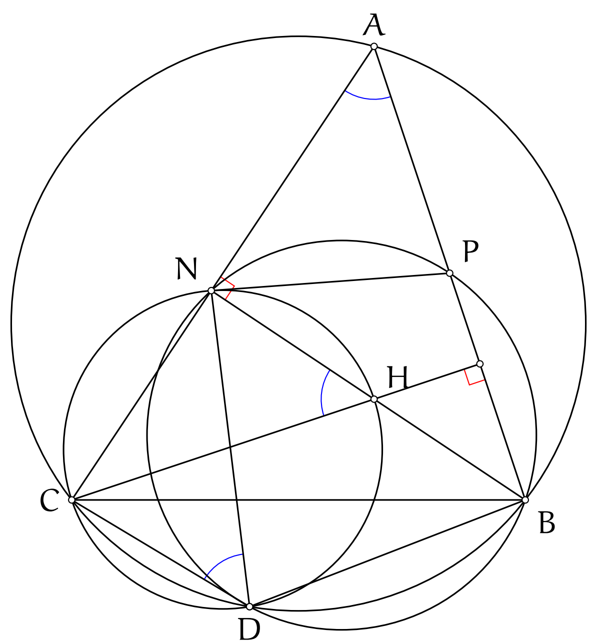
On a $M'B = MC = \frac{1}{3}BC$ donc $MM' = \frac{1}{3}BC = M'B$ donc le point M' est le milieu du segment $[MB]$. D'après le théorème de Thalès, les droites $(M'K)$ et (MA) sont parallèles. On a donc $\widehat{MAB} = \widehat{M'KB}$.

Finalement, $\widehat{MAB} = \widehat{M'KB} = \widehat{MKC}$, ce qui est le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs : La plupart des copies ont prouvé le résultat voulu en montrant que les deux triangles CMK et AMB sont semblables. Néanmoins, d'autres solutions existent et sont plus ou moins élégantes. Cependant plusieurs copies utilisent le fait qu'un rapport de longueurs donne un rapport d'angles ce qui n'est pas juste (sinon on saurait couper un angle en trois avec la règle et le compas).

Exercice 12. Soit ABC un triangle acutangle tel que $|AC| > |BC|$. Soit H l'orthocentre du triangle ABC, N le pied de la hauteur issue du sommet B et P le milieu du segment $[AB]$. Les cercles circonscrits aux triangles ABC et CNH se recoupent au point D. Montrer que les points D, N, P et B sont cocycliques.

Solution de l'exercice 12



On procède à une chasse aux angles, encore faut-il savoir quels angles on souhaite calculer.

Nous n'avons pas forcément de façon de relier les points P et D (ils sont en fait alignés avec le point H, mais nous n'en avons pas besoin pour l'exercice), nous ne pouvons donc calculer un angle qui concerne ces deux points. La seule possibilité est donc de montrer que $\widehat{NDB} = 180° - \widehat{NPB}$.

On peut calculer l'angle $\widehat{NPB}$ à l'aide du théorème de l'angle au centre : en effet, puisque $\widehat{ANB} = 90°$, le milieu P du segment $[AB]$ est le centre du cercle circonscrit au triangle ANB et donc $\widehat{NPB} = 2\widehat{NAB} = 2\widehat{BAC}$.

On calcule désormais l'angle $\widehat{NDB}$, qu'on décompose en deux angles plus faciles à calculer :

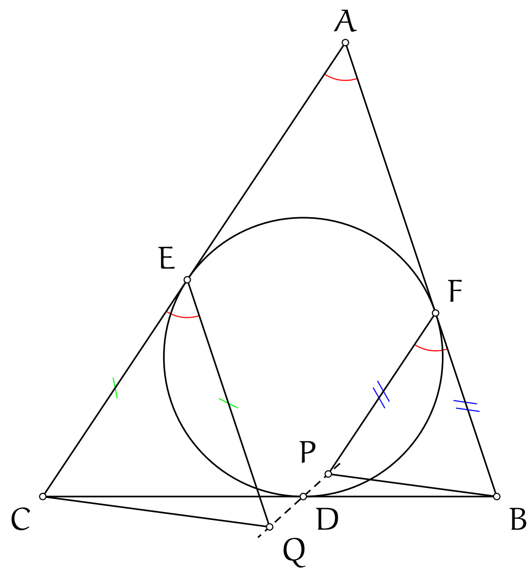
$$\begin{aligned}
\widehat{NDB} &= \widehat{CDB} - \widehat{CDN} && \\
&= 180° - \widehat{CAB} - \widehat{CDN} && \text{car les points } A, B, D \text{ et } C \text{ sont cocycliques} \\
&= 180° - \widehat{CAB} - \widehat{CHN} && \text{car les points } N, H, D \text{ et } C \text{ sont cocycliques} \\
&= 180° - \widehat{CAB} - (90° - \widehat{HCA}) && \text{car les droites } (NH) \text{ et } (AC) \text{ sont perpendiculaires} \\
&= 180° - \widehat{CAB} - (90° - (90° - \widehat{CAB})) && \text{car les droites } (CH) \text{ et } (AB) \text{ sont perpendiculaires} \\
&= 180° - 2\widehat{CAB} &&
\end{aligned}$$

donc on a bien $\widehat{NDB} = 180° - \widehat{NPB}$.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> L'exercice est bien réussi. Une poignée d'élève utilise implicitement que les points D, H et P sont alignés, ce qui leur permet de conclure mais laisse un trou dans leur preuve.

