Angles et droites du triangle

Niveau collège - débutants

13 octobre 2020

Quelques éléments de théorie

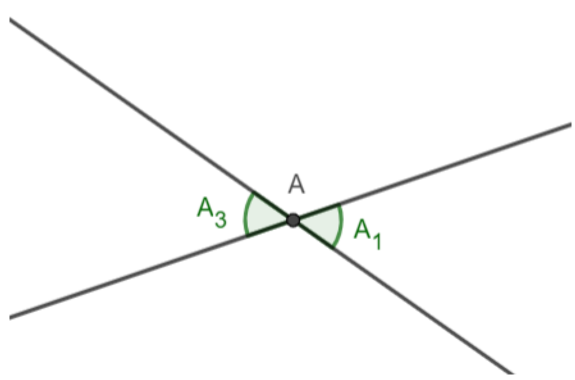

FIGURE 1 – Des angles opposés par le sommet ont la même amplitude :$\widehat{A_1} = \widehat{A_3}$

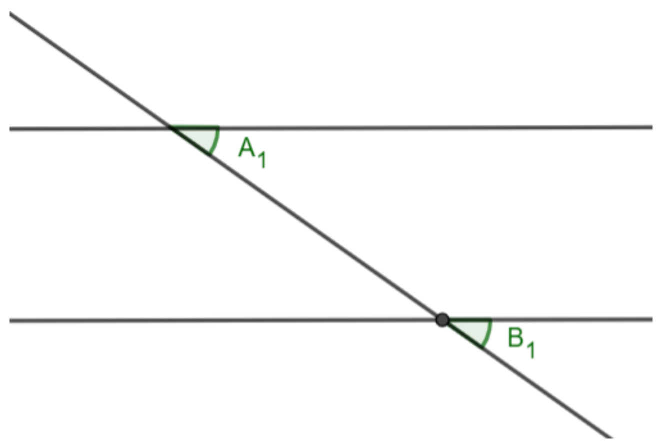

FIGURE 2 – Lorsqu'une droite intersecte deux droites parallèles, elle forme des angles correspondants. Des angles correspondants ont la même amplitude : $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$

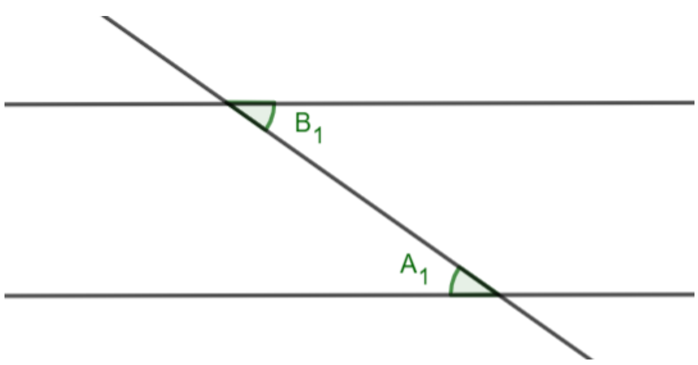

FIGURE 3 – Des angles alternes-internes ont la même amplitude : $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$

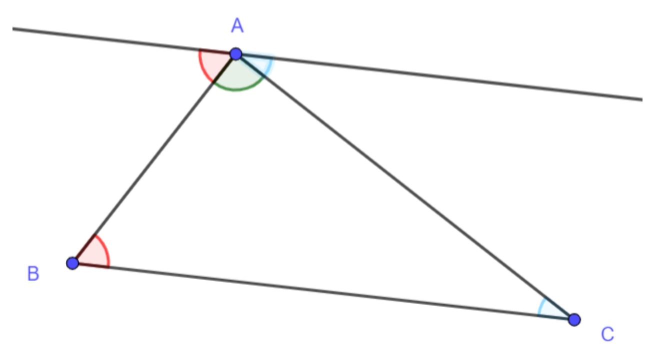

FIGURE 4 – La somme des angles d'un triangle fait 180°

L'inégalité triangulaire : pour tout triangle ABC, les inégalités suivantes sont toujours vrai : $AB \leq AC + CB$, $AC \leq AB + CB$ et $BC \leq BA + AC$.

