PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 6 MAI 2020

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2005 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2004 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n'est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`https://sites.google.com/view/pofm-depotdescopies/accueil`

Exercices Junior

Exercice 1. Soit x et y deux nombres réels. On pose

$$M = \max\{xy+1, xy-x-y+3, -2xy+x+y+2\}.$$

Démontrer que $M \geqslant 2$, et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 2. Dans le train, alors qu'elles rentrent de **EGMOnd** an Zee, Clara et Edwige jouent au jeu suivant. Initialement, l'entier $n = 1 \times 2 \times \cdots \times 20$ est écrit sur une feuille de papier. Puis, chacune à son tour, et en commençant par Clara, les joueuses remplacent l'entier n par un des nombres $kn/10$, où k est un entier compris entre 1 et 9 inclus. La première joueuse à écrire un nombre qui n'est pas entier perd, et son adversaire gagne.

Clara et Edwige sont deux joueuses redoutables, et jouent donc de manière optimale. Laquelle des deux va-t-elle gagner ?

Exercice 3. Déterminer tous les entiers naturels x, y et z tels que

$$45^x - 6^y = 2019^z.$$

Exercice 4. Soit ABC un triangle et Γ un cercle passant par A. On suppose que Γ recoupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ en deux points, que l'on appelle respectivement D et E, et qu'il coupe le segment $[BC]$ en deux points, que l'on appelle F et G, de sorte que F se trouve entre B et G. Soit T le point d'intersection entre la tangente en F au cercle circonscrit à BDF et la tangente en G au cercle circonscrit à CEG.

Démontrer que, si les points A et T sont distincts, alors (AT) et (BC) sont parallèles.

Exercices Senior

Exercice 5. Soit ABC un triangle et Γ un cercle passant par A. On suppose que Γ recoupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ en deux points, que l'on appelle respectivement D et E, et qu'il coupe le segment $[BC]$ en deux points, que l'on appelle F et G, de sorte que F se trouve entre B et G. Soit T le point d'intersection entre la tangente en F au cercle circonscrit à BDF et la tangente en G au cercle circonscrit à CEG.

Démontrer que, si les points A et T sont distincts, alors (AT) et (BC) sont parallèles.

Exercice 6. Soit S un ensemble d'entiers relatifs. On dit que S est *beau* s'il contient tous les entiers de la forme $2^a - 2^b$, où a et b sont des entiers naturels **non nuls**. On dit également que S est *fort* si, pour tout polynôme $P(X)$ non constant et à coefficients dans S, les racines entières de $P(X)$ appartiennent également à S.

Trouver tous les ensembles qui sont à la fois beaux et forts.

Exercice 7. Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est *russe* si l'égalité

$$f(f(x+y)+y) = f(f(x)+y)$$

est vérifiée pour tous les entiers x et y. On dit également qu'un entier v est f-*rare* si l'ensemble des entiers x tels que $f(x) = v$ est un ensemble fini et non vide.

a) Démontrer qu'il existe une fonction f russe pour laquelle il existe un entier f-rare.

b) Démontrer que, pour toute fonction f russe, il existe au plus un entier f-rare.