La géométrie analytique

Martin Rakovsky

1 Avertissement

Avant de commencer la lecture, voici plusieurs points dont il faut avoir conscience :

1. La géométrie analytique n'est en aucun cas un moyen de se substituer à la géométrie euclidienne. Bien souvent, c'est au contraire une bonne maitrise de la géométrie classique qui permet d'orienter et de simplifier les calculs. Il s'agit donc d'une corde à ajouter à l'arc du géomètre déjà un peu rodé plutôt qu'une bouée de sauvetage pour un élève ne souhaitant pas faire de la géométrie. On supposera d'ailleurs connus plusieurs résultats avancés de géométrie euclidienne. En fait, il faudrait presque qu'à ce stade, la géométrie analytique soit la dernière chose qu'il reste à apprendre en géométrie olympique.
2. Pour compléter la remarque précédente, même si beaucoup de problèmes peuvent se résoudre en géométrie analytique (sinon ce ne serait pas aussi intéressant d'étudier ces méthodes), certains problèmes ne seront amicaux dans aucun système de coordonnées, ou alors resteront d'une difficulté majeure même en analytique. Il ne faut donc pas espérer trouver ici une méthode exhaustive et magique pour résoudre tous les problèmes de géométrie. Nous verrons dans ce cours les différents critères qui rendent un problème "sympathique" en analytique.
3. Les méthodes analytiques sont très calculatoires. Si l'on n'y prend pas garde, on se retrouve bien souvent avec des expressions de moins en moins maitrisables. Ceci implique d'essayer au maximum de simplifier ses calculs. Une fois encore, il ne s'agit pas d'une méthode miracle. Un conseil est donc d'effectuer des premières remarques sur la figure à l'aide de raisonnements "classiques" comme une chasse aux angles puis, une fois que l'on a simplifié le problème, utiliser l'analytique pour conclure.
4. Les calculs demandent de l'expérience, pour être plus rapide, pour savoir les simplifier au maximum et pour bien connaître ses formules (car oui, il y a des formules qu'il vaut mieux retenir plutôt que devoir les retrouver sur le moment). Il faut donc avoir une pratique régulière, au moins au début de l'apprentissage, pour pouvoir avoir des automatismes.
5. Les calculs demandent du temps. Cependant, le jour de la compétition, on dispose d'un temps fini. Il faut donc éviter de faire des erreurs de calcul ou de se retrouver avec des expressions qui deviennent incalculables, sous peine de perdre un temps précieux et de ne pas pouvoir chercher les autres problèmes. Un conseil est donc de toujours aller au bout de ses calculs lorsque l'on s'entraîne. Il ne s'agit certainement pas de regarder le problème et de se dire "en barycentrique, cela aboutira", mais bien de résoudre complètement l'exercice. Qui sait, peut-être que vous allez vous rendre compte que les coordonnées barycentriques donne des expressions beaucoup trop grandes et que finalement cela n'aboutit pas, en tout cas pas en temps fini.

6. Ces remarques nous amènent à la plus importante : en compétition,

   UNE SOLUTION EN ANALYTIQUE QUI N'ABOUTIT PAS A UN RESULTAT INTERPRETABLE GEOMETRIQUEMENT RAPPORTE $0/7$.

   Cela peut vous paraître injuste, mais c'est en tout cas la règle qui est la plus courante. Il est donc hors de question de se lancer à l'aveugle dans une solution analytique. Il faut être CERTAIN que l'on va aboutir en temps fini : tous les points doivent pouvoir avoir des coordonnées qui se calculent facilement et l'assertion à démontrer doit pouvoir se traduire facilement dans le système choisi. Si vous n'êtes pas sûr que le problème remplit ces critères, ne prenez pas de risques.

Dans ce cours, on développe très peu la méthode cartésienne, en réalité rarement utilisable, et l'on se concentre sur les coordonnées complexes et les coordonnées barycentriques.

Le moyen le plus sûr de progresser et de rendre les méthodes analytiques efficaces reste évidemment de beaucoup pratiquer. A cet effet, on trouvera plusieurs exercices d'application plus ou moins directe au sein du cours. On renvoie également aux cours d'Evan Chen sur le même sujet ainsi qu'à son magnifique livre "Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads". Ses cours contiennent déjà beaucoup d'exercices instructifs. Nous avons choisi de n'utiliser que des exercices qui n'apparaissent pas dans le cours d'Evan Chen, afin de fournir un réel complément d'exercice. Il vous est vivement conseillé d'aller regarder les exercices d'Evan Chen en plus de ceux présents dans le polycopié.

