Coupe Animath d'Automne

Mercredi 7 octobre 2020

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Merci de lire attentivement les instructions figurant en page 2 de ce document.

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- ▷ **Pour les exercices 1, 2 et 9,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- ▷ **À part dans les exercices 1, 2 et 9,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

- ▷ Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés, il faut tracer la droite qui passe par ces points. **Le respect de cette consigne rapportera automatiquement un point.**

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies

- ▷ de préférence par voie électronique, via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

  http://monge.univ-mlv.fr/~juge/animath/

- ▷ si nécessaire, par voie postale, à l'adresse suivante :

  Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques
  Institut Henri Poincaré
  11-13 rue Pierre et Marie Curie
  75005 Paris

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)
contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer le nombre

$$P = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{29}{28} \times \frac{30}{29}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 1 On commence à calculer les premiers termes :
$\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$ car les 4 et les 3 se simplifient. On comprend alors bien ce qu'il se passe : tous les nombres entre 2 et 30 (strictement) vont se simplifier et finalement on obtient $P = \frac{30}{2} = 15$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien réussi.

Exercice 2. Alexie et Baptiste possèdent chacun un immeuble. Chaque étage du bâtiment d'Alexie possède 3 salles de bains et 2 chambres. Baptiste quant à lui, possède 4 salles de bains et 3 chambres par étage. Il y a au total (c'est à dire dans les deux bâtiments) 25 salles de bains et 18 chambres. Trouver le nombre d'étages des immeubles d'Alexie et Baptiste.

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 2 On pose a le nombre d'étages de l'immeuble d'Alexie et b le nombre d'étages de l'immeuble de Baptiste. L'énoncé se résume au système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} 3a + 4b = 25 \\ 2a + 3b = 18 \end{cases}$$

On multiplie la première ligne par 2 et la seconde par 3 et on obtient

$$\begin{cases} 6a + 8b = 50 \\ 6a + 9b = 54 \end{cases}$$

puis on soustrait pour obtenir

$$b = 4.$$

Il suffit maintenant de réinjecter pour avoir $6a = 50 - 32 = 18$ et donc

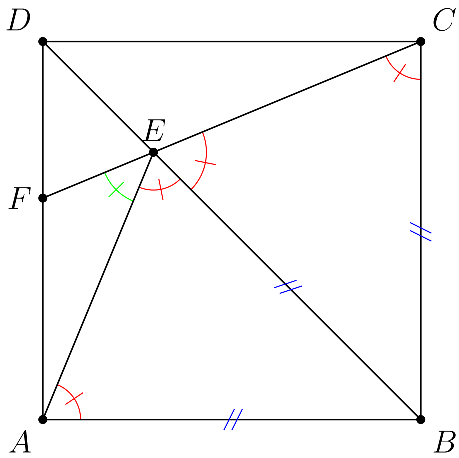
$$a = 3$$

Alexie a un immeuble de 3 étages et Baptiste un immeuble de 4 étages.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été globalement très bien réussi. Même si nous l'avons compté juste, il ne fallait pas donner le total des étages mais bien donner le nombre d'étages d'Alexie et de Baptiste séparément.

Exercice 3. Soit $ABCD$ un carré et E le point du segment $[BD]$ tel que $EB = AB$. On définit le point F comme le point d'intersection des droites (CE) et (AD). Trouver la valeur de l'angle $\widehat{FEA}$.

Solution de l'exercice 3



Nous utiliserons à plusieurs reprises la propriété centrale suivante : dans un triangle, la somme des angles fait $180°$.

Puisque le quadrilatère $ABCD$ est un carré, on obtient que $EB = AB = CB$. On en déduit que les triangles ABE et BEC sont tous les deux isocèles en B. Comme $\widehat{ABE} = 45°$, on obtient par la somme des angles dans le triangle ABE que $180° = \widehat{ABE} + \widehat{BAE} + \widehat{AEB} = 45° + 2 \cdot \widehat{AEB}$, donc $\widehat{AEB} = \frac{135°}{2} = 67,5°$. Comme $\widehat{CBE} = 45°$, on obtient par la somme des angles dans le triangle CBE que $180° = \widehat{CBE} + \widehat{BCE} + \widehat{CEB} = 45° + 2 \cdot \widehat{CEB}$, donc $\widehat{CEB} = \frac{135°}{2} = 67,5°$.
En particulier, on a $\widehat{AEB} = \widehat{CEB} = 67,5°$.
Finalement, comme F, E, C sont alignés, on obtient

$$\widehat{FEA} = 180° - \widehat{AEC} = 180° - (\widehat{AEB} + \widehat{BEC}) = 180° - 135° = 45°$$

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien réussi. Cependant, une erreur récurrente a été de placer le point E à l'intersection des diagonales du carré, ce qui ne correspond pourtant pas à la définition donnée par l'énoncé. Aussi, beaucoup ont utilisé leur règle graduée pour justifier une égalité de longueur. Mais le fait mesurer à la règle sur une figure, en plus de comporter des inexactitudes, ne constitue pas une preuve du cas général, cela ne traite l'égalité que sur le cas particulier de la figure de l'élève !

Exercice 4. Noémie et Tristan sont des bergers. Chacun possède un nombre de moutons qui est un carré parfait, c'est-à-dire un entier qui peut s'écrire de la forme $n^2 = n \times n$ avec n un entier positif ou nul. On note donc a^2 le nombre de moutons de Noémie et b^2 celui de Tristan. Après un rapide comptage du nombre total de moutons, ils déduisent que $97 \leqslant a^2 + b^2 \leqslant 108$. Déterminer le nombre de moutons de chacun en sachant que :

1. Noémie a strictement plus de moutons que Tristan ;
2. chacun d'eux a au moins 2 moutons ;
3. le nombre total de moutons $a^2 + b^2$ est impair.

Solution de l'exercice 4

Notons que $a^2 \leqslant 108$ donc $a \leqslant 10$. De plus $97 \leqslant a^2 + b^2 \leqslant 2a^2$ car Noémie a plus de moutons que Tristan, donc $a^2 \geqslant 48,5$, donc comme a^2 est entier, $a^2 \geqslant 49$ donc $a \geqslant 7$. Il reste donc quelques cas à traiter :

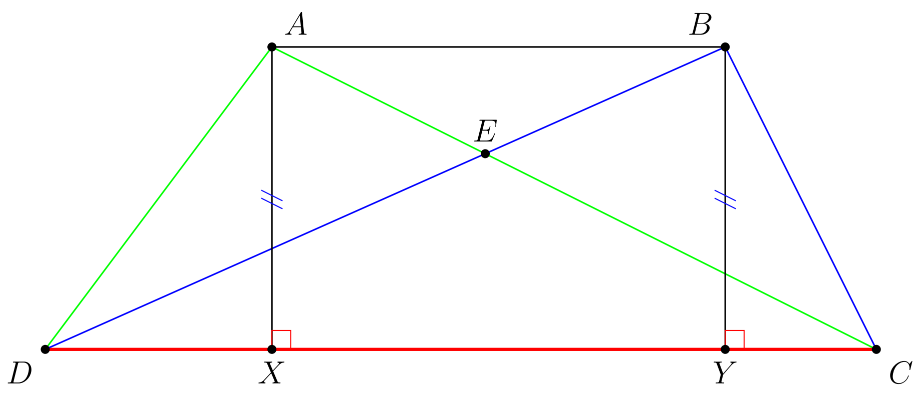
- ▷ Si $a = 7$, $97 \leqslant 49+b^2 \leqslant 108$ donc $48 \leqslant b^2 \leqslant 59$. Comme $b^2 \leqslant a^2 = 49$, on peut essayer d'encadrer b^2 entre deux carrés parfaits : on a $36 < 48 \leqslant b^2 \leqslant 49$ donc $6 < b \leqslant 7$. Comme b est entier $b = 7$, donc $a^2 + b^2 = 2 \times 49$ est pair ce qui est impossible. On ne peut pas avoir $a = 7$.
- ▷ Si $a = 8$, $97 \leqslant 64 + b^2 \leqslant 108$ donc $33 \leqslant b^2 \leqslant 44$. Ainsi, essayons d'encadrer b^2 par deux carrés parfaits : on a $25 < b^2 < 49$ donc $5 < b < 7$. Comme b est entier, $b = 6$, donc $a^2 + b^2 = 100$ est pair ce qui est impossible. On ne peut donc pas avoir $a = 8$.
- ▷ Si $a = 9$, $97 \leqslant 81 + b^2 \leqslant 108$ donc $16 \leqslant b^2 \leqslant 27$. Ainsi, essayons d'encadrer b^2 par deux carrés parfaits : on a $16 \leqslant b^2 < 36$ donc $4 \leqslant b < 6$. Ainsi $b = 4$ ou 5. Si $b = 5$, $a^2 + b^2 = 106$ qui est pair ce qui est impossible. Si $b = 4$, on a bien $a^2 = 81 > 16 = b^2$ et $a^2 + b^2 = 97$ est bien impair et entre 97 et 108, donc $(81, 16)$ est une solution.
- ▷ Si $a = 10$, $97 \leqslant 100 + b^2 \leqslant 108$ donc $b^2 \leqslant 8$. On a donc $b^2 < 9$, donc $b < 3$. En particulier $b = 0, 1$ ou 2. Si $b = 0$ ou 1, $b^2 < 2$, donc Tristan a strictement moins de 2 moutons ce qui est impossible. Si $b = 2$, $a^2 + b^2 = 104$ qui est pair ce qui est impossible, il n'y a donc pas de solution.

