

POFM 2020 – 21 - Cours par correspondance : TRANSFORMATIONS DU PLAN Groupe C

Yaël Dillies

14 novembre 2020

La phrase du jour

POFM

2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance

:

TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

La géométrie est l'étude
des propriétés invariantes
sous un certain type de
transformations.

Felix Klein

Sommaire

POFM

2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance

:

TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

1 Introduction

2 Géométrie euclidienne

- Homothéties
- Rotations
- Symétries axiales
- Similitudes

Qu'est-ce qu'une transformation du plan ?

POFM

2020 – 21 -
Cours par cor-
respondance

:
TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

■ Fonction de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2

Qu'est-ce qu'une transformation du plan ?

POFM

2020 – 21 -
Cours par cor-
respondance

:
TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

- Fonction de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2
- Bijective

Qu'est-ce qu'une transformation du plan ?

POFM

2020 – 21 -
Cours par cor-
respondance

:

TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

- Fonction de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2
- Bijective
- D'autres propriétés à spécifier

Transformations en géométrie euclidienne

POFM

2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance

:

TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

On veut que nos transformations préservent les angles,
c'est-à-dire

$$\text{pour tous points } A, B, C, \widehat{f(A)f(B)f(C)} = \widehat{ABC}$$

Quels genres de transformations obtient-on ?

Définition d'une homothétie

L'*homothétie* de centre O et de rapport k est la transformation qui associe au point X le point X' tel que $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ (en longueurs algébriques).

En terme de vecteurs, $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$

En terme de nombres complexes, $X' - O = k(X - O)$.

On écrit l'homothétie $h_{O,k}$.

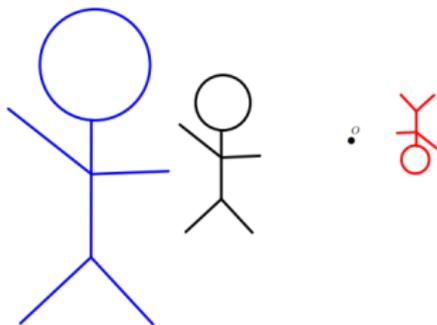


FIGURE – Un bonhomme noir et ses images bleue et rouge par les homothéties de centre O de rapport 2 et $-\frac{1}{2}$.

Propriétés des homothéties

POFM
2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance
:
TRANSFORMATI
DU PLAN
Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

Propriétés des homothéties

- Les homothéties conservent les droites, les cercles, les angles orientés, et les formes.
- L'image d'une droite est une droite parallèle.
- Une homothétie de rapport k multiplie toutes les longueurs par $|k|$. En particulier, elle conserve les rapports de longueurs.

Exemples d'homothéties

- Les symétries centrales sont les homothéties de rapport -1 .
- Si $AB \parallel A'B'$, alors il existe exactement une homothétie envoyant A sur A' et B sur B' .
- Si $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ sont deux cercles, alors il existe exactement deux homothéties envoyant \mathcal{C} sur \mathcal{C}' , une de rapport positif et une de rapport négatif.

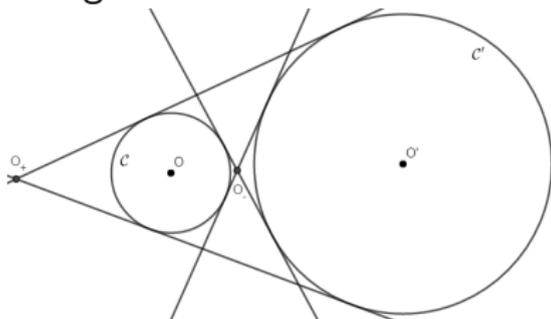


FIGURE – O_+ est le centre de l'homothétie de rapport positif envoyant \mathcal{C} sur \mathcal{C}' et O_- le centre de celle de rapport négatif.

Concurrence des médianes

POFM
2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance
:
TRANSFORMATI
DU PLAN
Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

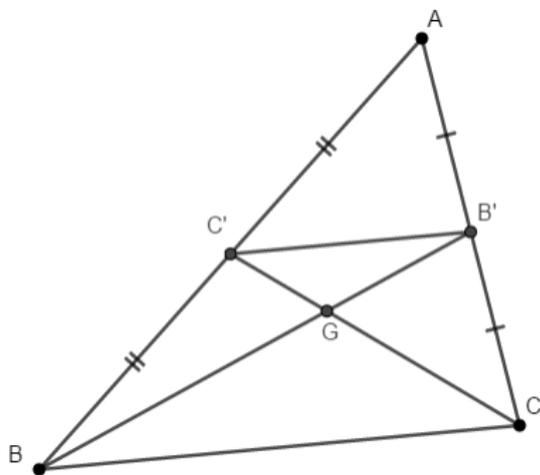


FIGURE – Grâce à une homothétie bien choisie, montrer que $\overrightarrow{B'G} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{C'G} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$. En déduire que les médianes sont concourantes.