Exercice 13. Soit ABC un triangle et D, E et F les points de contact du cercle inscrit au triangle ABC respectivement avec les côtés BC, CA et AB. Soit P un point tel que $PF = BF$ et $\widehat{BFP} = \widehat{BAC}$ et on suppose que les points P et C sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AB). Soit Q un point tel que $QE = CE$ et $\widehat{BFP} = \widehat{QEC} = \widehat{BAC}$ et on suppose que les points B et Q sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Montrer que les points P, D et Q sont alignés.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u>



Le triangle PFB est isocèle en F et $\widehat{PFB} = \widehat{EAF}$ car les droites (FP) et (AC) sont parallèles. Donc les triangles AEF et PFB sont semblables. De même, on trouve que les triangles QEC, EAF et FPB sont semblables. On déduit que $\widehat{PBF} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{QCE}$
Ainsi, par chasse aux angles,

$$\widehat{PBC} = \widehat{CBA} - \widehat{PBF} = \widehat{CBA} - 90° + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{BCA} + 90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{QCB}$$

donc les droites (PB) et (CQ) sont parallèles. Puisque

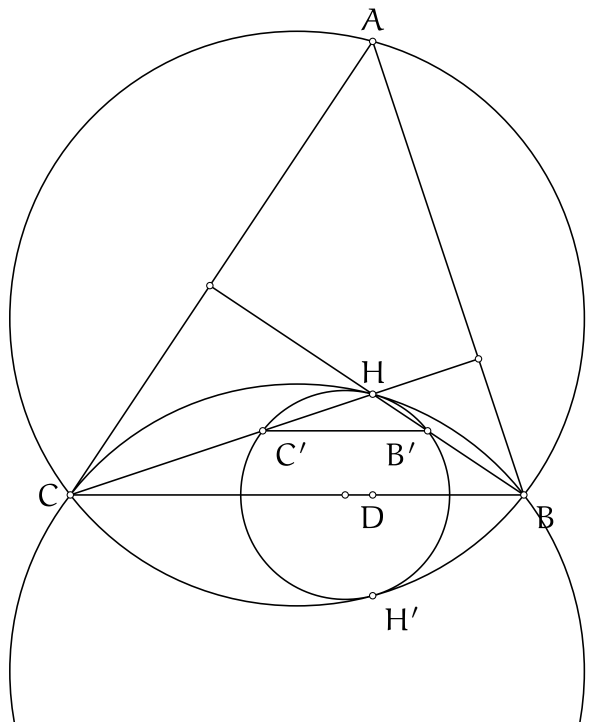
$$\frac{PB}{CQ} = \frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CD}$$

d'après la réciproque du théorème de Thalès, les points P, Q et D sont bien alignés.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> L'exercice est plutôt bien réussi. Quelques élèves ont cependant fait l'erreur de penser que le centre du cercle inscrit au triangle ABC appartient à la droite (AD), ce qui n'est pas vrai dans un triangle quelconque.

Exercice 14. Soit ABC un triangle et soit H son orthocentre. On note B' et C' deux points sur les droites (HB) et (HC) tels que $(B'C')$ soit parallèle à (BC). Soit ω le cercle circonscrit au triangle $B'HC'$. On suppose que le centre du cercle ω appartient au segment $[BC]$. Montrer que le cercle ω est tangent au cercle circonscrit du triangle ABC.

Solution de l'exercice 14



Le point clé ici est d'utiliser la symétrie par rapport au segment $[BC]$.
En effet, puisque le centre du cercle ω est sur le segment $[BC]$, la symétrie d'axe (BC) (que l'on note s), conserve le cercle ω. Regardons ce qu'elle fait d'autre.

On sait que le symétrique H' de l'orthocentre H par rapport à la droite (BC) appartient au cercle circonscrit au triangle ABC. Ainsi, le cercle circonscrit au triangle ABC est envoyé sur le cercle circonscrit au triangle $s(B)s(H')s(C)$, c'est-à-dire au triangle BHC. Ainsi, pour montrer que le cercle ω est tangent au cercle circonscrit au triangle ABC, il suffit de montrer que le cercle $\omega = s(\omega)$ est tangent au cercle circonscrit au triangle BHC.