Problèmes

P 1. Soit le triangle ABC. Si $\widehat{ABC} = 60°$ et $\widehat{BAC} = 30°$, quelle est la valeur de $\widehat{BCA}$?

P 2. Soit le triangle ABC. Si le triangle est isocèle et $\widehat{ABC} = 35°$, quelle est la valeur de $\widehat{BCA}$?

P 3. Soit l'angle $\widehat{xOy}$, soit $[OP)$ sa bissectrice intérieure et un point P sur cette bissectrice. Démontrer que P se situe à la même distance par rapport aux deux cotés de l'angle.

P 4. Démontrer que dans deux triangles égaux ABC et $A'B'C'$:

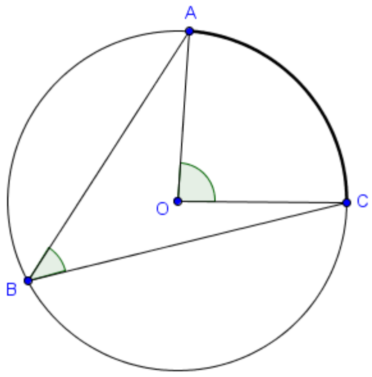

FIGURE 5 – L'angle inscrit au cercle $\widehat{ABC}$ a comme amplitude la moitie de l'angle au centre $\widehat{AOC}$: $\widehat{AOC} = 2 * \widehat{ABC}$

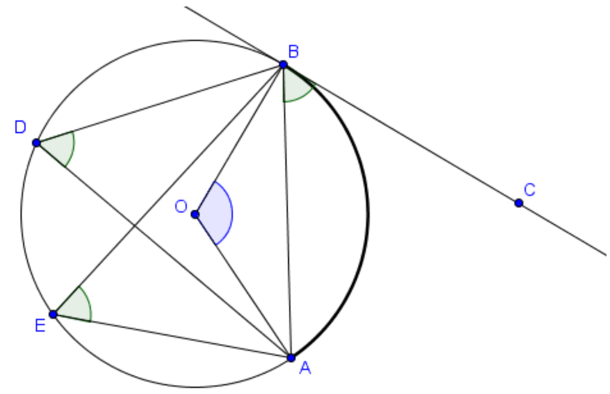

FIGURE 6 – Si BC est tangente au cercle de centre O, alors : $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = \widehat{ABC} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$