Ainsi on obtient que Noémie a 81 moutons et Tristan en a 16.

Commentaire des correcteurs : Beaucoup d'élèves n'ont pas vu l'intérêt de montrer que la solution qu'ils ont trouvée est unique. Ceci amène à des exclusions/disjonctions de cas incomplètes voire inexistantes. C'est la raison principale qui a conduit à la perte de nombreux points, bien que la solution était quasiment toujours bien trouvée. L'inégalité $a \leqslant 10$ est souvent trouvée tout comme l'exclusion des entiers pairs compris entre 97 et 108. Cependant, la disjonction de cas est rarement complète.

Exercice 5. Soit $ABCD$ un trapèze (non croisé) tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles. Notons E le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Montrer que l'aire du triangle ADE est égale à l'aire du triangle BCE.

Solution de l'exercice 5



On note $|ABC|$ l'aire du triangle ABC.
On utilise ici la formule donnant que l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit des longueurs de sa base et de sa hauteur. Pour montrer que deux triangles ont même aire, on peut donc essayer de leur trouver chacun une base et une hauteur ayant les mêmes longueurs. Cela est sans succès si l'on s'intéresse uniquement aux triangles AED et BEC. En revanche, on peut s'intéresser aux triangles ADC et DBC. En effet, ces triangles partagent une base commune qui est le segment $[CD]$ et la hauteur issue du sommet A dans le triangle ADC a la même longueur que la hauteur issue du sommet B dans le triangle DBC. Ainsi, si on note X le pied de la hauteur issue du sommet A et Y le pied de la hauteur issue du sommet B, les droites (AX) et (BY) sont perpendiculaires à la droite (CD) donc elles sont parallèles. Le quadrilatère $ABYX$ est donc un parallélogramme avec deux angles droits, c'est donc un rectangle et $AX = BY$.
On a donc :

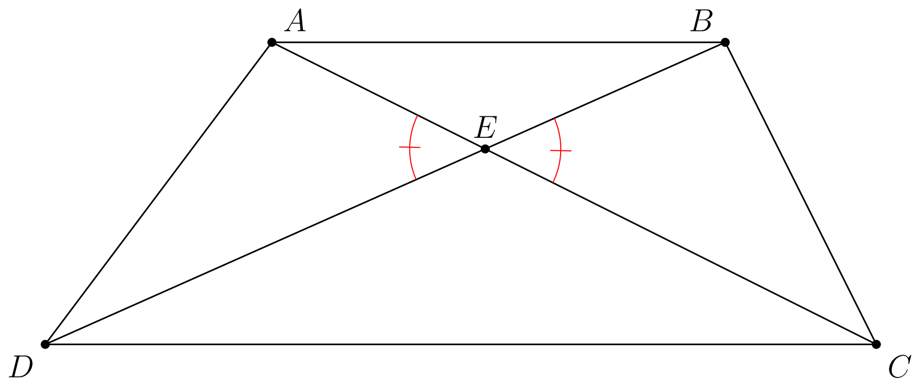
$$|ADC| = \frac{DC \cdot AX}{2} = \frac{DC \cdot BY}{2} = |DBC|$$

On déduit :

$$|ADE| = |ADC| - |DEC| = |DBC| - |DEC| = |EBC|$$

et les triangles ADE et BCE possèdent la même aire.

Solution alternative n°1



On montre l'égalité d'aire directement à l'aide de la formule suivante pour calculer l'aire d'un triangle XYZ : $|XYZ| = \frac{1}{2}XY \cdot XZ \cdot \sin\widehat{YXZ}$

On applique cette formule pour montrer que les triangles AED et BEC on la même aire.
Puisque les droites (AB) et (CD) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$$

Cette égalité ce réécrit :

$$EA \cdot ED = EB \cdot EC$$

De plus les angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{BEC}$ sont opposés par le sommet, ils sont donc égaux. On a alors $\sin\widehat{AED} = \sin\widehat{BEC}$. En combinant avec l'égalité obtenue ci-dessus, on trouve bien :

$$|AED| = \frac{1}{2}EA \cdot ED \cdot \sin\widehat{AED} = \frac{1}{2}EB \cdot EC \cdot \sin\widehat{BEC} = |BEC|$$

et les triangles AED et BEC ont bien même aire.

Commentaire des correcteurs : La définition du trapèze est manifestement source de nombreuses confusions. Nous rappelons qu'un trapèze non croisé est un quadrilatère possédant deux côtés opposés parallèles. Dans le cas de cet exercice, les côtés parallèles en question sont $[AB]$ et $[CD]$. Cependant, beaucoup d'élèves ont supposé d'office que les côtés non parallèles étaient de même longueur ! Beaucoup d'élèves se sont donc restreints à ce cas, correspondant à un trapèze dit "isocèle", c'est-à-dire pour lequel on a $AD = BC$. Mais ce cas est plus simple à traiter que le cas général car un trapèze isocèle possède un axe de symmétrie coupant la figure en deux parties isométriques. La preuve qui marche dans le cas général est un peu plus astucieuse et a été trouvée par relativement peu d'élèves.

Exercice 6. On pose 12 cailloux sur un échiquier à 8 lignes et 8 colonnes. Chaque caillou a été posé sur une des 64 cases de l'échiquier (avec au plus un caillou par case). Montrer qu'il est possible de colorier en rouge 4 lignes et 4 colonnes de façon à ce que chacun des 12 cailloux soit sur une case rouge.

Solution de l'exercice 6 On note x_i le nombre de cailloux présent sur la $i-$ième colonne. Quitte à renommer, on peut supposer sans perte de généralité que $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant ... \geqslant x_8$.
On a forcément $x_1 + x_2 + ... + x_8 = 12$. On va procéder par disjonction des cas :

- ▷ Soit $x_5 = 0$ et alors $x_6 = x_7 = x_8 = 0$ et il suffit de choisir les 4 premières colonnes (et n'importe quelles lignes).
- ▷ Soit $x_5 = 1$ et alors $1 \geqslant x_6 \geqslant x_7 \geqslant x_8$ et donc $x_5+x_6+x_7+x_8 \leqslant 4$ soit encore $x_1+x_2+x_3+x_4 \geqslant 8$. On chosit donc les 4 première colonnes qui contiennent au moins 8 cailloux. Il reste au plus 4 cailloux et il suffit donc de choisir pour chacun des cailloux manquant sa ligne.
- ▷ Soit $x_5 = 2$ et donc $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4 \geqslant 2$ soit encore $x_1 + ... + x_4 \geqslant 8$. Le même argument permet donc de conclure.
- ▷ Soit $x_5 \geqslant 3$ et donc $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4 \geqslant 3$ soit encore $x_1 + ... + x_4 + x_5 \geqslant 15$ ce qui est absurde car il n'y a que 12 cailloux en tout.

En conclusion, il est toujours possible de trouver 4 lignes et 4 colonnes contenant tous les cailloux.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile. Tout d'abord une partie des élèves a voulu colorier les cases avant de placer les cailloux, alors que le placement des cailloux est à priori quelconque. Beaucoup d'élèves ont eu la bonne idée de colorier les lignes avec le plus de cailloux , mais trop nombreux sont ceux qui ont essayé de raisonner « dans le pire cas » et déterminé que le pire cas était celui avec 4 lignes avec 2 cailloux 4 lignes avec 1 : ce n'est pas parce qu'un cas semble le pire qu'il l'est réellement, il faut donner une démarche qui permet de traiter tous les cas possible. Il n'était pas possible d'affirmer qu'au plus ou au moins 4 lignes contenaient deux cailloux, car pour chacune de ces affirmations, on peut trouver un arrangement de 12 cailloux ne respectant pas la propriété énoncée. Ainsi, même si beaucoup d'élèves ont eu la bonne intuition du procédé, peu ont réussi à fournir une solution correcte et rigoureuse. Finalement quelques élèves n'utilisaient pas le nombre particulier de cailloux donné dans l'énoncé, alors que l'énoncé devient faux si on remplace 12 par 13 cailloux.

Exercice 7. Soit k un entier strictement positif. Pour tout réel x, le nombre réel $|x|$ est la valeur absolue de x, qui vaut x si x est positif, $-x$ si x est négatif. Trouver le nombre de triplets (x, y, z) où x, y, z sont des entiers tels que $x + y + z = 0$ et $|x| + |y| + |z| = 2k$.

