PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 18 NOVEMBRE 2020

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire (au moins) une figure pertinente sur une feuille séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, si l'on souhaite démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Si l'élève ne respecte pas la consigne précédente, il perdra automatiquement un point à l'exercice concerné (on ne donne pas de note strictement négative).

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

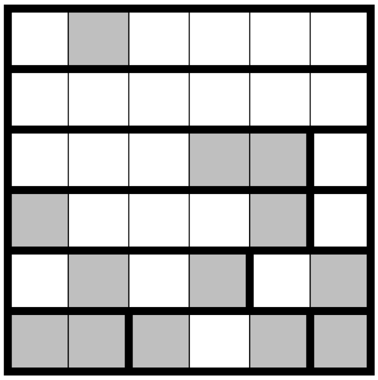
`http://igm.univ-mlv.fr/~juge/pofm/form/`

Exercice 1. Une grille de dimensions 20×20 est divisée en 400 cases unité de dimensions 1×1. Clara colorie chaque case en blanc ou en noir, puis Isabelle découpe la grille en rectangles dont les côtés sont contenus dans la grille. Chacun de ces rectangles doit contenir au plus 2 cases noires, et elle donne un chocolat à Clara à chaque fois qu'elle découpe un rectangle qui contient 0 ou 1 case noire.

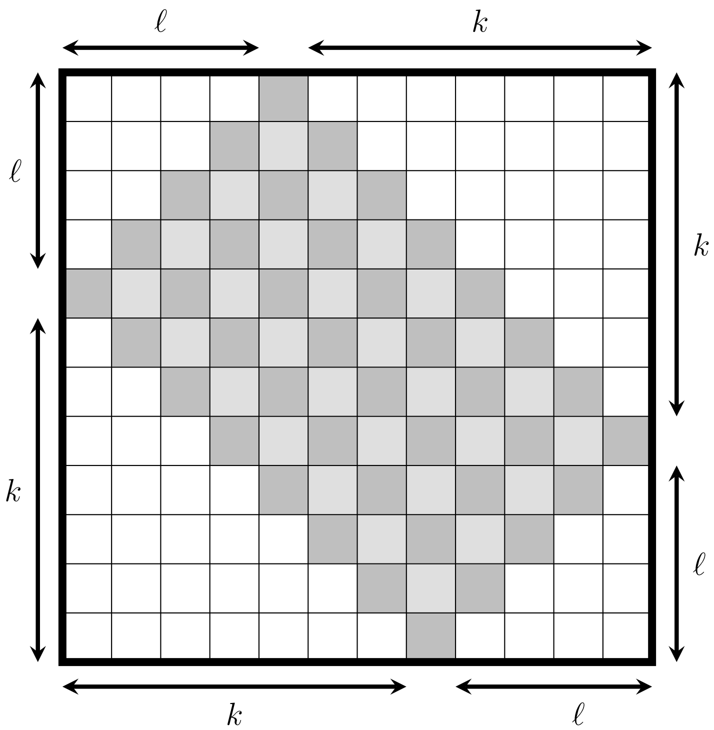
Isabelle choisit son découpage de manière à donner le moins de chocolats possibles à Clara, et Clara choisit son coloriage initial de manière à obtenir le plus de chocolats possibles d'Isabelle. Combien de chocolats Isabelle donnera-t-elle à Clara ?

Solution de l'exercice 1 Nous allons démontrer pour tout entier $n \geqslant 3$ que, si Clara et Isabelle jouent sur une grille de dimensions $n \times n$, Isabelle donnera n chocolats à Clara.

Tout d'abord, pour limiter le nombre de chocolats qu'elle donnera à Clara, Isabelle peut procéder comme suit. Elle commence par découper le rectangle en n lignes, et s'apprête à subdiviser chaque ligne en rectangles. Pour ce faire, elle numérote les cases noires de la ligne de gauche à droite, puis elle donne un coup de ciseaux juste à droite de chacune des cases noires n°$2, 4, 6, \ldots$ Ce faisant, tous les rectangles obtenus, sauf éventuellement le dernier, comptent deux cases noires. Ainsi, Isabelle donne au plus n chocolats à Clara.