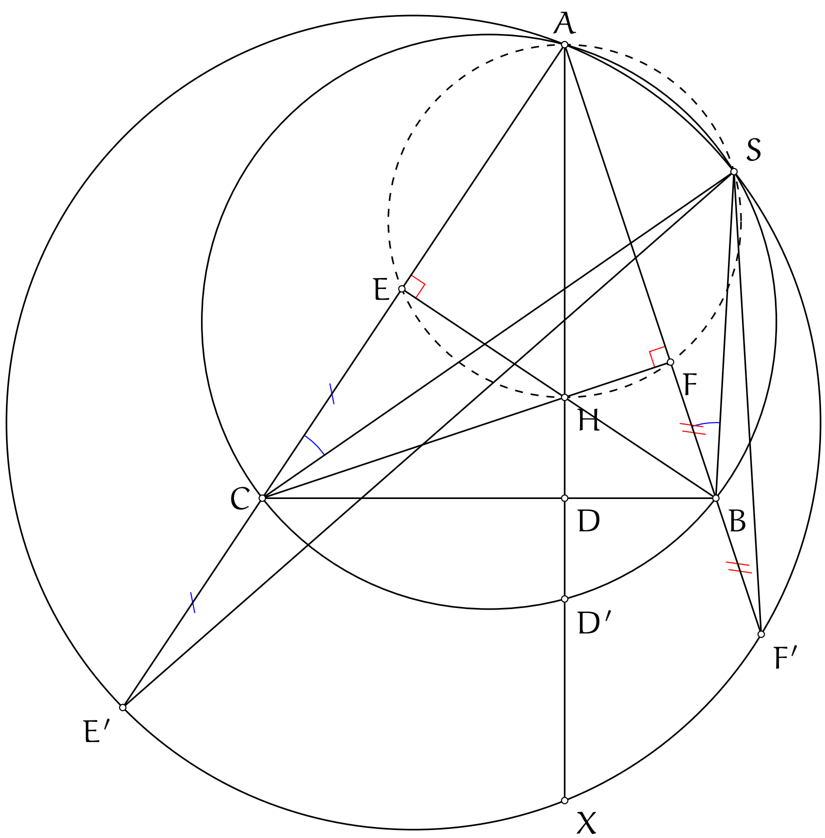
On n'a pas encore utilisé l'hypothèse que la droite $(B'C')$ est parallèle à la droite (BC). Puisque c'est le cas, il existe une homothétie de centre H qui envoie B' sur B et C' sur C. Cette homothétie envoie donc le cercle ω sur le cercle circonscrit au triangle BHC, les deux cercles sont donc tangents au point H, ce qui conclut l'exercice.

On remarque que la symétrie s nous donne que le point de tangence du cercle ω avec le cercle circonscrit au triangle ABC n'est autre que le point H'.

Commentaire des correcteurs : Les élèves qui ont essayé le problème l'ont en général plutôt bien réussi. Beaucoup d'élèves ont remarqué que le symétrique de l'orthocentre par rapport à la droite (BC) est un point commun aux deux cercles, ce qui était un bon début pour résoudre le problème. De là, la plupart des solutions abouties poursuivent soit avec une symétrie, soit avec une chasse aux angles, la première méthode est un peu plus rapide, et les solutions en chasse aux angles ont parfois été un peu laborieuses.

Exercice 15. Soit ABC un triangle. On note H son orthocentre et D, E et F les pieds des hauteurs issues des sommets A, B et C. On note F' le symétrique du point F par rapport au point B et on note E' le symétrique du point E par rapport au point C. On note X le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle $AF'E'$ avec la droite (AD). Montrer que $HX = 4 \times HD$.

Solution de l'exercice 15



On note Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et γ le cercle circonscrit au triangle $AE'F'$.

Tout d'abord, on sait que la droite (AD) contient un point intéressant : le symétrique de l'orthocentre par rapport au point D. On le note D'. Une des propriétés du point D' est qu'il appartient au cercle circonscrit au triangle ABC. L'énoncé devient alors de montrer que $HX = 4HD = 2HD'$ ou encore que $D'X = D'H$. On sait donc qu'introduire le point D' est une bonne idée puisqu'il permet de simplifier l'énoncé.
Une autre propriété commune de l'orthocentre est que les points A, E, H et F sont cocycliques, car $\widehat{AEH} = 90° = \widehat{AFH}$. On note ω le cercle passant par ces quatre points.

On remarque alors le lien avec les autres points : le point E' est sur le cercle γ et vérifie $E'C = CE$, avec C sur le cercle Γ et E sur le cercle ω. Le point F' est sur le cercle γ et vérifie $F'B = BF$, avec B sur le cercle Γ et F sur le cercle ω. Et on nous demande de montrer que $HD' = D'X$ avec X sur le cercle γ, D' sur le cercle Γ et H sur le cercle ω.
En traçant ces trois cercles, on s'aperçoit qu'ils passent tous les trois par deux points. Ceci nous invite à considérer l'exercice en terme de similitude.

Soit S le second point d'intersection des cercles Γ et ω. Admettons dans un premier temps que le point S appartienne au cercle γ. Le point S est donc le centre de la similitude envoyant les points F, H et E sur les points B, D' et C. Il est également le centre de la similitude qui envoie les points B, D' et C sur les points F', X et E'. On a donc les égalités de rapport :

$$\frac{D'X}{BF'} = \frac{SD'}{SB} = \frac{DD'}{BF}$$

dues au fait que les triangles SBF' et $SD'X$ sont semblables et que les triangles SFB et SHD' sont semblables.
Ainsi, $\frac{DD'}{D'X} = \frac{BF}{BF'} = 1$ ce qui donne le résultat désiré.

