PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 1ER AVRIL 2020

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2005 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2004 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n'est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique à l'adresse suivante :

`copies.ofm@gmail.com`

Exercices Junior

Exercice 1. Soit $a_1, a_2, \ldots$ la suite d'entiers telle que $a_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1.$$

Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $a_n^2 + 1$ divise $a_{n+1}^2 + 1$.

Exercice 2. On répartit les entiers de $1, 2, \ldots, 8$ en deux ensembles A et B, puis on note P_A le produit de tous les éléments de A et P_B le produit de tous les éléments de B.

Quelles sont les valeurs minimale et maximale que peut prendre la somme $P_A + P_B$?

Note : si un ensemble E est vide, on considérera que le produit de ses éléments est égal à 1.

Exercice 3. Soit ABC un triangle et soit ω son cercle circonscrit. Soit ℓ_B et ℓ_C deux droites parallèles l'une à l'autre, passant respectivement par les points B et C. On note D le point d'intersection, autre que B, entre ω et la droite ℓ_B. De même, on note E le point d'intersection, autre que C, entre ω et la droite ℓ_C.

On suppose que les droites ℓ_C et (AD) se coupent en un point F, et que les droites ℓ_B et (AE) se coupent en un point G. On note alors O, O_1 et O_2 le centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles ABC, ADG et AEF. Enfin, on note P le centre du cercle circonscrit au triangle OO_1O_2.

Démontrer que la droite (OP) est parallèle aux deux droites ℓ_B et ℓ_C.

Exercice 4. Au pays des merveilles se trouvent n villes. Chaque paire de villes est reliée par une route à sens unique, qui part d'une des deux villes et arrive à l'autre. Afin de s'y retrouver, Alice interroge le roi de cœur : à chaque question, Alice choisit une paire de villes, et le roi de cœur lui dit quelle est la ville de départ de la route qui relie ces deux villes.

Démontrer que, en $5n$ questions ou moins, Alice peut arriver à savoir s'il existe une ville d'où part au plus une route.

Exercices Senior

Exercice 5. Au pays des merveilles se trouvent n villes. Chaque paire de villes est reliée par une route à sens unique, qui part d'une des deux villes et arrive à l'autre. Afin de s'y retrouver, Alice interroge le roi de cœur : à chaque question, Alice choisit une paire de villes, et le roi de cœur lui dit quelle est la ville de départ de la route qui relie ces deux villes.

Démontrer que, en $5n$ questions ou moins, Alice peut arriver à savoir s'il existe une ville d'où part au plus une route.

Exercice 6. Soit ABC un triangle acutangle tel que $\widehat{CAB} > \widehat{BCA}$ et soit P le point du segment $[BC]$ tel que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$. Soit Q le point d'intersection, autre que A, entre le cercle circonscrit à ABP et la droite (AC). Soit ensuite D le point du segment $[AP]$ tel que $\widehat{QDC} = \widehat{CAP}$, puis E le point de (BD), autre que D, tel que $CE = CD$. Enfin, soit F le point d'intersection, autre que C, entre le cercle circonscrit à CQE et la droite (CD), et soit G le point d'intersection des droites (QF) et (BC).

Démontrer que les points B, D, F et G sont cocycliques.

Exercice 7. Soit C un entier naturel non nul. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tous les entiers a et b de somme $a + b \geqslant C$, l'entier $a + f(b)$ divise $a^2 + bf(a)$.