Solution de l'exercice 7 Analysons déjà la première condition : si $x + y + z = 0$, forcément le plus grand des trois nombres est positif, et le plus petit négatif. Regardons donc ce que ça donne si $x \geqslant 0$ et $z \leqslant 0$:

- Si $y \geqslant 0$, alors $z = -(x+y)$ et $x+y$ est positif, donc $2k = |x|+|y|+|z| = x+y+(x+y) = 2(x+y)$ donc $x + y = k$ donc $z = -k$. Ainsi les solutions sont de la forme $(x, k - x, -k)$, avec $x \geqslant 0$ et $k - x \geqslant 0$ i.e. $0 \leqslant x \leqslant k$.

  Ainsi essayons de compter le nombre de solutions de la forme (x, y, z) avec deux nombres positifs et un négatif : comme l'équation est symétrique, toutes les solutions sont des permutations de $(x, k - x, -k)$ avec $0 \leqslant x \leqslant k$. Comme il n'y a qu'un nombre strictement négatif, il y a trois choix pour choisir lequel c'est (x, y ou z), puis ensuite $k + 1$ possibilités pour choisir les deux variables qui restent car il y a $k + 1$ entiers entre 0 et k. On a donc $3(k + 1)$ possibilités.
- On a déjà dénombré toutes les solutions dont parmi x, y, z deux sont positifs. Comme toute solution contient un nombre négatif et un positif, il reste donc à dénombrer les solutions contenant un nombre positif et deux strictement négatifs : on va suppoer que y et z sont strictement négatifs et x positifs. On a alors $x = -(y + z)$ qui est positif, donc $|x| + |y| + |z| = -(y + z) - y - z = -2(y + z)$ donc $y + z = -k$ donc $x = k$. Ainsi les solutions sont de la forme $(k, y, -k - y)$, avec $y < 0$ et $-k - y < 0$ i.e. $0 > y > -k$. Comme y est entier, la condition précédente est équivalente à $-1 \geqslant y \geqslant -(k - 1)$

  Ainsi essayons de compter le nombre de solutions de la forme (x, y, z) avec deux nombres strictement négatifs et un positif : comme l'équation est symétrique, toutes les solutions sont des permutations de $(k, y, -k - y)$ avec $-1 \geqslant y \geqslant -(k - 1)$. Comme il n'y a qu'un nombre strictement négatif, il y a trois choix pour choisir lequel c'est (x, y ou z), puis ensuite $k - 1$ possibilités pour choisir les deux variables qui restent car il y a $k-1$ entiers entre -1 et $-(k-1)$. On a donc $3(k - 1)$ possibilités.

En sommant, on obtient qu'on a $3(k + 1) + 3(k - 1) = 6k$ solutions.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile, mais nombreux sont les élèves qui ont eu des idées pertinentes pour avancer, comme celle de regarder le signe de x, y, z ou celle de réécrire l'équation. Nous avons particulièrement apprécié que des élèves, même en ne produisant pas de solution complète, aient tenu à donner leurs idées. C'est tout à fait ce comportement qui était attendu.

Concernant l'exercice, attention pour la partie comptage : certains élèves ont supposé par exemple que z était négatif, mais oublient que x ou y peuvent aussi être négatifs. Même si on se peut se ramener à un cas particulier par un argument de symétrie, il faut compter tous les cas pour le comptage final, sans compter deux fois les mêmes solutions. De nombreux élèves sont n'ont pas compris que k était fixé par l'énoncé, et donc qu'il y avait bien un nombre fini de solutions.

Exercice 8. Soit S un ensemble inclus dans $\{1, 2, 3, \ldots, 199, 200\}$. On dit que S est *joli* si, pour tous les éléments a et b de S, le nombre $a - b$ n'est pas un nombre premier. Quel est le nombre maximal d'éléments d'un joli ensemble inclus dans $\{1, 2, 3..., 199, 200\}$?

Note : On dit qu'un ensemble A est inclus *dans un ensemble B si tout élément de A est aussi un élément de B.*

Solution de l'exercice 8 Soit S un ensemble joli, regardons un élément n appartenant à S : comme n est dans S, $n+2$, $n+3$, $n+5$, $n+7$ ne sont pas dans S.

Si $n+1$ n'est pas dans S, alors $n+1, n+2, n+3, n+5, n+7$ ne sont pas dans S. On peut avoir $n+4$ ou $n+6$ dans S, mais pas les deux car ils ont une différence de 2. En particulier parmi les 8 entiers, au plus 2 sont dans S.

Si $n+1$ est dans S, alors $n+1+3 = n+4$, $n+1+5 = n+6$, ne sont pas dans S. Parmi les 8 entiers entre n et $n+7$, il n'y a que deux entiers dans S : n et $n+1$.

Il semble naturel de découper les entiers de 1 à 200 en 25 groupes de 8 entiers consécutifs. Donnons-nous un groupe de 8 entiers consécutifs C, il ne peut avoir plus de 2 éléments qui sont dans S : en effet soit aucun élément de C n'est dans S et le propos précédent est vrai, soit il en existe au moins un. Dans ce cas notons n l'élément minimum dans C et S : dans ce cas, tout élément appartenant à C et S est entre n et $n+7$: il y a donc au plus 2 éléments qui sont à la fois dans S et C.

Ainsi dans chacun des 25 groupes, il y a au plus 2 éléments de S : un ensemble joli a donc au plus $2 \times 25 = 50$ éléments

Réciproquement montrons qu'il existe un ensemble de cardinal 50 joli : on voit bien que pour avoir un tel ensemble il vaut mieux avoir toujours deux entiers dans un bloc de 8, et si le bloc commence par n, on peut prendre $(n, n+1)$, $(n, n+4)$, $(n, n+6)$. Après quelques tests, la solution qui a l'air de mieux marcher est de prendre des couples de la forme $(n, n+4)$ en commençant par 1 : i.e. de considérer S l'ensemble des nobmres de la forme $4k+1$ avec $0 \leqslant k \leqslant 49$. Cet ensemble est bien inclus dans $\{1, 2, \ldots, 2019, 2020\}$ car si $0 \leqslant k \leqslant 49$, $1 \leqslant 4k+1 \leqslant 197$, il est de cardinal 50, et comme $4k+1-(4l+1) = 4(k-l)$, toute différence de deux éléments de S est divisible par 4 donc non première. Ainsi S est joli.

On obtient donc que le nombre maximal d'éléments d'un ensemble joli inclus dans $\{1, 2, 3, \ldots, 199, 200\}$ est 50.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était très difficile et n'a été complètement résolu que par un élève. Néanmoins, un certain nombre d'élèves ont trouvé un ensemble joli, sans forcément prouver que leur ensemble était joli. Nous rappelons que toute affirmation doit être prouvée. Nous notons quelques confusions sur les nombres premiers que nous mettons au clair ici : le nombre 1 n'est pas premier et un nombre pair peut être premier (2 est le seul nombre pair premier). Attention enfin à bien lire l'énoncé, certains élèves ont tenté de répondre à un problème complètement autre.

Exercices lycéens

Exercice 9. Alexie et Baptiste possèdent chacun un immeuble. Chaque étage du batiment d'Alexie possède 3 salles de bains et 2 chambres. Baptiste quant à lui, possède 4 salles de bains et 3 chambres par étage. Il y a au total 25 salles de bains et 18 chambres. Trouver le nombre d'étages des immeubles d'Alexie et Baptiste.

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 9 On pose a le nombre d'étages de l'immeuble d'Alexie et b le nombre d'étages de l'immeuble de Baptiste. L'énoncé se résume au système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} 3a + 4b = 25 \\ 2a + 3b = 18 \end{cases}$$

On multiplie la première ligne par 2 et la seconde par 3 et on obtient

$$\begin{cases} 6a + 8b = 50 \\ 6a + 9b = 54 \end{cases}$$

puis on soustrait pour obtenir

$$b = 4.$$

Il suffit maintenant de réinjecter pour avoir $6a = 50 - 32 = 18$ et donc

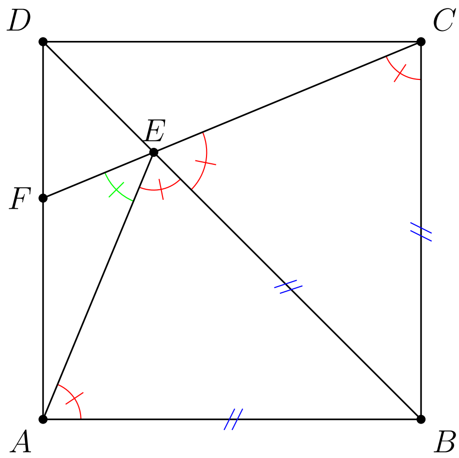
$$a = 3$$

Alexie a un immeuble de 3 étages et Baptiste un immeuble de 4 étages.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est globalement très bien réussi. Les erreurs viennent pour la plupart de la définition des variables. En effet, un petit nombre d'élèves considèrent le nombre de chambres et de salles de bain comme des inconnues alors qu'ils sont donnés dans l'énoncé, ce qui entraîne des calculs parfois invraisemblables. Nous notons aussi une faible quantité d'erreurs de calculs.

