PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 19 ET DU 20 FÉVRIER 2020

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Merci de respecter **impérativement** la numérotation des exercices.
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2005 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2004 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- Le **groupe EGMO** est constitué des élèves nées en 2004 ou avant et éligibles à l'EGMO.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 8 à 10.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n'est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies

- soit par voie postale, à l'adresse suivante :

  Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques
  11-13 rue Pierre et Marie Curie
  75005 Paris

- soit par voie électronique, à l'adresse suivante : `copies.ofm@gmail.com`

Exercices Junior

Exercice 1. Soit A, B, E et P quatre points deux à deux distincts, tels que P soit le milieu du segment $[AE]$ et que B appartienne au segment $[AP]$. Soit ω_1 et ω_2 deux cercles passant par A et B. On note t_1 et t_2 les tangentes respectives à ω_1 et à ω_2 passant par A. Soit C le point d'intersection, autre que A, entre t_2 et ω_1, et soit Q le point d'intersection, autre que C, entre t_2 et le cercle circonscrit à BCE. De même, soit D le point d'intersection, autre que A, entre t_1 et ω_2, et soit R le point d'intersection, autre que D, entre t_1 et le cercle circonscrit à BDE.

Démontrer que les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 2.

1. Trouver le plus petit entier $k \geqslant 1$ ayant la propriété suivante : pour tous les entiers naturels non nuls x et y tels que x divise y^2 et y divise x^2, le produit xy divise $(x+y)^k$.
2. Trouver le plus petit entier $\ell \geqslant 1$ ayant la propriété suivante : pour tous les entiers naturels non nuls x, y et z tels que x divise y^2, y divise z^2 et z divise x^2, le produit xyz divise $(x+y+z)^\ell$.

Exercice 3. Une classe compte n élèves. Quelque soit la manière de choisir deux élèves, il y en a au moins un qui a déjà déjeuné chez l'autre. On dispose en outre de l'information suivante : pour chaque élève **E**, et parmi les élèves chez qui **E** a déjeuné, la moitié exactement a déjeuné chez **E**.

Trouver toutes les valeurs possibles de n.

Exercice 4. Soit a, b et c des réels strictement positifs tels que $a+b+c=3$. Démontrer que

$$a^{12}+b^{12}+c^{12}+8(ab+bc+ca) \geqslant 27,$$

et trouver les cas d'égalité.

Exercices Senior

Exercice 5. Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ une suite d'entiers naturels telle que, pour tout entier $k \geqslant 0$, on ait à la fois $0 \leqslant a_k \leqslant k$ et

$$\binom{k}{a_0}+\binom{k}{a_1}+\ldots+\binom{k}{a_k}=2^k.$$

Démontrer que tout entier naturel est égal à au moins un des termes $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Exercice 6. Trouver les triplets (a,b,c) d'entiers naturels non nuls tels que $\mathrm{PGCD}(a,b,c)=1$ et que $a+b+c$ divise chacun des entiers

$$a^{12}+b^{12}+c^{12},\ a^{23}+b^{23}+c^{23} \text{ et } a^{11004}+b^{11004}+c^{11004}.$$

Exercice 7. Soit f une fonction qui, à chaque droite d du plan, associe un point $f(d)$ appartenant à d. On suppose que, dès lors que trois droites d_1, d_2 et d_3 sont concourantes en un point X, les points $f(d_1)$, $f(d_2)$, $f(d_3)$ et X appartiennent à un même cercle.

a) Démontrer qu'il existe un point P tel que $f(d)=P$ pour toute droite d passant par P.

b) Démontrer qu'il existe bien une telle fonction f.

Exercices EGMO

Exercice 8. Noémie a écrit n nombres réels sur son cahier. Chacun est supérieur ou égal à 1, et la somme de ces n nombres est égale à $2n$. Démontrer que, pour tout réel r tel que $0 \leqslant r \leqslant 2n$, Noémie peut choisir un ensemble de nombres, parmi ceux qu'elle a écrits, et dont la somme appartient à l'intervalle $[r, r+2]$.

Exercice 9. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. On note D, E et F les pieds respectifs des hauteurs issues de A, B et C. Soit ω_B le cercle inscrit dans le triangle BDF, et soit M le point de tangence entre ω_B et (DF). De même, soit ω_C le cercle inscrit dans le triangle CDE, et soit N le point de tangence entre ω_C et (DE). Enfin, soit P le point d'intersection, autre que M, entre (MN) et ω_B, et soit Q le point d'intersection, autre que N, entre (MN) et ω_C.

Démontrer que $MP = NQ$.

Exercice 10. Jean dispose de 503 pièces, qu'il a réparties dans deux saladiers, chaque saladier contenant au moins une pièce. Puis, tant que chacun des deux saladiers contient deux pièces ou plus, il effectue l'opération suivante : à chaque opération, il choisit le saladier qui contient un nombre pair de pièces, prend la moitié de ces pièces, et les met dans l'autre saladier ; si l'un des deux saladiers contient une pièce ou moins, il s'arrête.

Est-il possible que ce processus ne s'arrête jamais ?