Réciproquement, supposons que Clara colorie sa grille $n \times n$ avec le coloriage suivant, où nous avons distingué avec deux niveaux de gris les cases que Clara colorie en noir, et où k et ℓ sont deux entiers naturels non nuls de somme $k + \ell = n - 1$.



Si un rectangle contient exactement deux cases noires, il s'agit de cases adjacentes : une gris foncé et une gris clair. Or, il y a $(k+1)(\ell+1)$ cases gris foncé et $k\,\ell$ cases gris clair. Isabelle dessine donc au plus $k\,\ell$ rectangles recouvrant exactement deux cases noires, et ces rectangles laissent de côté $k+\ell+1=n$ cases gris foncé. Cela force donc Isabelle à donner au moins $n=20$ chocolats à Clara.

Commentaire des correcteurs Les difficultés principales de cet exercice étaient les suivantes :

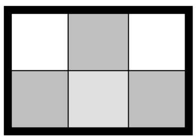
1. se convaincre que Clara peut forcer Isabelle à lui donner au moins 2 chocolats ;
2. trouver un coloriage qui force Isabelle à donner au moins 20 chocolats ;
3. démontrer que ce coloriage force en effet Isabelle à donner au moins 20 chocolats ;
4. trouver une stratégie simple permettant à Isabelle de donner au plus n chocolats.

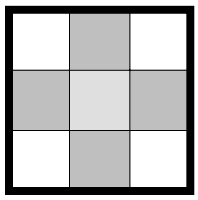
De nombreux élèves ont été bloqués à la première difficulté, remarquant simplement qu'Isabelle donnerait au moins un chocolat si la grille était vide ou contenait un nombre impair de cases noires, mais formulant tout de go l'affirmation **incorrecte** suivante :

> Si Clara dessine un nombre pair non nul de cases noires, Isabelle peut apparier ces cases pour ne donner aucun chocolat à Clara.

Une fois une telle propriété indûment considérée comme acquise, ces élèves n'ont donc tout simplement pas abordé les difficultés 2 à 4.

D'un point de vue méthodologique, il est dommage que ces élèves n'aient pas pris la peine d'étudier soigneusement le cas des grilles de petites dimensions, puisque les grilles rectangulaires 2×3 et 3×3 fournissaient un contre-exemple manifeste à cette affirmation, comme illustré ci-dessous.





En outre, en cherchant des arguments aussi simples que possibles pour expliquer pourquoi de telles configurations forçaient Isabelle à donner 2 voire 3 chocolats, les élèves auraient pu avoir l'idée du coloriage entre nuances de gris ; ou, au minimum, constater que deux cases noires contenues dans un même rectangle d'Isabelle étaient nécessairement contiguës.

Par ailleurs, plusieurs élèves ont bien identifié le motif en forme de croix dans la grille 3×3, mais n'ont ensuite pas pensé à tenter de le généraliser au cas de la grille 4×4 : les quelques élèves qui ont suivi une telle approche sont tous parvenus à une solution complète, proposant la construction présentée ci-dessus dans le cas où $k=\lfloor n/2\rfloor$ ou bien $k=1$.

Plusieurs élèves, ayant cherché sans le trouver un coloriage qui forcerait Isabelle à donner n chocolats, ont néanmoins entrepris avec succès qu'Isabelle donnerait entre $n/2$ et n chocolats à Clara. Plus généralement, les correcteurs tiennent à souligner leur satisfaction de constater que de nombreux élèves ont eu l'idée de chercher séparément des bornes inférieures et supérieures sur le nombre de chocolats que donnerait Isabelle, c'est-à-dire de chercher une bonne stratégie pour Isabelle et un bon coloriage pour Clara, puis à démontrer qu'un tel coloriage était bon. De fait, les élèves qui ont suivi une telle approche ont très souvent été récompensés par un nombre substantiel de points, et ce même quand ils ne parvenaient pas à trouver un coloriage optimal.