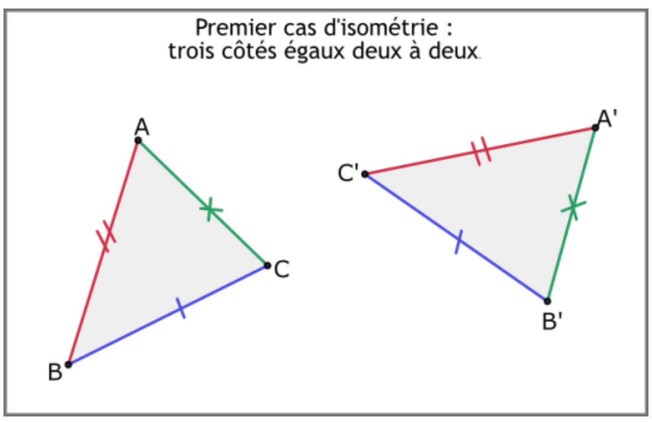

FIGURE 7 – Triangles isométriques - le cas CCC

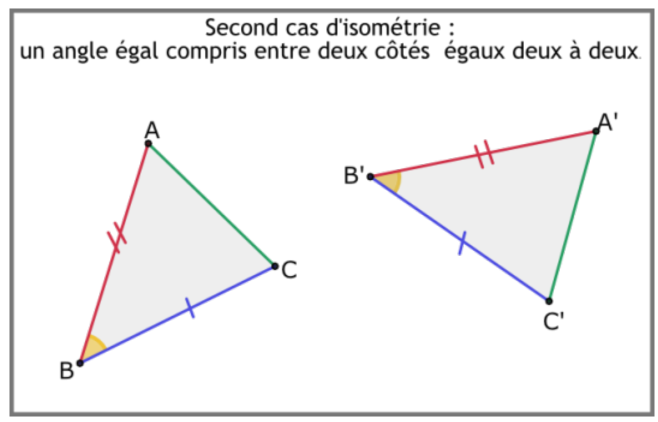

FIGURE 8 – Triangles isométriques - le cas CAC

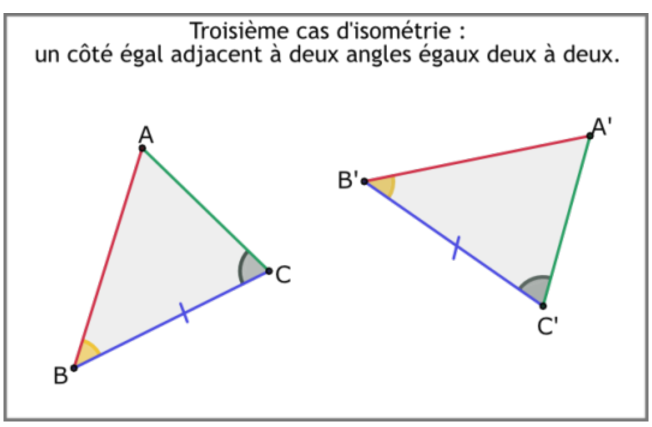

FIGURE 9 – Triangles isométriques - le cas ACA

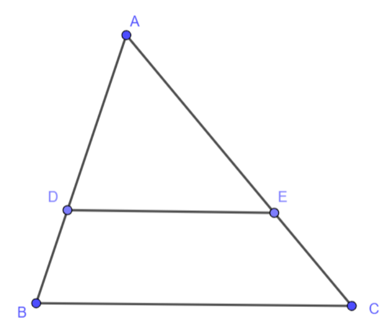

FIGURE 10 – Théorème de Thalès : si $DE \parallel BC$ alors $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$. Nous avons également la réciproque : si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ alors $DE \parallel BC$.

a) les médianes $[AM]$ et $[A'M']$ sont égales ;

b) les bissectrices intérieurs $[AD]$ et $[A'D']$ sont égales ;

c) les hauteurs $[AP]$ et $[A'P']$ sont égales ;

P 5. Dans le triangle ABC nous construisons la médiane $[AM]$. Soit $N \in (BC)$ ainsi que $CN = 2 * AN$ et soit $\{P\} = AM \cap BN$. Démontrez que $[AP] \equiv [PM]$.

P 6. Dans le triangle ABC nous construisons les médianes $[AM]$ et $[BN]$. Démontrez que $MN = \frac{AB}{2}$.

P 7. Sur une droite d chaque point a une couleur bleue ou rouge. Démontrez qu'ils existent trois points A, B, C sur la droite d, coloriés avec la même couleur, ainsi que B est le milieu du segment $[AC]$.

P 8. Dans un cercle de centre O se trouvent 13 points distincts. Démontrez qu'ils existent au moins deux points A, B parmi les 13 ainsi que $\widehat{AOB} \leq 30°$.

P 9. Nous considérons 7 segments de longueur entre 200 et 2019. Démontrez que parmi les 7 segments il y en a trois qui peuvent former un triangle.

P 10. Soit un triangle ABC, rectangle en A. Le point D est le milieu du segment $[BC]$, E et F sont les symétriques de D par rapport à (AB) et (AC). Démontrez que les points E, A, F sont colinéaires.

P 11. Les angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ ont les amplitudes de 108°, respectivement 68°. Les demi-droites $[OM), [ON)$ sont les bissectrices intérieures des $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$. La demi-droite $[OP)$ est la bissectrice intérieure de $\widehat{MON}$. La demi-droite $[OD)$ est l'opposée de la demi-droite $[OP)$, et le point $E \in \widehat{AOD}$ a la propriété que $\widehat{DOE} = 10°$. Démontrez que B, O, E sont colinéaires.

P 12. L'angle $\widehat{xOy}$ a l'amplitude de 50°. Soit P un point à l'intérieur du triangle, et A, B les symétriques de P par rapport à (Ox) et (Oy). Démontrez que :

- OAB est un triangle isocèle, et
- calculez l'amplitude de $\widehat{AOB}$.