Composition d'homothéties

POFM

2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance

:

TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

Lemme de composition d'homothéties

Si h_1, h_2 sont deux homothéties de rapport k_1, k_2 et de centre O_1, O_2 , alors $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport $k_1 k_2$ et de centre un point de la droite

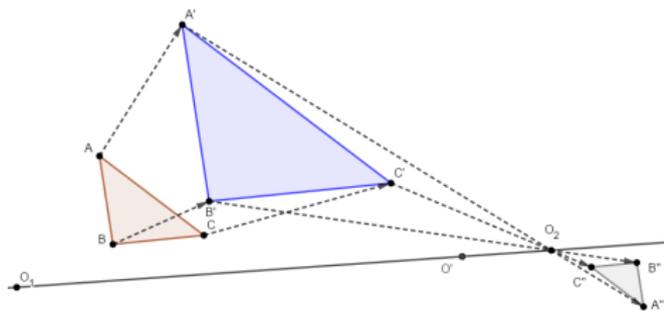


FIGURE – Remarque : quand $k_1 k_2 = 1$, le centre de $h_2 \circ h_1$ va à l'infini et $h_2 \circ h_1$ devient une translation.

Théorème de Monge

POFM
2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance
:
TRANSFORMATI
DU PLAN
Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

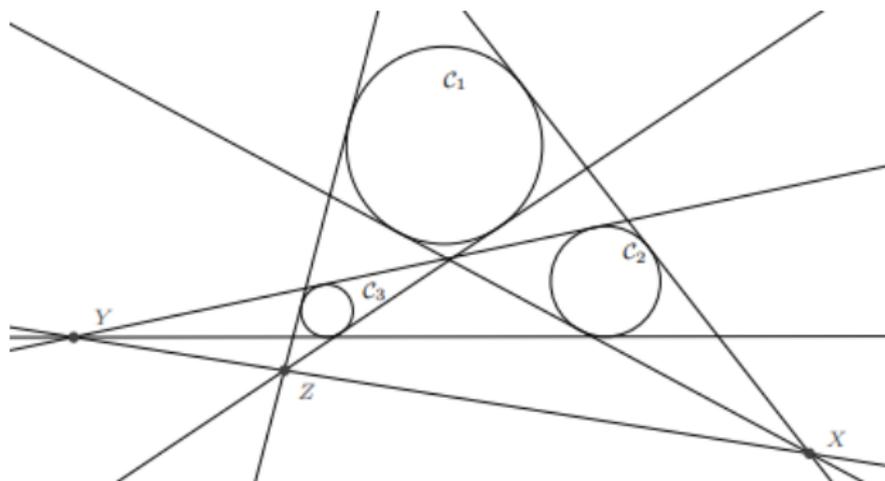


FIGURE – Les homothéties envoyant C_1 sur C_2 , C_2 sur C_3 , C_1 sur C_3 sont de centres X, Y, Z .

Cercle d'Euler

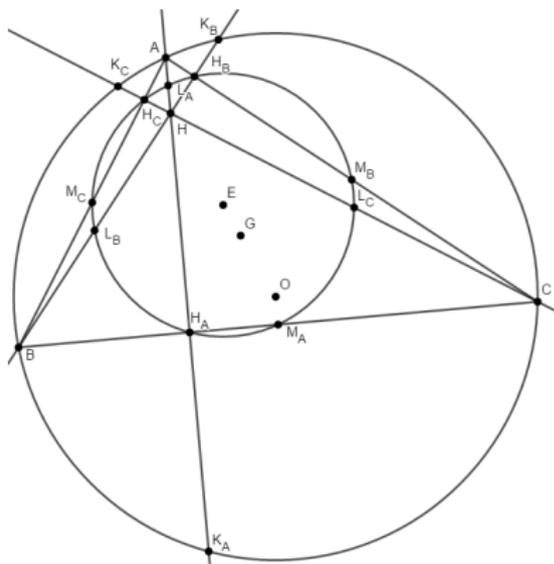


FIGURE – Tout ce beau monde est cocyclique.