Enfin, voici trois erreurs très évitables que les correcteurs ont retrouvées dans de nombreuses copies.

- ▷ Plusieurs élèves, expliquant comment Isabelle pouvait se débrouiller pour ne pas donner plus de 20 chocolats, ont indûment écrit que, dans le cas d'une ligne avec un nombre pair de cases noires, Isabelle ne donnerait aucun chocolat. Cette assertion est incorrecte, car Isabelle doit quand même donner un chocolat si la ligne ne contient aucune case noire.
- ▷ D'autres élèves, alors qu'ils tentaient de démontrer qu'un coloriage de Clara contraindrait Isabelle à lui donner au moins 20 chocolats, ont supposé qu'Isabelle découperait la grille en rectangles de largeur 1. Même si de telles considérations permettaient en effet de montrer que la technique consistant à découper la grille en lamelles n'aurait pas permis à Isabelle de donner moins de 20 chocolats, cette supposition était infondée, ce sans quoi Isabelle devrait déjà donner 20 chocolats même quand la grille est vide.
- ▷ Enfin, certains élèves, partant d'une configuration optimale, ont tenté de démontrer que celle-ci ne pouvait pas être améliorée si on changeait la couleur d'une seule case. Mais rien n'empêchait de changer la couleur de plusieurs cases, et un tel raisonnement était donc nul et non avenu : exhiber un maximum local (ce qui était fait ici) est clairement insuffisant pour démontrer qu'il s'agit en fait d'un maximum global.

Exercice 2. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ d'entiers naturels non nuls est *sicilienne* si

$$u_{n+1} \in \{u_n/2, u_n/3, 2u_n+1, 3u_n+1\}$$

pour tout $n \geqslant 0$. Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe une suite sicilienne $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et un entier $\ell \geqslant 0$ tels que $u_0 = k$ et $u_\ell = 1$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Nous allons démontrer, pour tout entier $k \geqslant 2$, la propriété $\mathcal{P}_k$ suivante : il existe une suite sicilienne finie $(u_0, \ldots, u_\ell)$ telle que $u_0 = k$ et $u_\ell < k$.

La propriété $\mathcal{P}_k$ est immédiate si k est pair, puisqu'il suffit de choisir $u_1 = k/2$. On suppose donc k impair. Soit α et κ les entiers naturels non nuls tels que $k = 2^\alpha \kappa - 1$, l'entier κ étant impair. On construit alors notre suite sicilienne comme suit.

Tout d'abord, pour tout $i \leqslant \alpha - 1$, on pose $u_{2i} = 2^{\alpha-i}3^i\kappa - 1$ et $u_{2i+1} = 2^{\alpha-i}3^{i+1}\kappa - 2$. On pose ensuite $u_{2\alpha} = 3^\alpha\kappa - 1$ et $u_{2\alpha+1} = (3^\alpha\kappa - 1)/2$, qui est bien un entier puisque κ est impair. Enfin, pour tout $i \leqslant \alpha$, on pose $u_{2\alpha+2+i} = 3^{\alpha-i}\kappa$. On vérifie alors aisément que la suite $(u_0, \ldots, u_{3\alpha+2})$ est sicilienne. En effet, on a $u_{2i+1} = 3u_{2i} + 1$ et $u_{2i+2} = u_{2i+1}/2$ pour tout $i \leqslant \alpha$, puis $u_{2\alpha+1} = u_{2\alpha}/2$ et $u_{2\alpha+2} = 2u_{2\alpha+1} + 1$, et on a également $u_{2\alpha+3+i} = u_{2\alpha+2+i}/3$ pour tout $i \leqslant \alpha - 1$. Puisque $u_0 = k$ et $u_{3\alpha+2} = \kappa \leqslant (k+1)/2 < k$, cela achève de démontrer la propriété $\mathcal{P}_k$.