Lorsqu'elles sont bien maitrisées, les méthodes analytiques sont un atout redoutable pour résoudre un problème en temps fini.

Table des matières

2 Quelques outils

Dans les cours qui suivent, on utilisera librement certains objets qui ne sont pas au programme de lycée.
On commence par un objet que l'on sera fréquemment amené à utiliser :

2.1 Le déterminant

On vous rassure : on ne cherchera pas à développer la théorie de l'algèbre linéaire, on va surtout se concentrer sur les formules.
On commence par la notation suivante :

Définition 1. *Etant donnés* 4 *réels* a, b, c *et* d, *on notera*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

la quantité $ad - cb$. *Cette quantité est aussi appelée déterminant des lignes* (a, b) *et* (c, d).

Pour l'instant, on ne voit pas forcément l'intérêt d'une telle notation. Remarquons seulement que ce déterminant admet l'interprétation géométrique suivante : il s'agit de l'aire (orientée) du parallélogramme engendré par les vecteurs (a, b) et (c, d). Ainsi, lorsque les vecteurs (a, b) et (c, d) sont colinéaires, ce déterminant est nul. Voyons la suite.

Définition 2. *Etant donnés* 9 *nombres réels* $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, *on notera*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

la quantité $a(ei - fh) + b(fg - di) + c(dh - ge)$.
Cette quantité est aussi appelée déterminant des lignes $(a, b, c), (d, e, f)$ *et* (g, h, i).

Stop ! Là, il se passe des choses. Cette dernière notation sera fréquemment utilisée par la suite, il est donc important d'en comprendre les divers ressorts.
Tout d'abord, cette quantité admet également une interprétation géométrique ! Il s'agit du volume engendré par les vecteurs de coordonnées $(a, b, c), (d, e, f)$ et (g, h, i).
Ainsi, si les vecteurs $(a, b, c), (d, e, f)$ et (g, h, i) sont coplanaires, le volume engendré est nul donc le déterminant est nul. Ceci peut se traduire par : si il existe A et B deux nombres tels que $(g, h, i) = A(a, b, c) + B(d, e, f)$, alors

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ Aa + Bd & Ab + Be & Ac + Bf \end{vmatrix} = 0$$

De cette interprétation géométrique, on déduit également que si le déterminant est nul, alors on a également :

$$0 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

Attention : ces égalités ne sont vraies que parce que toutes les expressions sont nulles. Dans le cas général, seules les valeurs absolues de ces expression sont égales. Cela dit, dans le cours, on s'intéressera pratiquement toujours à des déterminants nuls. On peut donc intervertir les différentes lignes et le placer dans son ordre préféré sans être moralement gêné.
Notons dès à présent que la façon avec laquelle on a écrit notre déterminant n'est pas un hasard. En fait nous avons l'égalité suivante :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Il s'agit du "développement par colonne". On peut le visualiser (et donc retenir la formule!) comme suit :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ \cancel{d} & e & f \\ \cancel{g} & h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ d & \cancel{e} & f \\ g & \cancel{h} & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ d & e & \cancel{f} \\ g & h & \cancel{i} \end{vmatrix}$$

On ne peut s'empêcher de remarquer que cette formule devient incroyablement simple lorsque, par exemple, les coordonnées du premier vecteur valent $(1, 0, 0)$.
Une autre remarque est l'homogénéité de la formule!

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Comme on l'a déjà dit, on travaillera toujours avec des déterminants nuls, donc imaginons que le vecteur (a, b, c) soit le vecteur $(\frac{a_1}{D_m}, \frac{b_1}{D_m}, \frac{c_1}{D_m})$ avec D_m un Dénominateur Moche, ou encore le vecteur (a_1F_m, b_1F_m, c_1F_m) avec F_m un Facteur Moche, alors on peut se contenter d'effecteur les calculs avec le vecteur (a_1, b_1, c_1) à la place.
Plusieurs fois nous serons amenés à montrer qu'un certain déterminant est nul. On vient donc de voir qu'il y a deux façons de montrer qu'un déterminant de 3 lignes est nul : calculer le déterminant avec la formule du développement par ligne ou bien montrer que l'une des lignes est une combinaison linéaire des deux autres. Dépendant du contexte, l'une des deux méthodes peut être plus rapide que l'autre.
On termine en remarquant que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

Donc tout ce que l'on a dit pour les colonnes marche aussi avec les lignes, et vice-versa!