Homothéties entre le cercle circonscrit et le cercle d'Euler

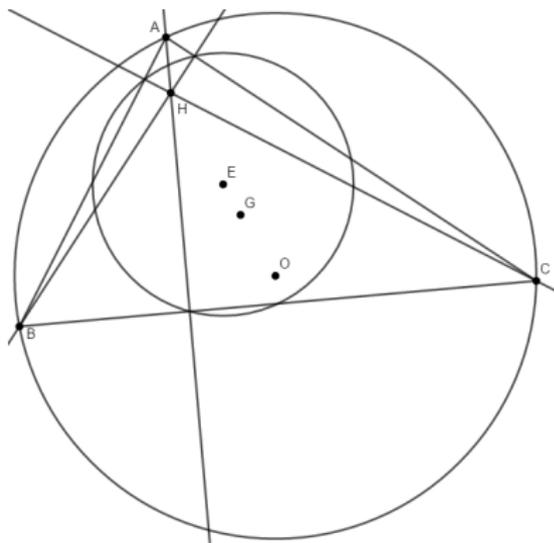


FIGURE – Quels sont donc leurs centres ?

POFM

2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance

TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

Définition d'une rotation

La *rotation* de centre O et d'angle θ est la transformation qui associe au point X le point X' tel que $OX' = OX$ et $\widehat{X'OX} = \theta$ (en angles orientés).

En terme de nombres complexes, $X' - O = e^{i\theta}(X - O)$.

On écrit la rotation $r_{O,\theta}$.

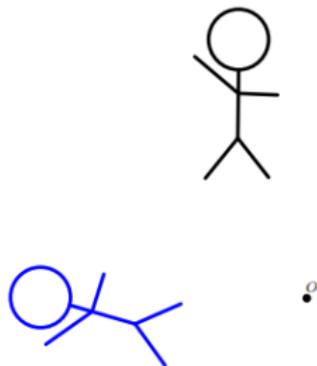


FIGURE – Un bonhomme noir et son image bleue par la rotation de centre O d'angle 75° .

Propriétés des rotations

POFM

2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance

:

TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

Propriétés des rotations

- Les rotations conservent les longueurs. Ce sont des *isométries*.
- Les rotations conservent les droites, les cercles, les angles.
- L'image d'une droite par une rotation d'angle θ fait un angle de θ avec celle-ci.

Exemples de rotations

POFM

2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance

:

TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

- Les symétries centrales sont les rotations d'angle π .
- Si $AB = A'B'$, alors il existe exactement une rotation (dégénérée en translation si $AB \parallel A'B'$) envoyant A sur A' et B sur B' . (essayez de la construire !)

Composition de rotations

POFM

2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance

:

TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

Lemme de composition de rotations

Si r_1, r_2 sont deux rotations d'angles θ_1, θ_2 , alors $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

Remarque : quand $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \pmod{360^\circ}$, le centre de $r_2 \circ r_1$ va à l'infini et $r_2 \circ r_1$ devient une translation.

Définition d'une symétrie axiale

POFM

2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance

:

TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

La *symétrie axiale* d'axe la droite d est la transformation qui au point X associe X' tel que d soit la médiatrice de $[XX']$.

Propriétés des symétries axiales

POFM

2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance

:
TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

Propriétés des symétries axiales

- Les symétries axiales conservent les longueurs. Ce sont des isométries.
- Les symétries axiales conservent les droites, les cercles, mais changent le signe des angles orientés.
- Pour tous points A, A' , il existe exactement une symétrie axiale envoyant A sur A' .

Composition de symétries axiales

Lemme de composition des symétries axiales

Si s_1, s_2 sont deux symétries axiales dont les axes forment un angle de mesure α , alors $s_2 \circ s_1$ est la rotation d'angle 2α de centre l'intersection des deux axes.

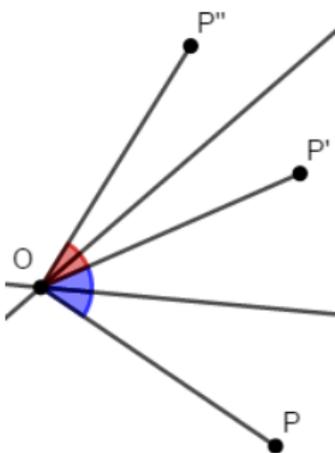


FIGURE – Remarque : si les deux axes sont parallèles, alors la rotation est dégénérée en translation.

Définition d'une similitude

POFM

2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance

:

TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

Une *similitude directe* est toute transformation préservant les angles orientés.

Une *similitude indirecte* est la composée d'une similitude directe avec une symétrie axiale.

Les homothéties, rotations, translations, symétries axiales sont toutes des similitudes. C'est en un sens **la forme la plus générale** de transformation en géométrie euclidienne.

S'il existe une similitude directe envoyant A sur A' , B sur B' , C sur C' , on écrit $ABC \sim A'B'C'$.