Montrons à présent que le point S appartient au cercle γ. Pour cela, il suffit de montrer qu'il est le centre de la similitude envoyant les points B et C sur les points F' et E'. Pour cela, il suffit de montrer que les triangles SBF' et SCE' sont semblables, ou encore que $\frac{SC}{SB} = \frac{CE'}{BF'}$ et que $\widehat{E'CS} = \widehat{F'BS}$.
Or le point S est le centre de la similitude envoyant les points E et F sur les points C et B donc les triangles SBF et SCE sont semblables, si bien que

$$\frac{SC}{SB} = \frac{CE}{BF} = \frac{CE'}{BF'}$$

et

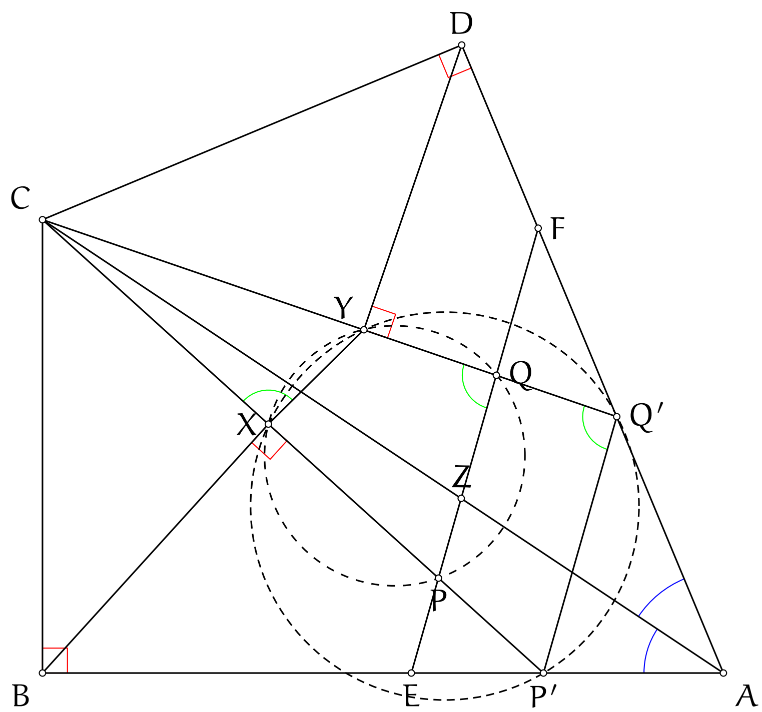
$$\widehat{E'CS} = 180° - \widehat{ECS} = 180° - \widehat{FBS} = \widehat{F'BS}$$

ce qui nous permet de conclure.

Commentaire des correcteurs : Les élèves ont bien identifié dans cet exercice les différentes propriétés de l'orthocentre et montrent une bonne maitrise de la notion de similitude.

Exercice 16. Soit $ABCD$ un quadrilatère vérifiant que $\widehat{CBA} = 90°$, les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires, et $BC = CD$ et $AB = AD$. Soit E et F deux points sur les droites (AB) et (AD). Soit P et Q deux points sur le segment $[EF]$ tels que $\frac{AE}{EP} = \frac{AF}{FQ}$. On note X et Y les projections orthogonales respectives des points B et D sur les droites (CP) et (CQ). Montrer que les points P, Q, Y et X sont cocycliques.

Solution de l'exercice 16



La figure est difficile à construire, on cherche donc des éléments nous permettant de construire une figure exacte (ce qui nous permettra sûrement d'avancer dans l'exercice).
On commence par prolonger les droites (CP) et (CQ). On note P' le point d'intersection des droites (CP) et (AB) et Q' le point d'intersection des droites (CQ) et (AD).

On reconnaît dans le triangle CBP' plusieurs triangles semblables, comme les triangles CBX et $CP'B$. Ceci nous donne la relation $CB^2 = CX \cdot CP'$. De même on obtient $CD^2 = CY \cdot CQ'$. Ainsi :

$$CX \cdot CP' = CB^2 = CD^2 = CY \cdot CQ'$$

Ceci nous donne que les points X, Y, Q' et P' sont cocycliques.
Si on suppose que les points X, Y, P et Q sont également cycliques, on obtient que

$$\widehat{CQP} = 180° - \widehat{PXY} = \widehat{CQ'P'}$$

et les droites (PQ) et $(P'Q')$ sont parallèles.

De cette discussion on déduit une façon de construire une figure exacte et on déduit que, réciproquement, pour montrer que les points X, Y, Q et P sont cocycliques, il suffit de montrer que les droites (PQ) et $(P'Q')$ sont parallèles. Pour cela, on démontre que $\frac{EP'}{P'A} = \frac{AQ'}{Q'D}$.