On ne cherchera pas à développer beaucoup plus la théorie des déterminants, puisque dans la suite on ne se servira que des formules. La meilleure façon de saisir l'intérêt de ce qui vient d'être évoqué est de regarder l'utilisation qui est faite du déterminant dans les sections "nombres complexes" et "coordonnées barycentriques"(surtout les coordonnées barycentriques d'ailleurs).

2.2 La notion de degré de liberté

Il s'agit ici plus d'un vocabulaire que nous emploierons par la suite qu'un réel outil mathématique. Le degré de liberté est une notion intuitive donnant le nombre de *directions* dans lesquelles peut varier un objet géométrique. Par exemple, un point variant dans le plan possède deux degrés de libertés, mais un point variant sur une droite possède un seul degré de liberté. Un point fixe ne possède aucun degré de liberté.

Dans la suite de nos aventures, il pourra être utile d'identifier le degré de liberté d'une figure pour savoir à quoi s'attendre.
A priori, un triangle ABC possède trois degrés de liberté, par exemple donnés par deux angles et la longueur de l'un des côtés. Mais pour l'intérêt des méthodes étudiées, nous appliquerons la convention que le triangle ABC de départ est fixé et ne possède donc aucun degré de liberté. Par exemple l'énoncé suivant ne possède aucun degré de liberté :

Exemple 1. *Soit* ABC *un triangle et soient* G, O *et* H *resepctivement son centre de gravité, le centre de son cercle circonscrit et son orthocentre. Montrer que les points* G, O *et* H *sont alignés.*

En effet, une fois les points A, B et C fixés, les points G, O et H le sont également.
L'énoncé suivant présente un degré de liberté :

Exemple 2. *Soit* ABC *un triangle et soit* D *un point du segment* $[BC]$. *Soit* E *le point du cercle circonscrit au triangle* ABC *appartenant au petit arc* BC *tel que* $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$. *Montrer que les triangles* CAE *et* DAB *sont semblables.*

En effet, une fois que les points A, B et C sont fixés, la position du point E dépend encore de la position du point D, variable sur le segment $[BC]$.
La notion de degré de liberté se formalise en regardant les équations régissant les coordonnées des points.
Pour donner un exemple, plaçons-nous dans le plan cartésien et prenons un point P variable sur un cercle $\mathcal{C}$. Le point P a pour coordonnées (x, y). On a donc deux variables. Cependant, comme le point P appartient au cercle $\mathcal{C}$, ses coordonnées satisfont une équation, celle du cercle $\mathcal{C}$. Cette équation supprime un degré de liberté. En d'autres termes, on a 2 variable x et y et 1 équation, donc $2 - 1 = 1$ degré de liberté.

Quel est l'intérêt de déterminer le degré de liberté d'une figure ? Si l'on reprend l'exemple 2, savoir que la figure présente un degré de liberté nous informe sur le fait que nos équations dépendront toutes d'une variable, correspondant au degré de liberté du point D. Cela permet aussi de vérifier ses calculs : si nos équations ne présentent pas le même nombre de degrés de liberté que la figure, c'est qu'il y a une erreur ou que l'on procède de la mauvaise façon/que l'on a oublié une hypothèse.
En général, plus une figure présente de degrés de liberté, plus il y a de paramètres indépendants dont dépendent nos équations et donc plus il y a de calculs.

3 La méthode cartésienne

La géométrie cartésienne possède deux composantes : le calcul en coordonnées cartésiennes, que l'on apprend au lycée, et l'utilisation de la trigonométrie pour établir soit des formules dépendant des angles soit des formules dépendant des longueurs. On traite ces deux méthodes séparément, et on les regroupe dans le même sac des "méthodes cartésiennes".

3.1 Les coordonnées cartésiennes

Nous n'allons pas faire de théorie dans cette partie étant donnée que les méthodes de calcul en coordonnées cartésiennes sont vues au lycée.
Un petit mot sur cette méthode : les problèmes faisables de façon simple en géométrie cartésienne se font de plus en plus rares dans les compétitions, parce que les comités de sélection savent repérer les problèmes qui se font avec de telles méthodes. De manière générale, les problèmes qui se font en géométrie cartésienne admettent souvent une "meilleure" solution en géométrie complexe ou barycentrique.