P 13. Dans le triangle isocèle ABC, avec $(AB) \equiv (AC)$, l'un des angles a l'amplitude de 40°. Soit $D \in AB$ ainsi que $CD \perp AC$. A l'extérieur du triangle ACD nous construisons l'angle $\widehat{CDE} = 20°$, avec $E \in (AC$. Est-ce que $BC \parallel DE$?

P 14. Soit le triangle ABC avec $\widehat{CAB} = 90°$. Démontrez que $BC = 2 * AC$ si et seulement si $\widehat{ABC} = 30°$.

P 15. Soit le triangle ABC avec la médiane $[AM]$ $(M \in [BC])$. Démontrez que $AM = \frac{BC}{2}$ si et seulement si $\widehat{CAB} = 90°$.

P 16. Soit le triangle ABC avec la médiane $[AM]$ $(M \in [BC])$. Démontrez que $AM < \frac{AC+AB}{2}$.

P 17. Soit l'angle $\widehat{AOB} < 90°$. Soit les demi-droites perpendiculaires $[OC)$ et $[OD)$, avec $C \in \widehat{AOD}$. Démontrez que l'angle formé par les bissectrices intérieures des $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOC}$ a une amplitude constante.

P 18. On considère une droite xy et deux points A et B situés de part et d'autre de la droite xy. Trouvez sur xy un point M tel que la distance $AM + MB$ soit la plus petite possible.

Exercice 19. * Soit l'angle $\widehat{AOB}$. et un point $C \in \widehat{AOB}$. Déterminez $M \in [OA)$ et $N \in [OB)$ ainsi que $CM + CN + MN$ soit minimal.

Exercice 20. ** Soit le triangle ABC avec la médiane $[AM]$ $(M \in [BC])$. Si $\widehat{ACB} = 15°$ et $\widehat{AMB} = 45°$, déterminez l'amplitude de $\widehat{BAC}$. (*Olympiade Nationale 2010, Roumanie*)

Exercice 21. ** Soit le triangle isocèle ABC de base $[BC]$, avec $\widehat{ABC} > 30°$. A l'intérieur du triangle ABC nous considérons le point M ainsi que $\widehat{MBC} = 30°$ et $\widehat{MAB} = \frac{3}{4} * \widehat{BAC}$. Déterminez l'amplitude de $\widehat{AMC}$. (*Olympiade Nationale 2011, Roumanie*)

Exercice 22. ** Soit le triangle équilatéral ABC et $X \in [CA)$ avec la propriété $A \in [CX]$. Sur la bissectrice de $\widehat{BAX}$ nous considérons le point D et sur la demi-droite $[AB)$ nous considérons le point E ayant la propriété $AE + EC = DA + AC$. Démontrez que la demi-droite $[CD)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACE}$. (*Olympiade Nationale 2012, Roumanie*)

Exercice 23. ** Soit le triangle ABC avec $AB = AC$ et $\widehat{BAC} = 90°$. Soit $D \in [BC]$ ayant la propriété $AD \perp BC$. La bissectrice intérieure de $\widehat{ABC}$ va intersecter la droite (AD) dans le point I. Démontrez que $BA + AI = BC$. (*Olympiade Nationale 2013, Roumanie*)

Exercice 24. * Soit le triangle ABC isocèle $(AB = AC)$ et nous savons que l'angle formé par les deux bissectrices intérieures des deux angles égaux $(\widehat{B}, \widehat{C})$ est cinq fois plus grand que l'angle $\widehat{A}$. Calculez les amplitudes des trois angles $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$.

Exercice 25. * Soit le triangle ABC et les hauteurs $[BB']$ et $[CC']$, avec $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$. Soit M le milieu de $[BC]$. Démontrez que :

- $[B'M] \equiv [C'M]$,
- si $AM \perp B'C'$ alors le triangle ABC est isocèle.

Exercice 26. * A l'extérieur du triangle ABC nous construisons les tringles droits isocèles ABD et ACE, avec $\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90°$. Démontrez que le triangle MDE est droit isocèle, où M est le milieu de $[BC]$.