On rappelle ici le lemme suivant, dit "lemme magique", très utile pour calculer des égalités de rapports :

Si XYZ est un triangle et W est un point du segment [XY], alors

$$\frac{XW}{YW} = \frac{ZX}{ZY} \cdot \frac{\sin \widehat{WZX}}{\sin \widehat{WZY}}$$

Il s'agit en fait d'une généralisation du théorème de la bissectrice.

On a alors

$$\frac{EP'}{P'A} = \frac{CE}{CA} \cdot \frac{\sin \widehat{CEP'}}{\sin \widehat{P'EA}}$$

On introduit alors le point Z, point d'intersection des droites (AC) et (EF), afin de rajouter de la symétrie dans nos calculs :

$$\frac{CE}{CA} \cdot \frac{\sin \widehat{CEP'}}{\sin \widehat{P'EA}} = \frac{CE}{CZ} \cdot \frac{\sin \widehat{CEP}}{\sin \widehat{PCZ}} \cdot \frac{CZ}{CA} = \frac{EP}{PZ} \cdot \frac{CZ}{CA}$$

où on a appliqué le lemme magique au triangle ECZ. De la même manière, on établit que $\frac{FQ'}{Q'A} = \frac{FQ}{QZ} \cdot \frac{CZ}{CA}$. Pour avoir l'égalité désirée, il suffit donc d'avoir $\frac{QZ}{QF} = \frac{PZ}{PE}$.

Nous n'avons pas encore utilisé l'égalité de fraction donnée en hypothèse. Pour faire disparaître PZ et QZ, on rajoute $+1$ des deux côtés de l'égalité. Il nous suffit donc de montrer que

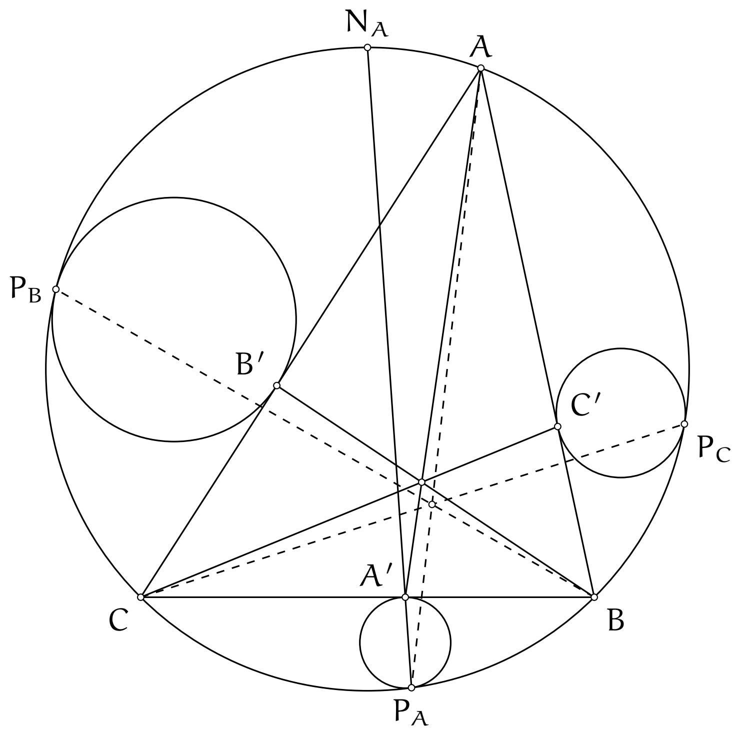
$$\frac{FZ}{QF} = \frac{QZ}{QF} + 1 = \frac{PZ}{PE} + 1 = \frac{EZ}{EP}$$

ou encore $\frac{FZ}{EZ} = \frac{QF}{EP} = \frac{AF}{AE}$. Mais cette égalité correspond précisément au théorème de la bissectrice étant donné que $\widehat{ZAE} = \widehat{ZAF}$. On a donc l'égalité désirée et les droites $(P'Q')$ et (EF) sont bien parallèles, ce qui nous permet de conclure.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> Les élèves ont fourni des preuves très variées pour cet exercice pourtant intimidant. Les correcteurs ont apprécié que certains élèves rendent des traces de leurs avancées même s'ils n'avaient pas de solution complète.

Exercice 17. Soit ABC un triangle et Soit A', B' et C' des points appartenant respectivement aux segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soit concourantes. On note Γ le cercle circonscrit au triangle ABC. Soit ω_A le cercle tangent au cercle Γ et tangent au segment $[BC]$ au point A'. Soit P_A le point de tangence des cercles ω_A et Γ. Soit ω_B le cercle tangent au cercle Γ et tangent au segment $[CA]$ au point B'. Soit P_B le point de tangence des cercles ω_B et Γ. Soit ω_C le cercle tangent au cercle Γ et tangent au segment $[AB]$ au point C'. Soit P_C le point de tangence des cercles ω_C et Γ. Montrer que les droites (AP_A), (BP_B) et (CP_C) sont concourantes.

