PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : ALGÈBRE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 25 DÉCEMBRE 2020

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2006 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.
`contact-pofm@animath.fr`

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que $x^3 + \frac{1}{x} \geqslant 2x$ et trouver les cas d'égalité.

Exercice 2. Montrer que pour tous réels $a, b, c > 0$, on a

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geqslant \frac{9}{a+b+c}.$$

Trouver les cas d'égalité.

Exercice 3. Soit a, b, c, d des réels positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Montrer qu'il existe deux réels parmi a, b, c, d dont la somme vaut au plus 2.

Exercice 4. Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = 1$. Montrer que

$$\frac{a}{b^2+1} - \frac{b}{a^2+1} = a - b.$$

Exercice 5. Soit a, b, c trois réels strictement positifs, montrer que $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geqslant \frac{4a}{a+b}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 6. Déterminer toutes les suites $(a_n)_{n \geqslant 1}$ de réels telles que $a_i = a_{i+2020}$ pour tout entier $i \geqslant 1$, et telles que

$$a_j + 2a_{j+2} \geqslant a_{j+1}^2 + a_{j+1} + 1$$

pour tout entier $j \geqslant 1$.

Exercice 7. Soient a, b, c trois réels non nuls tels que

$$\begin{aligned} a^2 + b + c &= \frac{1}{a} \\ b^2 + c + a &= \frac{1}{b} \\ c^2 + a + b &= \frac{1}{c} \end{aligned}$$

Montrer qu'on a $a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$.

Exercice 8. Déterminer s'il existe deux réels S et P vérifiant la propriété suivante :

> Il existe six réels distincts que l'on peut placer sur un cercle de sorte que, pour toute suite de trois réels consécutifs sur le cercle, soit leur somme vaut S soit leur produit vaut P.

Exercice 9. Montrer que, si a, b, c sont des réels strictement positifs tels que $a + b + c = 3$, alors

$$\frac{abc + a^2c}{a^6 + b^2 + 4ac + 2} + \frac{abc + b^2a}{b^6 + c^2 + 4ab + 2} + \frac{abc + c^2b}{c^6 + a^2 + 4bc + 2} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Exercices Seniors

Exercice 10. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y,

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Exercice 11. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$U_n = \frac{2n + 1 - 2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

Calculer $(U_0 + \cdots + U_{41})^2$.

Exercice 12. Soit f la fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2020x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$. Soit n un entier strictement positif. On note f^n la composée n-ième de f, c'est-à-dire la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\cdots(f}_{n \text{ fois}}(x))\cdots))$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel x tel que $f^n(x) = 0$.

Exercice 13. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y,

$$f(x^2 + f(y)) = y + xf(x).$$

Exercice 14. Déterminer s'il existe deux réels S et P vérifiant la propriété suivante :

> Il existe six réels distincts que l'on peut placer sur un cercle de sorte que, pour toute suite de trois réels consécutifs sur le cercle, soit leur somme vaut S soit leur produit vaut P.

Exercice 15. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Trouver tous les n-uplets de réels strictement positifs $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(x_n + \frac{1}{x_1}\right) = \left(x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}\right)\left(x_2^2 + \frac{1}{x_3^2}\right)\ldots\left(x_n^2 + \frac{1}{x_1^2}\right).$$

Exercice 16. Benoît et Théo jouent au jeu suivant : au départ, le polynôme X^{2020} est écrit au tableau. Chacun leur tour, Benoît et Théo ajoutent un monôme de la forme X^k avec $0 \leqslant k \leqslant 2020$ au polynôme précédent. A la fin du tour de Théo, Benoît gagne si, en notant P le polynôme écrit, il existe x tel que $P(x) < 0$; sinon, le jeu continue. Si Benoît commence, montrer que Théo peut s'assurer de ne pas perdre.

Exercice 17. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous réels a, b :

$$f(a + 2f(a)f(b)) = f(a) + 2af(b).$$

Exercice 18. On dit qu'un ensemble A de polynômes à coefficients réels est magnifique si, lorsque P et Q sont deux éléments distincts de A, il existe des entiers positifs $a_1 > \cdots > a_{2020}$ tels que

$$PQ = \sum_{i=1}^{2020} iX^{a_i}.$$

Quel est le cardinal maximal d'un ensemble magnifique ?