Forts de cette propriété, on démontre enfin l'assertion de l'énoncé par récurrence sur k.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Sur ce problème, beaucoup d'élèves ont eu des idées pertinentes : faire une récurrence forte ou essayer de se ramener à un terme plus petit que u_0 pour s'assurer d'aboutir à 1. Toutefois, on a constaté de nombreuses erreurs de calcul lors de la manipulation de congruences : pour diviser une égalité modulo m par k, il faut également diviser m par $\mathrm{PGCD}(k, m)$. Par exemple, on a $6 \equiv 2 \pmod 4$, donc on peut en déduire que $3 \equiv 1 \pmod 2$, mais certainement pas que $3 \equiv 1 \pmod 4$.

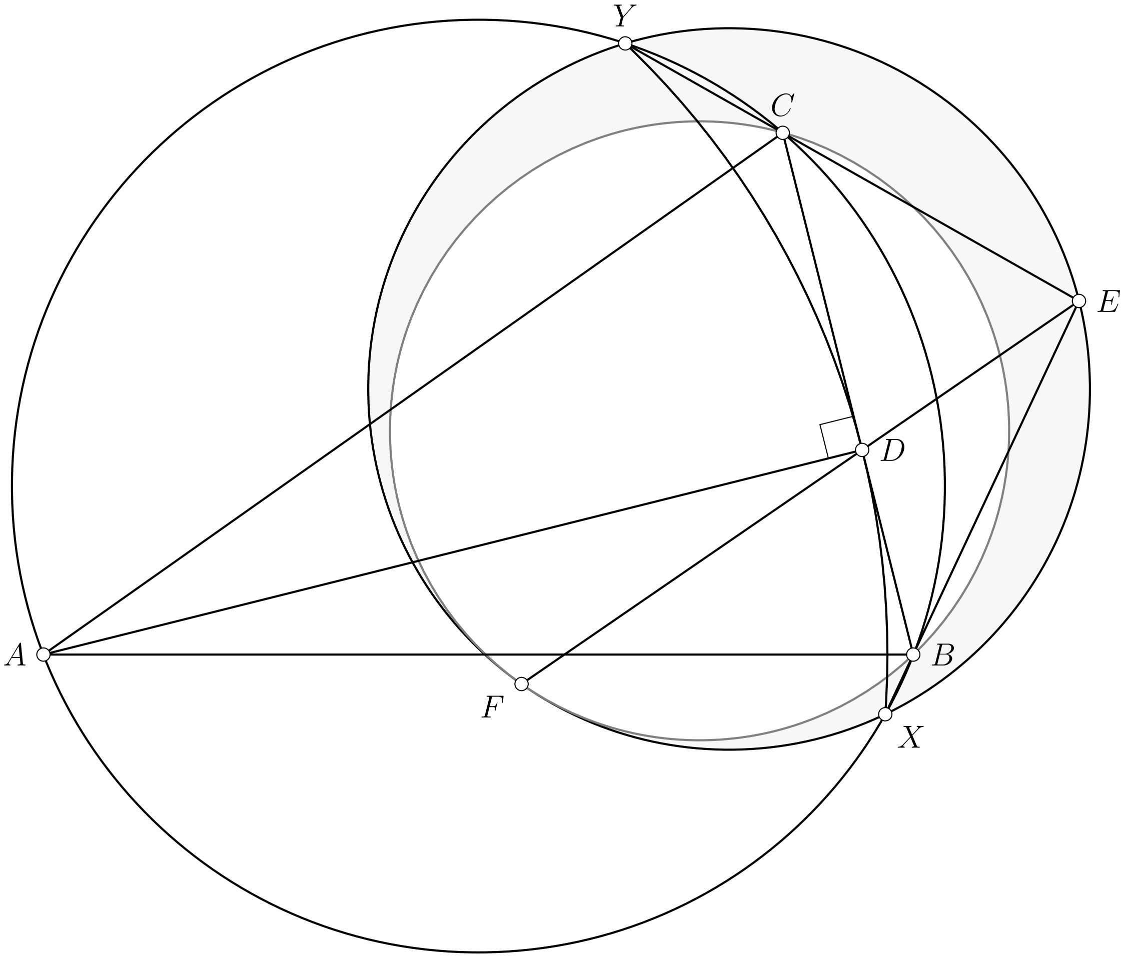
Quelques élèves ont réussi à mettre en place des arguments rigoureux pour obtenir le résultat pour toute valeur de k. Certains ont traité de nombreux cas, se ramenant à des cas de plus en plus compliqués : $k \equiv 3 \pmod 4$, puis $k \equiv 7 \pmod 8$, et ainsi de suite. Il fallait alors se rendre compte que la bonne idée à avoir était de considérer l'entier $k+1$ et sa valuation 2-adique.