Solution de l'exercice 17



Tout d'abord, on identifie une configuration familière : les cercles ω_A est tangent intérieurement au cercle Γ au point P_A et la droite (BC) est une corde du cercle Γ tangente au cercle ω_A au point A'. On sait alors que la droite $(A'P_A)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BP_AC}$. Ainsi, si on note N_A le milieu de l'arc BC contenant A du cercle Γ, les points N_A, A' et P_A sont alignés. Rappelons pourquoi :

Considérons l'homothétie h_A de centre P_A envoyant le cercle ω_A sur le cercle Γ. Celle-ci envoie le point A' sur un point N_A du cercle Γ. La droite (BC) est tangente au cercle ω_A au point A', son image par h_A est donc une droite tangente au cercle Γ au point $N_A = h_A(A')$. On sait aussi que l'image de la droite (BC) par h_A est parallèle à la droite (BC). La tangente au cercle Γ au point N_A est donc parallèle à la droite (BC). Ceci implique que le point N_A est le milieu de l'arc BC ne contenant pas P_A. Il s'agit donc du pôle Sud du sommet P_A dans le triangle BP_AC et donc la droite (P_AA') est la bissectrice de l'angle $\widehat{BP_AC}$.

En notant N_A le pôle Nord du point A dans le triangle ABC, nous venons d'établir que les points N, A' et P_A sont alignés. Cette observation permet en particulier de construire le point P_A et donc de construire une figure exacte.

Le fait que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes se traduit, d'après le théorème de Céva, par l'égalité de rapports suivante :

$$1 = \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B}$$

Nous sommes donc invités à considérer des égalités de rapports. Nous avons établi que la droite $(A'P_A)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BP_A C}$, on a donc d'après le théorème de la bissectrice :

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{P_A B}{P_A C}$$

On obtient des égalités similaires pour $\frac{B'C}{B'A}$ et $\frac{C'A}{C'B}$. On déduit que

$$1 = \frac{P_A B}{P_A C} \cdot \frac{P_B C}{P_B A} \cdot \frac{P_C A}{P_C B}$$

Pour conclure, nous allons utiliser le théorème de Céva trigonométrique, qui est plus pratique ici étant donné que les points P_A, P_B et P_C n'appartiennent pas aux côtés du triangle. Il s'agit de montrer que

$$1 = \frac{\sin \widehat{P_A AB}}{\sin \widehat{P_A AC}} \cdot \frac{\sin \widehat{P_B BC}}{\sin \widehat{P_B BA}} \cdot \frac{\sin \widehat{P_C CA}}{\sin \widehat{P_C CB}}$$

Nous allons donc utiliser la loi des sinus. Appliquée aux triangles $P_A AB$ et $P_A AC$, on obtient

$$\frac{P_A B}{P_A A} = \frac{\sin \widehat{P_A AB}}{\sin \widehat{P_A BA}}$$

$$\frac{P_A A}{P_A C} = \frac{\sin \widehat{P_A CA}}{\sin \widehat{P_A AC}}$$

En multipliant ces deux égalités et en utilisant que $\widehat{P_A BA} = 180° - \widehat{P_A CA}$ et donc $\sin \widehat{P_A BA} = \sin \widehat{P_A CA}$, on trouve :

$$\frac{P_A B}{P_A C} = \frac{P_A B}{P_A A} \cdot \frac{P_A A}{P_A C} = \frac{\sin \widehat{P_A AB}}{\sin \widehat{P_A BA}} \cdot \frac{\sin \widehat{P_A CA}}{\sin \widehat{P_A AC}} = \frac{\sin \widehat{P_A AB}}{\sin \widehat{P_A AC}}$$

On obtient des égalités similaires pour les autres rapports de longueur, si bien que

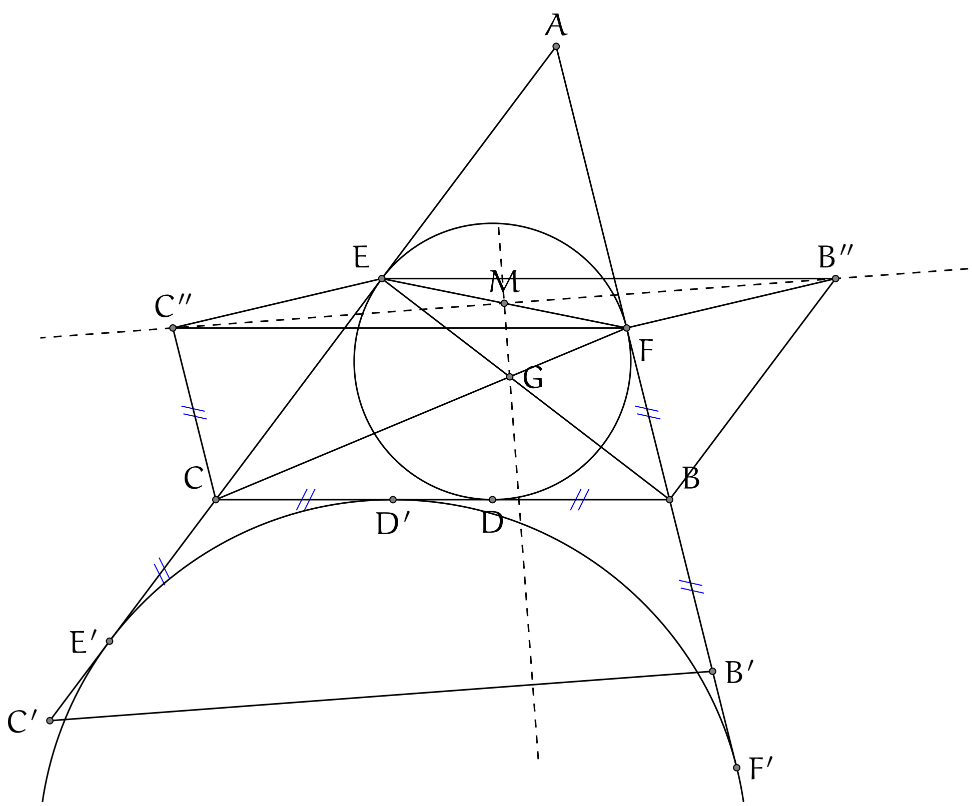
$$\frac{\sin \widehat{P_A AB}}{\sin \widehat{P_A AC}} \cdot \frac{\sin \widehat{P_B BC}}{\sin \widehat{P_B BA}} \cdot \frac{\sin \widehat{P_C CA}}{\sin \widehat{P_C CB}} = \frac{P_A B}{P_A C} \cdot \frac{P_B C}{P_B A} \cdot \frac{P_C A}{P_C B} = 1$$