3.2 Le trigo/length bashing

Il ne s'agit pas à proprement parler, de géométrie cartésienne, ni même de géométrie analytique. Toutefois, le length/trigo bashing est une méthode qui mérite qu'on y prête attention.
L'esprit de cette méthode est que "tout est calculable". On identifie le nombre de degré de libertés de la figure (généralement, on ne considère que les degrés de libertés qui apparaissent en plus du choix des trois sommets du triangle de référence). Puis on choisit autant de paramètres qu'il y a de degrés de libertés et on exprime toutes les données uniquement en fonction de ces paramètres et des paramètres du triangle de référence. Ainsi, si la figure comporte un triangle ABC et un point variable D sur le segement $[BC]$, on considère qu'il y a un degré de liberté et toutes les longueurs peuvent être exprimées uniquement en fonction des côtés du triangle et de la distance $x = DB$. Les paramètres peuvent être des longueurs ou des angles.

3.2.1 Un peu de trigonométrie

Commençons par rappeler quelques formules de trigonométrie. On connaît les formules de duplication :

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\
\tan(x+y) &= \tfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}
\end{aligned}$$

On peut, à partir de ces formules et des parités des fonctions $\cos$ et $\sin$ déduire des formules identiques pour $\cos(x-y), \sin(x-y)$ et $\tan(x-y)$. Ces formules nous permettent d'obtenir les formules de linéarisation :

$$\begin{aligned}
\cos x \cos y &= \tfrac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) \\
\sin x \sin y &= \tfrac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\
\cos x \sin y &= \tfrac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))
\end{aligned}$$

et de factorisation :

$$\begin{array}{rcl}\cos a + \cos b & = & 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ \sin a + \sin b & = & 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ \cos a - \cos b & = & 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\end{array}$$

que l'on peut démontrer, par exemple, à l'aide des formules $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. On vous laisse décider s'il est plus efficace de les apprendre par coeur ou de savoir les retrouver rapidement.

Dans un problème, on peut être amené à devoir manipuler des sinus et des cosinus du même angle. On peut alors vouloir se débarasser de l'un ou l'autre avec la formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Mais il est plus efficace et plus propre d'exprimer $\sin x$ et $\cos x$ en fonction d'une seule et même variable via la propriété suivante :

Proposition 1. *Soit* x *un réel. On pose* $t = \tan\frac{x}{2}$. *Alors :*

$$\begin{array}{rcl}\sin x & = & \frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x & = & \frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \tan x & = & \frac{2t}{1-t^2}\end{array}$$

On peut alors manipuler toutes les équations en fonction de t. L'avantage est que l'on obtient des expressions rationnelles en t, et sans préoccupation de signe, ce qui n'est pas le cas d'une substitution à l'aide de $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
Les formules additionnelles suivantes pourraient être utiles et font des astuces à ranger dans un coin de la tête :

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

et si α, β et γ sont les angles d'un triangle, alors

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

3.2.2 Relations entre angles et longueurs dans un triangle

La relation la plus utile reliant les angles d'un triangle à ses côtés est sans aucun doute la loi des sinus :

Proposition 2. *Soit* ABC *un triangle,* $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ *et* $\gamma = \widehat{ACB}$ *et soit* $a = BC, b = AC$ *et* $c = AB$. *Soit* R *le rayon du cercle circonscrit au triangle* ABC *et soit* S *son aire. Alors*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R = \frac{abc}{2S}$$

Pour une esquisse de preuve, on pourra commencer par la loi des sinus pour un triangle rectangle puis s'y ramener. La dernière égalité vient de la formule $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.
La formule suivante, dont l'utilisation est autrement plus rare, est la formule d'Al-Kashi, que l'on peut obtenir avec le produit scalaire :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