Exercice 3. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, et soit D le pied de la hauteur issue du sommet A. Soit X et Y les deux points du cercle circonscrit à ABC tels que $AX = AY = AD$, et tels que B et X se trouvent du même côté de la droite (AD). Soit E le point d'intersection des droites (BX) et (CY). Enfin, soit F le point d'intersection, autre que E, entre la droite (DE) et le cercle circonscrit à EXY.

Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles BCF et EXY sont tangents.

Solution de l'exercice 3 Dans la suite, on note $\mathcal{C}_{UVW}$ le cercle circonscrit à un triangle UVW. Soit i l'inversion de centre E qui laisse le cercle $\mathcal{C}_{ABC}$ globalement invariant. Cette inversion échange les points B et X, ainsi que les points C et Y. Elle échange donc le cercle $\mathcal{C}_{EXY}$ et la droite (BC). Puisque i laisse la droite (DE) globalement invariante, elle échange donc F avec le point d'intersection de (DE) et (BC), c'est-à-dire avec le point D.

Par conséquent, l'inversion i échange les cercles $\mathcal{C}_{BCF}$ et $\mathcal{C}_{XYD}$. Or, ce dernier cercle a pour rayon $[AD]$, et il est donc tangent à la droite (BC). Ainsi, les cercles $\mathcal{C}_{BCF}$ et $\mathcal{C}_{EXY}$ sont eux-mêmes tangents.



Solution alternative n°1 Dans la suite, on note $\mathcal{C}_{UVW}$ le cercle circonscrit au triangle UVW. Si ABC est isocèle en A, la droite (AD) constitue un axe de symétrie de la figure et le résultat est immédiat. On suppose donc, sans perte de généralité, que $AB \neq AC$.

Lorsque l'on trace la figure, il est évidemment important de mettre en évidence le triangle ABC et départ, les triangles isocèles ADX, ADY et AXY, et ce qui semble être la tangente commune aux deux cercles $\mathcal{C}_{BCF}$ et $\mathcal{C}_{EXY}$. On remarque alors que ces trois droites semblent concourantes, et c'est donc ce que l'on entreprend de démontrer.

Soit I le point d'intersection des droites (XY) et (BC) : ce point existe bien, car ABC n'est pas isocèle en A. Nous allons démontrer que la droite (IF) est tangente aux cercles $\mathcal{C}_{FBC}$ et $\mathcal{C}_{FXY}$, ce qui donnera le résultat désiré. En considérant la puissance du point I par rapport aux cercles $\mathcal{C}_{FBC}$ et $\mathcal{C}_{FXY}$, il s'agit donc de démontrer que IF^2 est égal à $IX \cdot IY$ et à $IB \cdot IC$.