S'il existe une similitude indirecte envoyant A sur A' , B sur B' , C sur C' , on écrit $ABC \simeq A'B'C'$.

Propriétés des similitudes

POFM

2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance

:

TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

Propriétés des similitudes

- Les similitudes conservent les droites, les cercles, les angles (non orientés).
- Les similitudes conservent les longueurs. Ce sont des isométries. Et en fait toute isométrie est une similitude.
- Toute similitude directe peut être écrite comme la composition d'une homothétie (potentiellement dégénérée en translation) et d'une rotation de même centre.

Théorème de Ptolémée

POFM

2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance

:

TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

Théorème de Ptolémée

Pour tous points A, B, C, D ,

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

avec égalité ssi $ABCD$ sont cocycliques dans cet ordre.

Indice : Introduire E tel que $ABE \sim ADC$.

Deux similitudes pour le prix d'une

POFM

2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance

:

TRANSFORMATI
DU PLAN

Yaël Dillies

Introduction

Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes

Similitudes internes

Les similitudes envoyant $\begin{cases} A \mapsto A' \\ B \mapsto B' \end{cases}$ et $\begin{cases} A \mapsto B \\ A' \mapsto B' \end{cases}$ sont de même centre.

Théorème de Miquel

Théorème de Miquel

Le point de Miquel M est le centre de plein de similitudes.

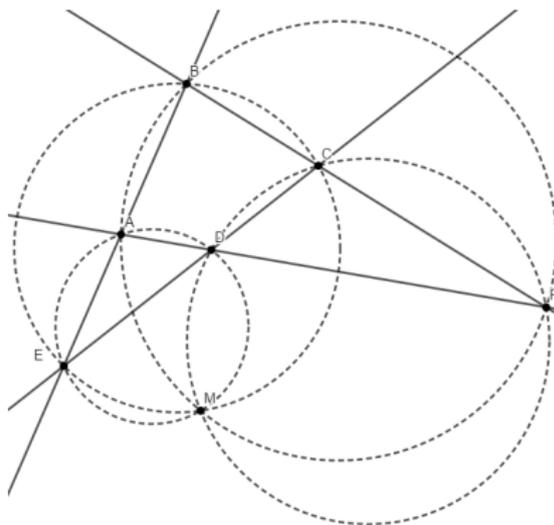


FIGURE – Trouvez-les toutes !

Puissance d'un point

POFM
2020 – 21 –
Cours par cor-
respondance
:
TRANSFORMATI
DU PLAN
Yaël Dillies

Introduction

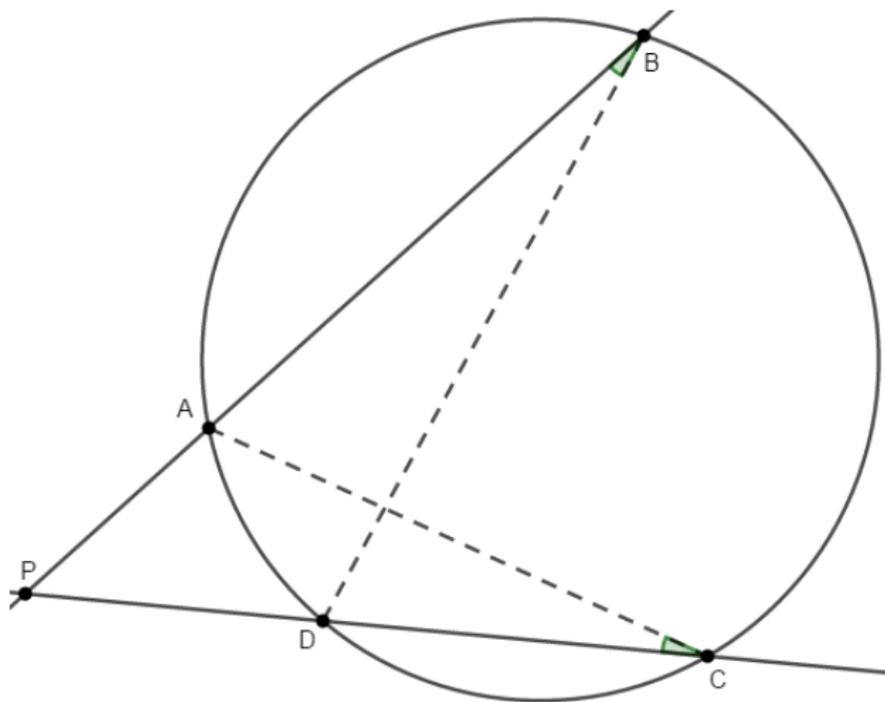
Géométrie
euclidienne

Homothéties

Rotations

Symétries axiales

Similitudes



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$