ce qui nous permet de conclure que les droites (AP_A), (BP_B) et (CP_C) sont concourantes.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> L'exercice a été bien résolu par les élèves ayant rendu une copie. Les diverses méthodes proposées par les élèves permettent de balayer les différents niveaux de lecture que l'on peut faire de l'exercice.

Exercice 18. Soit ABC un triangle et Soit D, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés BC, CA et AB. On note M le milieu du segment [EF]. On note G le point d'intersection des droites (BE) et (CF). Soit B' le symétrique du point F par rapport au point B. Soit C' le symétrique du point E par rapport au point C. Montrer que la droite (MG) est perpendiculaire à la droite $(B'C')$.

<u>*Solution de l'exercice 18*</u>



On note la présence d'un milieu de segment, qui nous encourage à introduire d'autres milieux ou à compléter un parallélogramme. Etant donné qu'on a plusieurs égalités de longueurs, on va plutôt chercher à créer des parallélogrammes.

Pour compléter un parallélogramme concernant le point M, on va d'abord chercher à compléter d'autres parallélogrammes à l'aide des égalités de longueur données par l'énoncé.

On introduit donc le point B'' tel que le quadrilatère $C'CB''B$ est un parallélogramme. Puisque $C'C = CE$ et que les droites (EC) et (BB'') sont parallèles, on obtient en bonus que le quadrilatère $CEB''B$ est un parallélogramme.
On introduit de même le point C'' vérifiant que les quadrilatères $CBFC''$ et $CB'BC''$ sont des parallélogramme.
On déduit que les droites (BE''), (BC) et (FC'') sont parallèles et que $BE'' = BC = FC''$. Le quadrilatère $EB''FC''$ est donc un parallélogramme également, dont les diagonales se coupent au point M, ce qui nous indique que nous sommes sur la bonne voie en introduisant les points B'' et C''.
De plus, le segment [BC] et [B″C′] se coupent en leur milieu, de même que les segments [BC] et [C″B′] (par propriété des parallélogrammes introduits précédemment). Les segments [B″C′] et [B′C″] se coupent donc en leur milieu, le quadrilatère $B''C'B'C''$ est donc un parallélogramme lui aussi et les droites $(B'C')$ et $(B''C'')$ sont parallèles.

On a donc ramené l'énoncé à démontrer que les droites (MG) et $(B''C'')$ sont perpendiculaires. On a déjà établi que $MB'' = MC''$ parce que le quadrilatère $B''FC''E$ est un parallélogramme. Il suffit donc de montrer que $GB'' = GC''$ pour obtenir que la droite (MG) est la médiatrice du segment $[B''C'']$ et conclure l'exercice.

Il y a encore de nombreuses égalités de longueurs que l'on n'a pas exploitées, sans compter que la définition du point G. Une idée pertinente pour montrer une égalité de longueur est de montrer une égalité de puissance de point. L'astuce finale est de penser au fait que des points peuvent être considérés comme des cercles de rayon nul.
On va donc chercher à montrer que G est sur l'axe radical des cercles de centre B'' et C'' et de rayon nul.

Pour cela, on utilise le fait que le point G appartient à la droite (BE) et à la droite (CF). On interprète cela comme le fait que les deux droites sont elles-mêmes des axes radicaux, puis on utilise le fait que les axes radicaux de trois cercles sont concourants.