Exercice 10. Soit $ABCD$ un carré et E le point du segment $[BD]$ tel que $EB = AB$. On définit le point F comme le point d'intersection des droites (CE) et (AD). Trouver la valeur de l'angle $\widehat{FEA}$.

Solution de l'exercice 10



Puisque le quadrilatère $ABCD$ est un carré, on obtient que $EB = AB = CB$. On en déduit que les triangles ABE et BEC sont tous les deux isocèles en B. Comme $\widehat{ABE} = 45°$, on obtient par la somme des angles dans le triangle ABE que $180° = \widehat{ABE} + \widehat{BAE} + \widehat{AEB} = 45° + 2 \cdot \widehat{AEB}$, donc $\widehat{AEB} = \frac{135°}{2} = 67,5°$. Comme $\widehat{CBE} = 45°$, on obtient par la somme des angles dans le triangle CBE que $180° = \widehat{CBE} + \widehat{BCE} + \widehat{CEB} = 45° + 2 \cdot \widehat{CEB}$, donc $\widehat{CEB} = \frac{135°}{2} = 67,5°$.

En particulier, on a $\widehat{AEB} = \widehat{CEB} = 67,5°$.

Finalement, comme F, E, C sont alignés, on obtient

$$\widehat{FEA} = 180° - \widehat{AEC} = 180° - (\widehat{AEB} + \widehat{BEC}) = 180° - 135° = 45°$$

Commentaire des correcteurs : L'exercice est dans l'ensemble très bien réussi. Cependant, un certain nombre d'élèves a commis l'erreur suivante : au lieu de considérer $EB = AB$ ils considéraient $EB = EA$, ce qui ne donnait pas le même résultat. On soulignera l'importance de réaliser une figure propre, qui peut permettre d'éviter certaines erreurs qui ont été commises. De plus, une figure propre et grande, particulièrement dans cet exercice, permet de vérifier que les valeurs d'angles trouvées sont cohérentes.

Exercice 11. Noémie et Tristan sont des bergers. Chacun possède un nombre de moutons qui est un carré parfait, c'est-à-dire un entier qui peut s'écrire de la forme $n^2 = n \times n$ avec n un entier positif ou nul. On note donc a^2 le nombre de moutons de Noémie et b^2 celui de Tristan. Après un rapide comptage du nombre total de moutons, ils déduisent que $97 \leqslant a^2 + b^2 \leqslant 108$. Déterminer le nombre de moutons de chacun en sachant que :

1. Noémie a strictement plus de moutons que Tristan ;
2. chacun d'eux a au moins 2 moutons ;
3. le nombre total de moutons $a^2 + b^2$ est impair.

Solution de l'exercice 11

Notons que $a^2 \leqslant 108$ donc $a \leqslant 10$. De plus $97 \leqslant a^2 + b^2 \leqslant 2a^2$ car Noémie a plus de moutons que Tristan, donc $a^2 \geqslant 48,5$, donc comme a^2 est entier, $a^2 \geqslant 49$ donc $a \geqslant 7$. Il reste donc quelques cas à traiter :

- Si $a = 7$, $97 \leqslant 49 + b^2 \leqslant 108$ donc $48 \leqslant b^2 \leqslant 59$. Comme $b^2 \leqslant a^2 = 49$, on peut essayer d'encadrer b^2 entre deux carrés parfaits : on a $36 < 48 \leqslant b^2 \leqslant 49$ donc $6 < b \leqslant 7$. Comme b est entier $b = 7$, donc $a^2 + b^2 = 2 \times 49$ est pair ce qui est impossible. On ne peut pas avoir $a = 7$.
- Si $a = 8$, $97 \leqslant 64 + b^2 \leqslant 108$ donc $33 \leqslant b^2 \leqslant 44$. Ainsi, essayons d'encadrer b^2 par deux carrés parfaits : on a $25 < b^2 < 49$ donc $5 < b < 7$. Comme b est entier, $b = 6$, donc $a^2 + b^2 = 100$ est pair ce qui est impossible. On ne peut donc pas avoir $a = 8$.
- Si $a = 9$, $97 \leqslant 81 + b^2 \leqslant 108$ donc $16 \leqslant b^2 \leqslant 27$. Ainsi, essayons d'encadrer b^2 par deux carrés parfaits : on a $16 \leqslant b^2 < 36$ donc $4 \leqslant b < 6$. Ainsi $b = 4$ ou 5. Si $b = 5$, $a^2 + b^2 = 106$ qui est pair ce qui est impossible. Si $b = 4$, on a bien $a^2 = 81 > 16 = b^2$ et $a^2 + b^2 = 97$ est bien impair et entre 97 et 108, donc $(81, 16)$ est une solution.
- Si $a = 10$, $97 \leqslant 100 + b^2 \leqslant 108$ donc $b^2 \leqslant 8$. On a donc $b^2 < 9$, donc $b < 3$. En particulier $b = 0, 1$ ou 2. Si $b = 0$ ou 1, $b^2 < 2$, donc Tristan a strictement moins de 2 moutons ce qui est impossible. Si $b = 2$, $a^2 + b^2 = 104$ qui est pair ce qui est impossible, il n'y a donc pas de solution.

Ainsi on obtient que Noémie a 81 moutons et Tristan en a 16.

Commentaire des correcteurs : L'exercice n'était pas très difficile mais nécessitait de tester beaucoup de cas. Beaucoup d'élèves n'ont pas compris qu'il faut prouver que la solution qu'ils ont trouvé est bien la seule et de fait, plusieurs élèves affirment que "l'énoncé nous dit qu'il y a une solution et qu'elle est unique", ce qui n'est pourtant pas précisé dans l'énoncé. Beaucoup d'élèves s'arrêtent une fois qu'ils ont trouvé une solution ou disent qu' "il est facile de traiter les cas restants". Toutefois, nous attendions que tous les cas soient traités car si les cas ne sont pas écrits, on ne peut pas savoir s'ils ont effectivement été traités. Enfin, quelques élèves donnent le couple (a, b) au lieu du couple (a^2, b^2). Nous rappelons donc l'importance de bien lire l'énoncé.

Exercice 12. On place 9 entiers dans les cases d'une grille 3×3 de telle sorte que la somme des nombres d'une colonne ou d'une ligne soit toujours impaire. Quelles valeurs peut prendre le nombre de cases paires d'une telle configuration ?

Solution de l'exercice 12 On note $a_{i,j}$ le nombre situé à la case de $i-$ème ligne et de la $j-$ème colonne, où $1 \leqslant i, j \leqslant 3$. Comme la somme sur les trois lignes est impaire, la sommes des $a_{i,j}$ est impaire et donc il y a un nombre impair de nombre impairs. Le nombre de cases content un numéro pair peut donc valoir $0, 2, 4, 6$ ou 8. Il reste à voir lesquelles de ces valeurs sont effectivement atteignables.

- 0 est possible car il suffit de mettre neuf 1 dans la grille.
- 8 n'est pas possible, car sinon, le principe des tiroirs assurerait l'existence d'une ligne contenant 3 nombres pairs (donc de somme paire).
- 4 est possible, on choisit $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$ et le reste valant 1. Les sommes valent 1 ou 3 et sont donc impaires.
- 6 est possible. On pose $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{23} = a_{31} = a_{33} = 0$ et le reste égal à 1. Les sommes valent toutes 1 et sont impairs.
- 2 est impossible car toute ligne doit contenir un nombre impair de nombre impairs donc nos deux nombres pairs doivent être sur la même ligne. Mais alors le même raisonnement s'applique sur les colonnes et donc ils sont sur la même colonne donc la même case ce qui est absurde.

Le nombre de cases avec un numéro paire peut donc prendre les valeurs $0, 4$ et 6.

Commentaire des correcteurs :

L'exercice a été résolu par un nombre significatif d'élèves. Pour résoudre complètement l'exercice, il fallait distinguer deux étapes : montrer que si une grille vérifie la propriété, elle contient $0, 4$ ou 6 nombres paires puis donner une configuration de grille contenant bien $0, 4$ ou 6 nombres paires et qui vérifie la propriété.

Plusieurs élèves ont identifié les solutions et donné des configurations qui fonctionnaient, ce qui a été apprécié. Cependant, parmi les raisonnements développés pour montrer que ce sont bien les seules valeurs possibles, voici quelques erreurs à ne pas faire :

- Plusieurs élèves ont invoqué le principe des tiroirs pour dire qu'au moins une ligne possède 2 cases impaires si la grille contient 4 nombres impairs. en effet, le principe des tiroirs dit plutôt qu'au moins une ligne contient au moins 2 cases impaires, mais on pourrait avoir une ligne avec 3 cases impaires et une autre avec 1 case impaire.
- Plusieurs élèves n'ont pas vu que la grille pouvait contenir 6 nombres pairs à cause du raisonnement erroné suivant : les élèves donnent une configuration avec 4 nombres pairs et montrent qu'on ne peut pas rajouter de nombre pairs à cette configuration tout en respectant l'hypothèse. Mais cela ne montre pas qu'une configuration avec 6 nombres paires n'est pas possible.
- Des élèves ont remarqué que chaque ligne contient 0 ou 2 nombres paires et en déduisent que toutes les lignes de la grille contiennent 0 nombres paires ou tuotes les lignes de la grille contiennent 2 nombres paires. Ils ont donc manqué le cas où certaines lignes contiennent 0 nombres paires et d'autres 2 nombres paires.