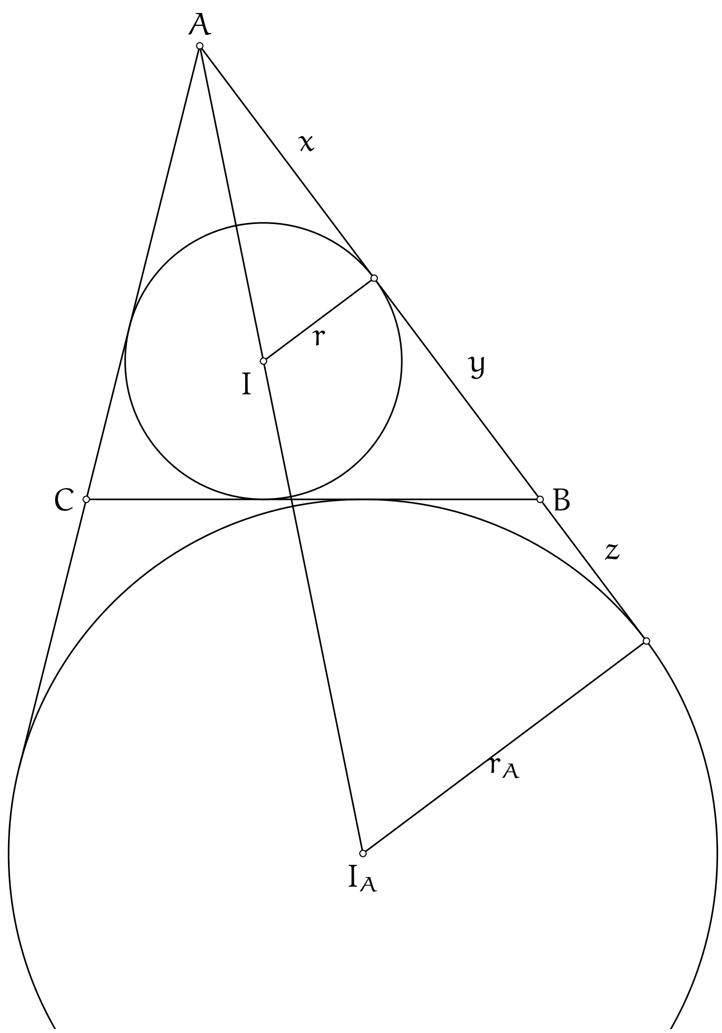
Une autre astuce de calcul bien connue en inégalités est la transformation de Ravi :

Proposition 3. *Soit* ABC *un triangle et soient* D, E *et* F *les points de contact du cercle inscrit avec les côtés* BC, CA *et* AB. *En posant* $x = AF = AE$, $y = BF = BD$ *et* $z = CD = CE$, *on a*

$$x = \frac{AB + AC - BC}{2}, y = \frac{BC + BA - AC}{2}, z = \frac{CA + CB - AB}{2}$$

Pour calculer des ongueurs dans un triangle, il est parfois plus commode d'exprimer les longueurs en fonction de x, y et x qu'en fonction de AB, BC et CA. Voyons plutôt :

Exemple 3. *Soit* ABC *un triangle,* I *le centre de son cercle inscrit et* I_A *le centre du cercle* $A-$*exinscrit. On désire calculer les longueurs* AI *et* AI_A. *Une première façon de faire est à partir des rayons des cercles. On note* r *le rayon du cercle inscrit et* r_A *celui du cercle* $A-$*exinscrit.*



Alors dans le triangle AIF, *on a*

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{x}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

On peut trouver des relations similaires pour r_A *et* AI_A. *Mais ces relations peuvent ne pas être satisfaisantes car elles dépendant de l'angle* α. *Observons que par le théorème de Thalès, on a les égalités bien plus commodes :*

$$\frac{AI}{AI_A} = \frac{r}{r_A} = \frac{x}{x+y+z}$$

Par ailleurs, par puissance du point A *par rapport au cercle antartique, on sait que* $AI \cdot AI_A = AB \cdot AC$. *Puisqu'on a le rapport de* AI *et* AI_A *et son produit, on est en mesure d'obtenir un expression de chacun des deux en fonction de* x, y *et* z *ou en fonction de* a, b *et* c. *Les expressions ne sont pas magnifiques, mais on a montré que c'était possible !*

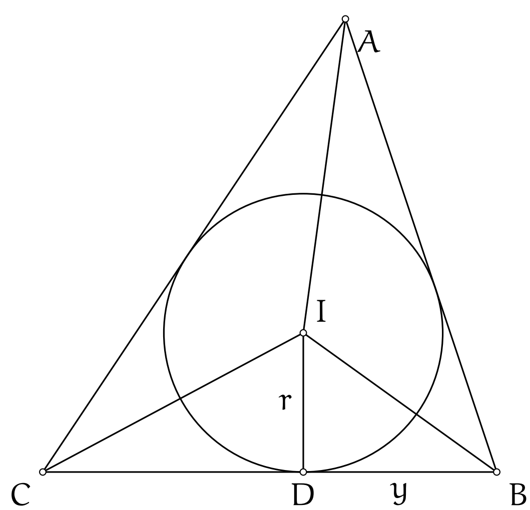
Terminons cette section avec deux formules sur les aires d'un triangle, toujours dans l'idée que l'on peut tout retrouver en fonction des longeurs du triangle ABC.
Tout d'abord la formule de Héron :