On introduit pour cela les points D', E' et F', points de contact respectifs du cercle $A-$exinscrit (noté ω_A et des droites (BC), (CA) et (AB). On a alors que $BB'' = CE = CD = BD'$ donc le point B a la même puissance par rapport au cercle ω_A et au cercle-point B''. De même, $EE' = EC + CE' = CD + CD' = CD + BD = BC = EB''$ donc le point E a la même puissance par rapport au cercle ω_A et au cercle-point B''. La droite (EB) est donc l'axe radical de ces deux cercles.
De même, on établit que la droite (CF) est l'axe radical du cercle ω_A et du cercle-point C''. Le point G est donc le centre radical du cercle ω_A et des cercles-points B'' et C''. En particulier, $GB'' = GC''$, ce qui conclut l'exercice.

Solution alternative n°1 On présente une deuxième solution à l'aide des coordonnées barycentriques.

On choisit DEF comme triangle de référence, c'est-à-dire qu'on attribue aux points D, E et F les coordonnées respectives $(1,0,0), (0,1,0)$ et $(0,0,1)$. On note également $d = EF, e = DF$ et $f = DE$. On pose alors

$$\begin{aligned} S_D &= \tfrac{e^2+f^2-d^2}{2} \\ S_E &= \tfrac{f^2+d^2-e^2}{2} \\ S_F &= \tfrac{d^2+e^2-f^2}{2} \end{aligned}$$

Le point M a pour coordonnées $(0,1,1)$.
Le point G correspond au point de Lemoine du triangle DEF, c'est-à-dire le point d'intersection des symédianes du triangle DEF. Ainsi, ses coordonnées sont (d^2, e^2, f^2).
Le point B appartient à la tangente en D au cercle circonscrit au triangle ABC, ses coordonnées (x, y, z) vérifient donc $e^2z + f^2y = 0$. De même, puisqu'il appartient à la tangente en F au cercle circonscrit au triangle DEF, ses coordonnées vérifient également $d^2y + e^2x = 0$, si bien que les coordonnées du point B sont $(d^2, -e^2, f^2)$. De même, les coordonnées du point C sont $(d^2, e^2, -f^2)$.

On calcule à présent les coordonnées des points B' et C'.
Puisque $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BB'}$, les coordonnées (x, y, z) du point B' telles que $x + y + z = 1$ vérifient :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{d^2}{2S_E} \\ -\frac{e^2}{2S_E} \\ \frac{f^2}{2S_E} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{S_E} \\ -\frac{e^2}{S_E} \\ \frac{S_D}{S_E} \end{pmatrix}$$

et les coordonnées du point B' sont

$$\left(\frac{d^2}{S_E}, -\frac{e^2}{S_E}, \frac{S_D}{S_E}\right)$$

Ce qui nous donne les coordonnées du point B'. De même, les coordonnées du point C' sont

$$\left(\frac{d^2}{S_F}, \frac{S_D}{S_F}, -\frac{f^2}{S_F}\right)$$

On calcule à présent les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ (c'est à cette fin qu'on a gardé des coordonnées de somme 1 pour les points B' et C').
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MG}$ sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{d^2+e^2+f^2}\begin{pmatrix} d^2 \\ e^2 \\ f^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2(d^2+e^2+f^2)}\begin{pmatrix} -d^2 \\ S_E \\ S_F \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{B'C'}$ sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{S_F} - \frac{d^2}{S_E} \\ \frac{S_D}{S_F} + \frac{e^2}{S_E} \\ -\frac{f^2}{S_F} - \frac{S_D}{S_E} \end{pmatrix} = \frac{1}{S_E S_F}\begin{pmatrix} d^2(f^2-e^2) \\ e^2 S_F + S_D S_E \\ -(f^2 S_E + S_D S_F) \end{pmatrix}$$

Pour montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont orthogonaux, il suffit de montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(-d^2, S_E, S_F)$ et $(d^2(f^2-e^2), e^2S_F + S_DS_E, -(f^2S_E + S_DS_F))$ sont orthogonaux. Pour cela, il faut montrer que

$$0 = d^2(y_u z_v + y_v z_u) + e^2(z_u x_v + z_v x_u) + f^2(x_u y_v + x_v y_u)$$

Or

$$\begin{aligned}
& d^2(y_u z_v + y_v z_u) + e^2(z_u x_v + z_v x_u) + f^2(x_u y_v + x_v y_u) \\
= \ & d^2(-S_E(f^2S_E + S_DS_F) + S_F(e^2S_F + S_DS_E)) \\
& + e^2(S_F d^2(f^2-e^2) + d^2(f^2S_E + S_DS_F)) \\
& + f^2(-d^2(e^2S_F + S_DS_E) + S_E d^2(f^2-e^2)) \\
= \ & d^2\left(e^2S_F^2 - f^2S_E^2 - e^4S_F + e^2f^2S_F + e^2f^2S_E + e^2S_DS_F - f^2S_DS_E - e^2f^2S_F - e^2f^2S_E + f^4S_E\right) \\
= \ & d^2[e^2S_F \underbrace{(S_F - e^2 + S_D)}_{=0} + f^2S_E \underbrace{(-S_E - S_D + f^2)}_{=0}] \\
= \ & 0
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat désiré.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> L'exerice a été bien résolu par les élèves l'ayant cherché. Une large majorité des élèves fait le choix de traiter l'exercice par une méthode analytique qui est parfaitement maitrisée !