Exercice 13. Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x, puis on appelle *partie fractionnaire* de x le nombre $\langle x \rangle$ défini comme $\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$. Combien y a-t-il de réels x vérifiant $1 \leqslant x \leqslant 10$ et $\langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle$?

<u>*Solution de l'exercice 13*</u> Essayons d'exprimer x^2 à partir de $\lfloor x \rfloor + \langle x \rangle$ pour calculer sa partie fractionnaire. On écrit $x = \lfloor x \rfloor + \langle x \rangle$ d'où $x^2 = (\lfloor x \rfloor)^2 + 2\lfloor x \rfloor \cdot x + \langle x \rangle^2$.

Ainsi si $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle^2$, on obtient que $\lfloor x^2 \rfloor = x^2 - \langle x^2 \rangle = (\lfloor x \rfloor)^2 + 2\lfloor x \rfloor \cdot x$ est entier, donc $2\lfloor x \rfloor \cdot x$ aussi. En particulier, si on pose $k = \lfloor x \rfloor$, comme $k \geq 1$, on sait que x est de la forme $\frac{q}{2k}$. Comme k est le plus petit entier inférieur ou égal à x, on a $k \leq x < k+1$ donc $2k^2 \leq q < 2k^2 + 2k$. Posons $q = r + 2k^2$ avec $0 \leq r < 2k$, on a $x = k + \frac{r}{2k}$.

Réciproquement, supposons que x est de la forme $k + \frac{r}{2k}$ avec $k \geq 1$ et $0 \leq r < 2k$, on obtient que $k \leq x < k+1$, donc $\lfloor x \rfloor = k$, donc $\langle x \rangle = \frac{r}{2k}$.

De plus, $x^2 = k^2 + r + \frac{r^2}{(2k)^2}$ vérifie $k^2 + r \leq x^2 < k^2 + r + 1$, donc $\lfloor x^2 \rfloor = k^2 + r$ ce qui donne $\langle x^2 \rangle = \frac{r^2}{(2k)^2} = \langle x \rangle^2$: x est solution.

Reste juste à dénombrer combien de tels x sont entre 1 et 10 : comme $k = \lfloor x \rfloor$ on doit avoir $1 \leq k \leq 10$. Pour $1 \leq k \leq 9$, on a $1 \leq k \leq k + \frac{r}{2k} < k + 1 \leq 10$, donc x est bien entre 1 et 10. Il y a donc à k fixé $2k$ solutions, on a donc $2(1 + 2 + \cdots + 8 + 9) = 90$ solutions avec $1 \leq k \leq 9$. Si $k = 10$, $x \geq 10$ donc $x = 10$ qui est bien solution (cela correspond à $k = 10$, $r = 0$). Il y a donc en tout 91 solutions.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> L'exercice était visiblement assez difficile et perturbant à cause de sa position dans le sujet, ce qui en a dérouté plus d'un. Ainsi, à peine un dixième des élève fournit une solution parfaite et obtient les 7 points de l'exercice. Nous avons valorisé les justifications plus que la réponse en elle-même. La solution la plus courante, qui est celle proposée dans le corrigé, est composée de deux étapes : d'abord déterminer la forme des solutions générales de l'équation puis de compter correctement pour obtenir le résultat attendu de 91 solutions à l'équation. Revenons sur les erreurs les plus courantes rencontrées, et donnons quelques conseils.

- ▷ Rappelons tout d'abord que toute affirmations qui n'est pas justifiée ne rapporte aucun point. Nous attendons donc un soin particulier à la rédaction. De la même manière, un long texte décrivant une intuition sans apporter d'argument rigoureux, dont un exemple serait la phrase "x est un paramètre réel et l'équation n'est pas très contraignante donc il y a forcément une infinité de solutions" n'a pas valeur de preuve non plus.
- ▷ Plusieurs élèves ont cherché à démontrer que les entiers étaient les seules solutions. Pour cela, certains ont montré que les entiers vérifiaient l'équation et ont donné des exemples de réels non entiers qui ne vérifient pas l'équation. Ce raisonnement ne permet cependant pas de montrer que les entiers sont les seules solutions. Il aurait fallu pour cela montrer que CHACUN des réels non entiers ne vérifie pas l'équation.
- ▷ Concernant les erreurs plus mathématiques, plusieurs élèves ont eu l'impression que supposer x rationnel simplifiait la preuve. Mais la plupart du temps, lorsque le raisonnement marchait pour les rationnels, il pouvait être immédiatement adapté au cas où x était un réel quelconque. Attention toutefois à la formulation : on n'a pas le droit d'écrire que $< x >= \frac{b}{10^k}$ dans le cas où x est supposé seulement rationnel. Il faut que x soit de plus décimal. Aussi, plusieurs élèves pensent avoir justifié que si x n'est pas entier, alors $< x >$ est nécessairement l'inverse d'un entier. Mais ce n'est pas vrai (prendre $\frac{11}{4}$ pour contre-exemple).
- ▷ Une erreur d'un autre ordre fréquemment rencontrée est, une fois arrivé à la condition $2 < x > \lfloor x \rfloor$ entier, d'affirmer que cela impliquait que $2 < x >$ est entier. Dans le même style, nous avons pu lire parfois que $< 2 < x > \lfloor x \rfloor >= 0$ impliquait $2 < x > \lfloor x \rfloor = 0$.
- ▷ La dernière source d'erreurs (recontrée maintes fois à tout endroit de la preuve) est de croire sous une certaine forme, que l'on a toujours $\lfloor x \rfloor^2 = \lfloor x^2 \rfloor$. La morale est donc de faire bien attention lorsque l'on manipule les parties fractionnaires et entières.

▷ Il est arrivé que des élèves ayant trouvé la forme générale des solutions (partie la plus difficile) et se trompent sur le dénombrement, le plus souvent en prenant en compte les solutions entre 10 et 11. Ce genre d'étourderie est frustrante pour les correcteurs et pour l'élève.

Exercice 14. Trouver les entiers n supérieurs ou égaux à 2 tels que, si on note a le plus petit diviseur premier de n, on peut trouver un diviseur positif de n noté d tel que $n = a^3 + d^3$.

Solution de l'exercice 14 Notons que d divise n et d^3 donc d divise a^3. Comme a est premier, on obtient que $d = 1, a, a^2$ ou a^3.

Si $d = 1$ l'équation devient $n = a^3+1$. Comme a divise n, a divise $n-a^3 = 1$ donc $a = 1$ contradiction. Sinon, $d = a, a^2$ ou a^3 est donc il est de la même parité que a donc d^3 est de la même parité que a^3. En particulier $n = a^3 + d^3$ est une somme de deux nombres de même parité, donc il est pair. Comme n est divisible par 2, on a nécessairement $a = 2$. Ainsi $d = 2, 4, 8$.

Vérifions les potentielles valeurs de n :

- ▷ Si $a = 2$ et $d = 8$, on obtient $n = 8 + 512 = 520 = 8 \times 65$ donc d divise bien n, le plus petit diviseur de n différent de 1 vaut 2 : $n = 520$ est solution.
- ▷ Si $a = 2$ et $d = 4$, $n = 8 + 64 = 72 = 4 \times 18$ donc d divise bien n, le plus petit diviseur de n différent de 1 vaut 2 : $n = 72$ est solution.
- ▷ Si $a = 2$ et $d = 2$, $n = 8+8 = 16 = 2\times 8$ donc d divise bien n, le plus petit diviseur de n différent de 1 vaut 2 : $n = 16$ est solution.

Les solutions sont donc $n = 16$, $n = 72$, $n = 520$.

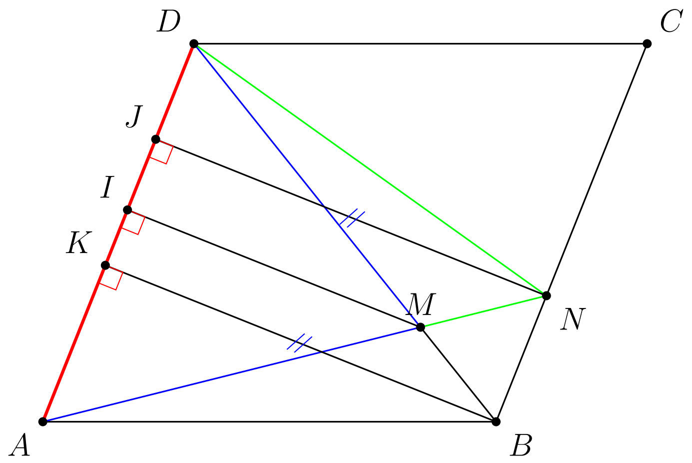
Commentaire des correcteurs : Cet exercice était très difficile et demandait une bonne maitrise des raisonnements de nature arithmétique, ce qui est manifeste chez un nombre significatif d'élèves. A l'inverse, voici quelques erreurs communes rencontrées pendant la correction :

- ▷ Des élèves ont obtenu leurs solutions à l'issue de leur raisonnement mais ont oublié de vérifié que les entiers n qu'ils ont trouvés satisfont bien la condition. Cette étape est pourtant nécessaire. Comme conséquence de cet oubli, certains élèves avaient dans leur ensemble de solutions des entiers n ne satisfaisant pas la propriété, même s'ils les avaient obtenus à l'aide de leur raisonnement.
- ▷ Plusieurs élèves ont affirmé que $a = 1$, oubliant que 1 n'est pas un nombre premier, bien que ce soit bien le plus petit diviseur positif de n.