$$\text{aire}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

avec s le demi périmètre du triangle ABC, et une deuxième façon de calculer l'aire du triangle ABC avec le rayon r de son cercle inscrit :

$$rs = \text{aire}(ABC)$$

Pour établir ces formules, on considère la figure suivante :



L'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles IBC, ICA et IAB. Or l'aire du triangle IBC correspond à $\frac{ID \cdot BC}{2} = \frac{ra}{2}$. Ainsi la somme des aires vaut $r\frac{a+b+c}{2} = rs$ comme annoncé.
Notons de plus que $\frac{y}{r} = \tan\left(90° - \frac{\beta}{2}\right)$. Les angles $90° - \frac{\alpha}{2}, 90° - \frac{\beta}{2}$ et $90° - \frac{\gamma}{2}$ somment à $180°$, la somme des tangentes vaut donc le produit :

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} + \frac{y}{r} + \frac{z}{r} &= \tan\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(90° - \frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) \\ &= \tan\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(90° - \frac{\beta}{2}\right)\tan\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) \\ &= \frac{x}{r} \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{z}{r} \end{aligned}$$

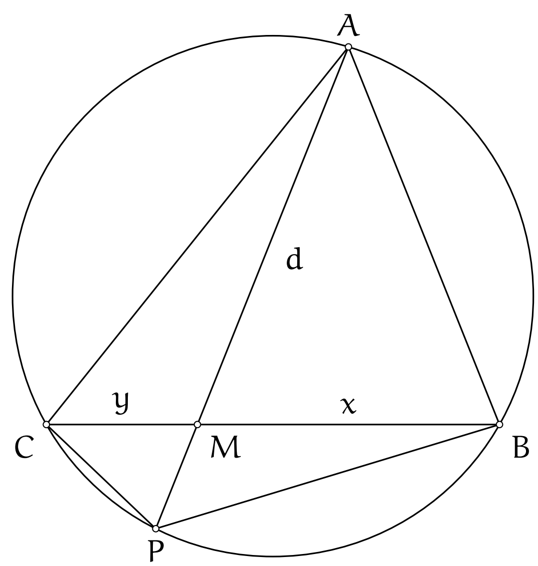
Puisque $x = s - a, y = s - b$ et $z = s - c$, en multipliant des deux côtés par $\frac{s}{r}$, on obtient $(sr)^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ et on a bien la formule de Héron.
Ces deux formules permettent notamment de calculer les rayons des cercles inscrits, exinscrits et circonscrits uniquement en fonction des longueurs du triangle ! La morale est que tout est calculable.

3.2.3 La formule de Stewart

La formule dans cette section sert à calculer la longueur de n'importe quelle cévienne issue d'un sommet d'un triangle. Il s'agit d'une généralisation de la formule de la médiane. On la présente sans plus attendre :

Proposition 4. *Soit* ABC *un triangle et soit* M *un point du segment* BC. *On note* $a = BC, b = AC$ *et* $c = AB$ *et on note* $x = BM$, $y = CM$ *et* $d = AM$. *Alors*

$$a(d^2 + xy) = b^2 x + c^2 y$$



Démonstration.
Soit P le second point d'intersection de la droite (AM) avec le cercle circonscrit au triangle ABC. On calcule les longueurs BP, CP et PM en fonction des données. Par puissance d'un point $PM \cdot d = xy$ donc $PM = \frac{xy}{d}$.
Les triangles PMB et CMA sont semblables donc $\frac{BP}{b} = \frac{x}{d}$ donc $BP = \frac{bx}{d}$ et on trouve de même $CP = \frac{cy}{d}$. On a tout ce qu'il faut pour appliquer l'égalité de Ptolémé (dont la preuve est un exercice du chapitre sur les nombres complexes) :

$$AP \cdot BC = AC \cdot BP + AB \cdot CP$$

soit

$$a\left(d + \frac{xy}{d}\right) = b \cdot \frac{bx}{d} + c \cdot \frac{cy}{d}$$

et donc

$$a(d^2 + mn) = b^2 x + c^2 y$$

□

3.3 Quand utiliser (ou pas) la géométrie cartésienne ?

Ce chapitre s'est en fait beaucoup concentré sur le trigo/length bashing et moins sur l'aspect cartésien. On pourrait donc penser que l'on n'a pas vraiment fait de géométrie analytique pour l'instant. Cependant, l'intérêt est de montrer que tout est calculable avec un peu de patience. On pensera donc aux méthodes cartésiennes dans les cas suivants :

