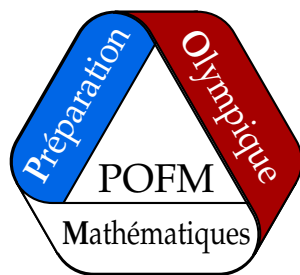


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 18 NOVEMBRE 2020

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- ▷ Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire (au moins) une figure pertinente sur une feuille séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, si l'on souhaite démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- ▷ Si l'élève ne respecte pas la consigne précédente, il perdra automatiquement un point à l'exercice concerné (on ne donne pas de note strictement négative).

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

<http://igm.univ-mlv.fr/~juge/pofm/form/>

Énoncés

Exercice 1. Une grille de dimensions 20×20 est divisée en 400 cases unité de dimensions 1×1 . Clara colorie chaque case en blanc ou en noir, puis Isabelle découpe la grille en rectangles dont les côtés sont contenus dans la grille. Chacun de ces rectangles doit contenir au plus 2 cases noires, et elle donne un chocolat à Clara à chaque fois qu'elle découpe un rectangle qui contient 0 ou 1 case noire.

Isabelle choisit son découpage de manière à donner le moins de chocolats possibles à Clara, et Clara choisit son coloriage initial de manière à obtenir le plus de chocolats possibles d'Isabelle. Combien de chocolats Isabelle donnera-t-elle à Clara ?

Exercice 2. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ d'entiers naturels non nuls est *sicilienne* si

$$u_{n+1} \in \{u_n/2, u_n/3, 2u_n + 1, 3u_n + 1\}$$

pour tout $n \geq 0$. Démontrer que, pour tout entier $k \geq 1$, il existe une suite sicilienne $(u_n)_{n \geq 0}$ et un entier $\ell \geq 0$ tels que $u_0 = k$ et $u_\ell = 1$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, et soit D le pied de la hauteur issue du sommet A . Soit X et Y les deux points du cercle circonscrit à ABC tels que $AX = AY = AD$, et tels que B et X se trouvent du même côté de la droite (AD) . Soit E le point d'intersection des droites (BX) et (CY) . Enfin, soit F le point d'intersection, autre que E , entre la droite (DE) et le cercle circonscrit à EXY .

Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles BCF et EXY sont tangents.