Certains élèves ont proposé des conjectures sans pour autant être capable de les démontrer. Il s'agit là d'un bon comportement car émettre des conjectures permet d'orienter le raisonnement. Toutefois, certaines conjectures ne s'accordaient pas vraiment avec les hypothèses données, il faut donc être vigilent et bien lire les énoncés des problèmes. Il est aussi intéressant, en l'absence d'idées, de tester certaines valeurs de n pour voir si elles vérifient l'énoncé. Cela peut permettre de déterminer les solutions mais aussi de s'approprier les hypothèses données en voyant quels entiers n ne fonctionnent pas.

Exercice 15. Soit $ABCD$ un parallélogramme d'aire 1 et M un point appartenant au segment $[BD]$ tel que $MD = 3MB$. On note N le point d'intersection des droites (AM) et (CB). Calculer l'aire du triangle MND.

Solution de l'exercice 15



Dans la suite, on notera $|XYZ|$ l'aire du triangle XYZ.

On utilise que l'aire d'un triangle est égale à laa moitié du produit des longueurs de sa base et de sa hauteur. Ainsi, pour comparer des aires de différents triangles, on peut essayer de leur trouver une base commune et de comparer les hauteurs.

Tout d'abord, notons que l'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale au double de l'aire du triangle ABD car les triangles ABD et CDB sont isométriques. On a donc $|ABD| = \frac{1}{2}$.

On veut désormais comparer l'aire du triangle MND et l'aire du triangle ABD.

Malheureusement, ces deux triangles n'ont pas de base commune. En revanche, les triangles AND et ABD possèdent le côté AD en commun. On trace donc les hauteurs issues respectivement des sommets N et B dans les triangles AND et ABD. On note K le pied de la hauteur issue du sommet B dans le triangle ABD et J le pied de la hauteur issue du sommet N dans le triangle ADN. On a alors

$$\frac{|AND|}{|ABD|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot NJ}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot BK} = \frac{NJ}{BK}$$

Puisque les droites (MI) et (BK) sont perpendiculaires au segment $[AD]$, elles sont parallèles. Le quadrilatère $JNBK$ est donc un parallèlogramme possédant deux angles droits, c'est donc un rectangle. On a donc $NJ = BK$ et donc

$$|AND| = |ABD| = \frac{1}{2}$$

On applique la même méthode pour comparer les aires des triangles AND et AMD. On introduit J le pied de la hauteur issue du sommet N et on observe que

$$\frac{|AMD|}{|AND|} = \frac{|AMD|}{|ABD|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot MI}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot BK} = \frac{MI}{BK}$$

Les droites (BK) et (MI) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès pour les triangles ABK et AMI, on trouve

$$\frac{MI}{BK} = \frac{MD}{DB} = \frac{MD}{MB + MD} = \frac{3MB}{MB + 3MB} = \frac{3}{4}$$

On a donc $|AMD| = \frac{3}{4}|ABD| = \frac{3}{8}$
On peut alors conclure puisque

$$|MND| = |AND| - |AMD| = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

Ceci nous permet de conclure que l'aire du triangle MND vaut $\frac{1}{8}$.

Commentaire des correcteurs : Ce problème était difficile. L'idée principale (à retenir) est que si deux triangles ont la même base, le rapport des aires correspond au rapport des longueurs des hauteurs aposées à cette base, ou encore que si deux triangles possèdent des hauteurs de mêmes longueurs, le rapport des aires correspond au rapport des longueurs des bases. Plusieurs élèves ont su utiliser cette remarque pour obtenir des égalités d'aire intéressantes et résoudre au moins partiellement l'exercice et nous les en félicitons ! Malgré la difficulté de l'exercice, un nombre signficatif d'élève est parvenu à une solution complète, parfois de façon très originale. Voici toutefois plusieurs erreurs retrouvées fréquemment :

- De nombreux élèves ont mal placé les points M et N sur la figure, de telle sorte que $MB = 3MD$ alors que l'énoncé demandait $MD = 3MB$. Nous recommandons de bien lire l'énoncé d'un problème de géométrie pour être sûr d'avoir la bonne figure.
- Un nombre significatif d'élève a donné de mauvaises formules pour l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme. Attention, l'aire d'un parallélogramme n'est pas égal au produit des côtés.
- Un nombre significatif d'élève a supposé d'office qu'un parallélogramme d'aire 1 était un carré de côté 1 ou un rectangle. Si traiter un cas particulier est toujours une bonne idée, bien souvent la méthode employée pour déterminer l'aire du triangle MND pour un carré ne permettait pas de résoudre le problème pour un parallélogramme quelconque.
- Un nombre significatif d'élève a admis (parfois implicitement) que l'aire du triangle MND ne dépendait pas du parallélogramme choisi. Cette affirmation est difficile à prouver et nécessitait une preuve.
- Une poignée d'élève a affirmé que, puisque $AD = 3BN$, $MD = 3MB$ et $AM = 3MN$, on a aussi $A_{ADM} = 3A_{BNM}$. On a plutôt $A_{ADM} = 9A_{BNM}$.
- Une poignée d'élève a donné une réponse à partir de mesures effectuées à la règle sur la figure. Ce n'était pas ce qui était attendu dans l'exercice.
- Quelques élèves sont très avares de détails dans la rédaction. Une affirmation qui n'est pas justifiée ne rapporte pas de points, il faut donc veiller à prouver chaque affirmation.

Nous rappelons l'importance de tracer une grande figure, qui soit suffisamment générale pour ne pas induire l'élève en erreur (si le parallélogramme ressemble trop à un rectangle, on est tenté d'admettre que certains angles sont droits). Certaines figure étaient un peu trop petitee pour pouvoir être le support d'une réflexion. A l'inverse, nous avons pu apprécier plusieurs figures tracées avec soin et annotées de façon intélligente, manifestant la compréhension de l'exercice par l'élève.

Exercice 16. Suzanne multiplie deux entiers dont la différence vaut 5 et Martin multiplie deux entiers dont la différence vaut 8. Ils obtiennent le même résultat, que l'on note C. Quelles sont les valeurs possibles de C ?

Solution alternative n°1 On reprend les notations de la solution précédente : $C = a(a-5) = b(b-8)$. Remplacer a par $5-a$ change $a(a-5)$ en $(5-a)\times(-a) = a(a-5)$. En particulier, comme $a+5-a=5$, le maximum de a et $5-a$ est supérieur ou égal à $\frac{a+5-a}{2} = 2.5$, donc comme il est entier il est supérieur ou égal à 3. Ainsi, on peut supposer $a \geq 3$. De même on peut supposer $b \geq 4$.

Regardons déjà le cas où C est négatif : on a $0 \leq a \leq 5$, donc $a = 3, 4$ ou 5. On obtient alors $C = -6, -4, 0$. On a aussi $0 \leq b \leq 8$, donc $b = 4, 5, 6, 7$ ou 8, donc $C = -16, -15, -12, -7, 0$. En particulier le seul cas possible est $C = 0$, qui est bien possible si $a = 5$ et $b = 8$.

Désormais supposons $C > 0$. Comme $a \geq 3$ et $b \geq 4$ et $C = a(a-5) = b(b-8)$, on a $a \geq 6$ et $b \geq 9$. On peut alors essayer de comparer a et b.

Si $a \geq b$, $a(a-5) \geq b(b-5) > b(b-8)$, ce qui est contradictoire. Ainsi $a < b$. On a donc $a(a-5) = b(b-8) > a(b-8)$, donc $a-5 > b-8$, donc $a > b-3$. Ainsi comme a et b sont entiers, on a $b-1 \geq a \geq b-2$. Il reste donc deux cas à traiter :

- ▷ Si $a = b-1$, $C = b(b-8) = (b-1)(b-6)$, donc $b^2 - 8b = b^2 - 7b + 6$ donc $b = -6$ contradiction.
- ▷ Si $a = b-2$, $C = b(b-8) = (b-2)(b-7)$ donc $b^2 - 8b = b^2 - 9b + 14$, donc $b = 14$. On a $b(b-8) = 6 \times 14 = 84$, et pour $a = b-2 = 12$, $a(a-5) = 12 \times 7 = 84$, donc $a(a-5) = b(b-8)$: $C = 84$ est bien solution.