Or, puisque les droites (BC) et (AD) sont perpendiculaires, le cercle $\mathcal{C}_{XYD}$ est tangent à la droite (BC). En considérant la puissance du point I par rapport aux cercles $\mathcal{C}_{XYD}$ et $\mathcal{C}_{ABC}$, on en déduit donc que $ID^2 = IX \cdot IY = IB \cdot IC$. Il s'agit donc de démontrer que $IF = ID$.

Dès lors, on cherche des propriétés supplémentaires sur le point D. Si (IF) est la tangente commune recherchée et si IFD est isocèle en I, alors

$$(FB, FD) = (FB, FI) + (FI, FD) = (CB, CF) + (FD, DI) = (FD, FC),$$

et (FD) est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{BFC}$.

Réciproquement, si (FD) est la bissectrice de $\widehat{BFC}$, et en notant J le point d'intersection entre (BC) et la tangente à $\mathcal{C}_{BCF}$ en F, la chasse aux angles ci-dessus indique que JFD est isocèle en J, donc que $JD^2 = JF^2 = JB \cdot JC$. Le point J a donc même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}_{BCF}$ et $\mathcal{C}_{DXY}$, donc il appartient à leur axe radical (XY), de sorte que $I = J$. Ainsi, notre problème est équivalent à démontrer que (FD) est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{BFC}$.

Pour cela, on note G le point d'intersection, autre que D, entre les cercles $\mathcal{C}_{DBX}$ et $\mathcal{C}_{CDY}$. Puisque

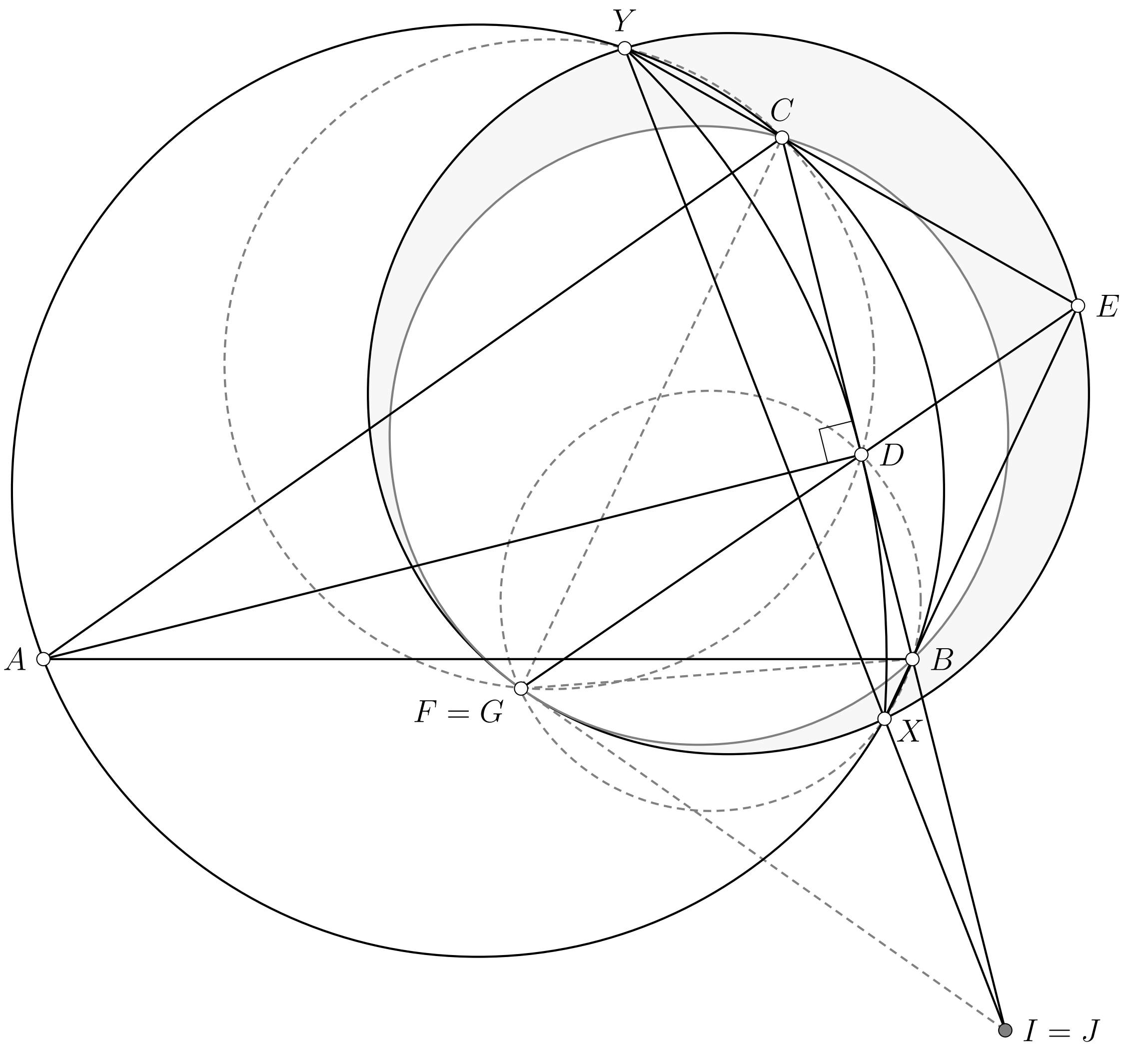
$$(GY, GX) = (GY, GD) + (GD, GX) = (CY, CD) + (BD, BX) = (EY, EX),$$