Ainsi les valeurs possibles de C sont 84 et 0.

Solution alternative n°2 On pose a l'entier de Suzanne, c'est à dire que $a(a-5) = C$ et b celui de Martin. Ainsi, $C = a(a-5) = b(b-8)$. L'idée est de "compléter les carrés", c'est à dire de faire apparaître une identité remarquable du type $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ en ajoutant et soustrayant la quantité qui manque. Par exemple on peut écrire

$$b(b-8) = b^2 - 8b + 4^2 - 16 = (b-4)^2 - 16$$

on peut remarquer que cela correspond à la mise sous forme canonique de polynôme du second degré $X(X-8)$.
De même, on a

$$a(a-5) = \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Bref, on peut alors écrire que

$$4C = (2a-5)^2 - 25 = (2b-8)^2 - 64$$

ce qui se réécrit

$$64 - 25 = 39 = (2b-8)^2 - (2a-5)^2 = (2(a+b) - 13)(2(b-a) - 3)$$

Comme $39 = 1 \cdot 39 = 3 \cdot 13$ il reste quelques cas à traiter à la main :

- ▷ $2(a+b) - 13 = 1$ et $2(b-a) - 3 = 39$ ce qui donne $4b - 16 = 40$ soit encore $b = 14$ et donc $C = 84$.
- ▷ $2(a+b) - 13 = -1$ et $2(b-a) - 3 = -39$ ce qui donne $4b - 16 = -40$ soit encore $b = -6$ et donc $C = 84$.
- ▷ $2(a+b) - 13 = 3$ et $2(b-a) - 3 = 13$ ce qui donne $4b - 16 = 16$ soit encore $b = 8$ et donc $C = 0$.
- ▷ $2(a+b) - 13 = -3$ et $2(b-a) - 3 = -13$ ce qui donne $4b - 16 = -16$ soit encore $b = 0$ et donc $C = 0$.

- ▷ $2(a+b)-13=13$ et $2(b-a)-3=3$ ce qui donne $4b-16=16$ soit encore $b=8$ et donc $C=0$.
- ▷ $2(a+b)-13=-13$ et $2(b-a)-3=-3$ ce qui donne $4b-16=-16$ soit encore $b=0$ et donc $C=0$.
- ▷ $2(a+b)-13=39$ et $2(b-a)-3=1$ ce qui donne $4b-16=40$ soit encore $b=14$ et donc $C=84$.
- ▷ $2(a+b)-13=-39$ et $2(b-a)-3=-1$ ce qui donne $4b-16=-40$ soit encore $b=-6$ et donc $C=84$.

Bref, C peut prendre la valeur 0 ou 84.

Commentaire des correcteurs : L'exercice, difficile, nécessitait de savoir effectuer des manipulations algébriques. Les élèves arrivent en général à bien retraduire l'énoncé à l'aide d'équations, même si certains posent trop de variables. Les élèves pensent souvent à deviner les solutions, ce qui est un très bon réflexe. Il y en a cependant très peu qui pensent à exploiter les symétries du problème. La plupart des approches consistent à utiliser une méthode bourrine autour de la résolution d'un trinôme du second degré en remarquant qu'un discriminant doit être un carré parfait. Nous sommes ravis de voir que certains élèves ont tenu à donner leurs pistes même non abouties, par exemple en étudiant la parité des variables manipulées. Ces pistes témoignent de beaucoup de créativité de la part des élèves.

Exercice 17. Est il possible de placer 10 points bleus, 10 points rouges et 10 points verts dans le plan tel que les distances entre points soient deux à deux distinctes et que

- ▷ pour chaque point bleu, le deuxième point le plus proche soit rouge;
- ▷ pour chaque point rouge, le deuxième point le plus proche soit vert;
- ▷ pour chaque point vert, le deuxième point le plus proche soit bleu?

Solution de l'exercice 17 Cherchons d'abord à placer les points en ligne droite de gauche à droite : on note les points $A_1, \ldots, A_{28}$ dans l'ordre avec les points A_{3k+1} bleus, les points A_{3k+2} verts, les points A_{3k+3} rouges pour $0 \leqslant k \leqslant 8$. On note d_i la distance entre A_i et A_{i+1} pour $1 \leqslant i \leqslant 29$. Il suffit ainsi de trouver des $(d_i)_{1\leqslant i\leqslant 29}$ strictement positifs de sorte à ce que les trois contraintes soient vérifiées, ensuite il est facile de construire des (A_i) correspondant (il suffit si on se place sur une droite graduée de mettre A_1 en 0 et A_i en $d_1 + \cdots + d_i$, on aura bien que d_i vaut la distance entre A_i et A_{i+1} pour $1 \leqslant i \leqslant 29$.

Notons que A_1 vérifie de façon immédiate la contrainte. De plus on souhaiterait pour i entre 2 et 28 que le point A_i ait pour plus proche voisin A_{i+1} et en deuxième plus proche voisin A_{i-1}, i.e. que $d_i < d_{i-1} < d_i + d_{i+1}$. Pour $i = 29$, on souhaiterait par contre avoir $d_{i-1} + d_{i-2} > d_i > d_{i-1}$.

Regardons ce que ça donne si on pose $d_i = \frac{1}{i+2}$ pour $1 \leqslant i \leqslant 27$, on a bien $d_i < d_{i-1}$ et on a $d_i + d_{i+1} - d_{i-1} = \frac{(i+1)(i+3)+(i+1)(i+2)-(i+2)(i+3)}{(i+1)(i+2)(i+3)} = \frac{(i+1)(i+3)-2(i+2)}{(i+1)(i+2)(i+3)} = \frac{i^2+2i-1}{(i+1)(i+2)(i+3)} > 0$.

Mais on peut avoir quelques problèmes avec des distances non deux à deux distinctes : tour à tour on modifie d_i pour i entre 1 et 27 de sorte à ce que les i premières distances soient différentes et à garder $d_i < d_{i-1} < d_i + d_{i+1}$ pour i entre 1 et 29. En remplaçant d_i par un réel assez proche de d_i les inégalités sont préservées, et de plus il existe un unique d_i pour lequel la distance entre A_i et A_j vaut celle de A_k à A_l, si j, k, l sont des entiers strictement positifs strictement inférieurs à i, il y a donc un nombre fini de d_i qui posent problème, on peut donc choisir d_i assez petit pour vérifier l'inégalité et avoir des distances entre les i premiers points deux à deux distinctes.

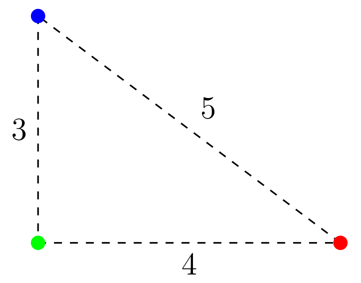
En particulier les 27 premiers points vérifient la contrainte du moment que la distance de A_{29} et A_{30} aux A_i pour $1 \leqslant i \leqslant 27$ est plus grande que d_{27}. On rajoute A_{29} rouge sur la même droite, à droite de A_{28}, à distance d_{28} de façon à ce que $d_{27} < d_{26} < d_{27} + d_{28}$ et toutes les distances entre les 29 points sont différentes. Reste juste à placer le dernier point : on place A_{30} de couleur verte à droite, tel que si on note d_{29} la distance entre A_{29} et A_{30}, on ait à ce que $d_{28} + d_{27} > d_{29} > d_{28}$. Ensuite on procède de même et quitte à modifier légèrement d_{29} on se ramène à avoir que des distances différentes et $d_{28} + d_{27} > d_{29} > d_{28}$. Il est clair que A_{30} vérifie la contrainte (car le deuxième point le plus près est A_{28}) et pour A_{29} cela vient de l'inégalité $d_{28} + d_{27} > d_{29} > d_{28}$ qui permet d'affirmer que le deuxième point le plus proche de A_{30} est A_{29}. Ainsi il est bien possible d'obtenir une telle situation.

Solution alternative n°1 On présente une autre construction basée sur l'intuition suivante : le choix du nombre 10 est possiblement arbitraire et donc il doit exister des solutions pour des valeurs plus petites. De manière générale, pour deviner la réposne d'un tel problème, il est bon d'essayer de résoudre le problèmes pour des petites valeurs.

Par exemple, résolvons l'exercice pour 2 points rouges, 2 points bleus et 2 points verts. Notons que si l'on trouve un construction fonctionnelle dans ce cas, en itérant 5 fois la construction, on pourra obtenir une construction fonctionnelle pour 10 points de chaque couleur. De plus, toujours dans le but de simplifier le problème, on s'octroye le droite d'avoir certains couples de points à même distance, du moment que ce sont deux couples disjoints. Nous verrons plus tard comment en déduire une configuration avec des points qui sont à distances deux à deux distinctes.

On commence par essayer des configurations simples. Puisqu'il y a trois couleurs, un bon point de départ est de créer un triangle où les sommets sont des trois couleurs. Les triangles équilatéraux et isocèles sont interdits, on peut donc essayer la dernière sorte de triangles réguliers que l'on connaît, les triangles rectangles.

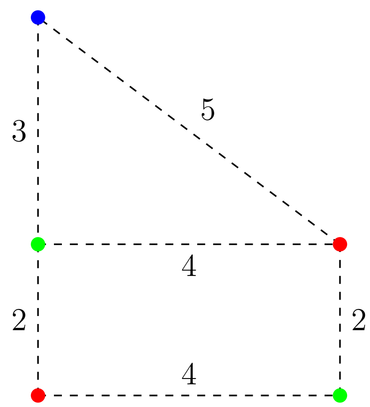
Considérons le triangle rectangle suivant :



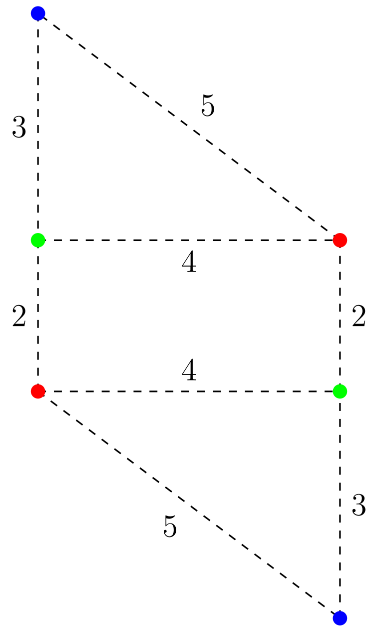
Si l'on s'en tient uniquement à cette figure, le deuxième point le plus proche du point bleu est bien un point rouge. En revanche, le deuxième point le plus proche du point rouge est un point bleu. Il faut donc rajouter un point vert à une distance du point rouge inférieure strictement à 5. Il faut de même rajouter un point rouge à distance du point vert déjà présent strictement inférieur à 3.

Pour garder de la régularité, on peut par exemple former un rectangle avec les points vert et rouge actuels et les points vert et rouge que l'on rajoute.

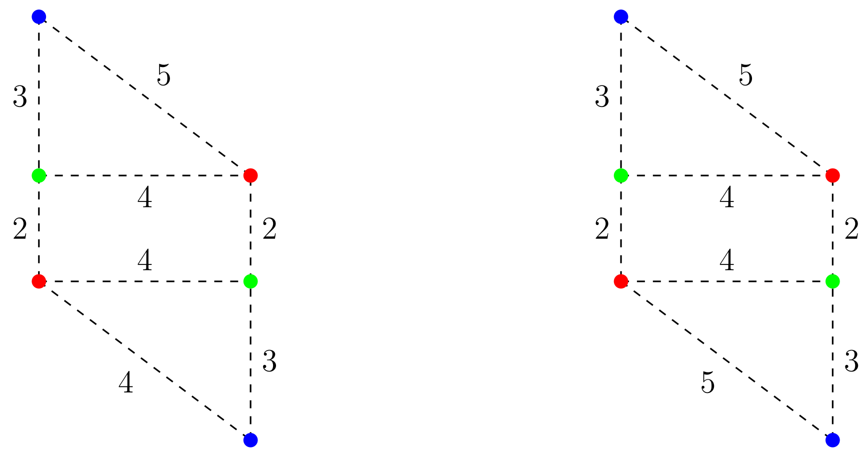
Observons ainsi :



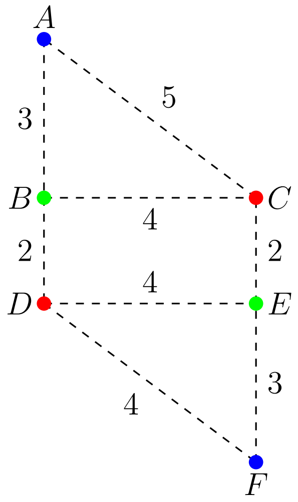
Dans cette configuration, le point bleu satisfait toujours la condition, le deuxième point le plus proche de chaque point rouge est vert et le deuxième point le plus proche de chaque point vert est rouge. Il reste à rajouter le dernier point bleu correctement. Pour cela, on s'inspire du triangle rectangle que l'on a construit pour le dupliquer comme suit :

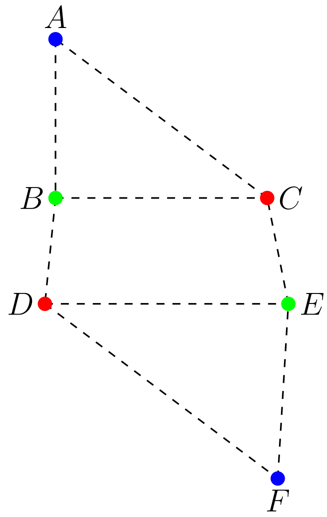


Ceci permet d'obtenir une construction pour 2 points rouges, 2 points verts et 2 points bleus si l'on peut se permettre d'avoir des distances égales. Pour obtenir une construction avec 10 points rouges, 10 points bleus et 10 points verts, on peut effectuer 5 copies suffisamment espacées de la construction précédente. Voici un exemple avec 4 points de chaque couleurs.



On désire désormais obtenir une configuration à 30 points où tous les points sont à distances deux à deux disjointes. L'intuition est de déplacer légèrement les points tour à tour, sous le modélèe de la figure ci-dessous :





La figure gauche ci-dessus représente notre première construction. La figure droite ci-dessus représente la construction après avoir bougé certains points pour s'assurer que les distances sont bien deux à deux distinctes.

Dans la suite, on formalise cette idée en montrant qu'il est bien possible de modifier la position de chaque point en gardant toutes les propriétés imposées par l'exercice :

Numérotons $A_1, \ldots, A_{30}$ les points. On va bouger les points chacun leur tour pour que les distances entre $A_1, \ldots, A_k$ soient deux à deux distinctes, et garder le même plus proche voisin, et le même second plus proche voisin. Notons x la plus petite différence entre deux distances distinctes entre les 30 points, on a donc $x > 0$. Bouger A_k d'une distance d'au plus $\frac{x}{3}$ ne change pas le fait que le deuxième point le plus proche soit de la bonne couleur, car chacune des distances est soit inchangée (s'il n'y avait pas A_k dedans), soit a augmenté ou diminué d'au plus $\frac{x}{3}$, cela n'a donc pas changé l'ordre des deux points les plus près.

Maintenant on cherche à avoir uniquement des distances deux à deux distinctes entre les k premiers points : il faut donc que A_k ne soit sur aucune des médiatrices de A_jA_i pour $1 \leq i < j < k$. Pour cela, prenons un segment de taille $\frac{x}{3}$ centré en A_k tel que la droite associée ne soit parallèle à aucune des médiatrices (ce qui est possible car il y en a un nombre fini). Chaque médiatrice coupe ce segment en au plus 1 point, donc il y a un nombre fini de points problématiques.

On souhaite également avoir $A_iA_j \neq A_kA_l$ pour tout $1 \leq i, j, l < k$ avec $i \neq j$. Pour cela, traçons tous les cercles de centre un des $k-1$ premiers points, de rayon une distance de la forme A_iA_j avec $1 \leq i < j < k$. Il suffit alors de placer A_k sur le segment précédemment formé, de sorte à ce qu'il ne soit pas sur les différents cercles tracés, et pas sur les points problématiques. Or il y a un nombre fini de cercles, et un cercle intersecte une droite en au plus 2 points, donc il y a un nombre fini de points du segment qui appartiennent à un des cercles ou une des médiatrices. Comme le segment comporte une infinité de point, il suffit de remplacer A_k par un point différent de ceux-là. On obtient donc que des distances distinctes entre les points A_i pour $1 \leq i \leq k$. En itérant le procédé on obtient alors le résultat voulu !

Commentaire des correcteurs : Cet exercice était difficile, car assez inhabituel (il s'agissait de *géométrie combinatoire*), et car la réponse était surprenante si on se contentait de regarder le cas particulier avec 1 caillou de chaque couleur au lieu de 10. De fait, dès que l'on considère n cailloux de chaque couleur avec $n \geqslant 2$, la réponse est positive, mais elle est négative si $n = 1$.

Par ailleurs, de nombreux élèves ont commis l'une des erreurs suivantes :

- ▷ Parler de point situé entre deux points sans supposer nos points alignés : parmi les trois sommets d'un triangle équilatéral, lequel est entre les deux autres ?
- ▷ Supposer que les points étaient nécessairement alignés : à quoi bon, dans ce cas, s'embêter à placer nos points dans le plan ?

- ▷ Placer des points de manière à satisfaire les contraintes de l'énoncé pour tous les points, sauf le dernier, que l'élève oubliait.
- ▷ Dire que les deux points les plus proches d'un même point X étaient forcément de couleurs distinctes : ce n'est pas forcément vrai.
- ▷ Oublier la contrainte de l'énoncé selon laquelle *toutes* les distances devaient être distinctes (même celles qui ne servent pas à déterminer qui est le deuxième point le plus proche de X).