les point G appartient au cercle $\mathcal{C}_{EXY}$. En outre, E est le point de concourt des axes radicaux de $\mathcal{C}_{ABC}$ avec $\mathcal{C}_{DBX}$ et $\mathcal{C}_{CDY}$. Il s'agit donc du centre radical de ces trois cercles, et E appartient donc à l'axe radical de $\mathcal{C}_{DBX}$ et $\mathcal{C}_{CDY}$, c'est-à-dire à la droite (GD). Cela signifie que $F = G$.

On conclut alors par simple chasse aux angles. En effet,

$$\begin{aligned}(FB, FD) + (FC, FD) &= (GB, GD) + (GC, GD)\\ &= (XB, XD) + (YC, YD)\\ &= (BX, BC) + (DB, DX) + (CY, CB) + (DC, DY)\\ &= (YX, YC) + (YD, YX) + (XY, XB) + (XD, XY)\\ &= (YD, YC) + (XD, XB).\end{aligned}$$

Ainsi, $2(XB, XD) + 2(YC, YD) = 0°$, de sorte que les angles $\widehat{DFB}$ et $\widehat{CFD}$ sont égaux modulo $90°$. Comme $\widehat{DFB} = \widehat{DXB} \leqslant \widehat{CXB} = \widehat{CAB} < 90°$ et, de même, $\widehat{CFD} < 90°$, on en déduit que $\widehat{DFB} = \widehat{CFD}$, ce qui conclut le problème.



Commentaire des correcteurs Pour ce problème, plusieurs élèves ont mis en évidence une solution par inversion à laquelle les correcteurs n'avaient pas pensé : il s'agit de la solution n°1 présentée ci-dessus. Cette méthode rendait l'exercice nettement moins difficile que le niveau de difficulté estimé par l'équipe de correction.

Ainsi, on a observé une forte dichotomie entre les élèves ayant repéré cette solution par inversion et les élèves qui ne l'ont pas repérée ou qui ne sont pas adeptes de l'inversion et qui n'ont, pour la plupart, pas pu avancer de façon significative dans l'exercice. Toutefois, nous saluons les efforts et les pistes avancées par les élèves ayant tenté l'exercice et qui ont parfois pu rapporter à leur auteur 1 ou 2 points partiels.