- L'énoncé est une inégalité géométrique. Dans ce cas, la procédure est d'évaluer le nombre de degrés de libertés de la figure, exprimer toutes les longueurs en fonction d'autant de paramètres que de degrés de libertés et voir ce que ça donne.
- La figure comporte très peu de degrés de libertés. Un cas de figure encourageant le length/trigo bashing est le cas où la condition retire un degré de liberté (par exemple l'énoncé suppose que deux droites sont parallèles et demande de montrer que le triangle est isocèle). La procédure est alors de deviner le nombre de degré de liberté final, tout exprimer en fonction d'autant de paramètres et de regarder ce qu'implique la condition imposée par l'énoncé.
- La figure comporte peu de cercles. Que ce soit pour le calcul cartésien ou le length bashing, la présence de cercles entrave généralement les calculs. Il est possible de s'en sortir avec l'égalité de Ptolémé et la puissance d'un point, mais les cercles sont plus propices à des égalités d'angles que des égalités de longueurs ou de sinus.
- La figure présente une symétrie selon un axe. Cela sert notamment pour le calcul cartésien, car le repère est alors tout indiqué. Généralement, la présence d'un carré, d'un rectangle ou d'un angle droit important est l'indice que l'on peut poser un repère cartésien.

A l'inverse, voici des situations où la géométrie cartésienne n'est pas pratique :

- Il y a beaucoup de cercles. En géométrie cartésienne, les cercles sont régis par des équations de degré 2. On peut donc difficilement calculer les coordonnées du point d'intersection d'un cercle et d'une droite par exemple.
- Le triangle ABC est quelconque. Dans ce cas, poser un repère cartésien fait perdre toute la symétrie de la figure (et on ne veut pas ça). Le length bashing sera un outil plus pratique.
- La figure comporte beaucoup de degrés de libertés. Un degré de liberté implique un paramètre en plus. Si la figure comporte trois degrés de libertés, cela signifie que les équations comportent trois variables indépendantes. Cela promet des calculs compliqués.
- L'énoncé comporte une condition sur une égalité d'angle compliquée. Les égalités du type $\widehat{X} - \widehat{Y} = \widehat{Z}$ sont difficilement interprétables avec des longueurs ou des angles, le lengt/trigo bashing risque d'être compliqué, et ne parlons pas du calcul cartésien.

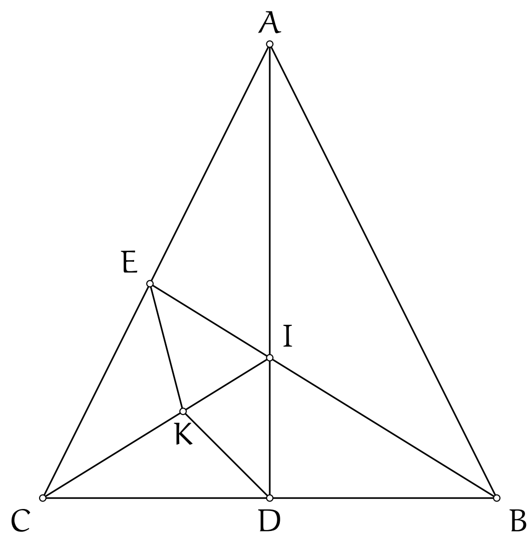
Il ne faut pas oublier que le calcul cartésien est le moins pratique, et qu'avant de se lancer dans des calculs en coordonnées cartésiennes, il est bon de se demander si une autre méthode analytique n'est pas plus appropriée.

3.4 Un exemple d'exercice qui fonctionne bien avec les méthodes cartésiennes

Comment parler de trigo/length bashing sans parler du P4 des Olympiades Internationales de 2009 ?

Exercice 1. *(IMO 2009 P4) Soit* ABC *un triangle isocèle en* A. *La bissectrice de l'angle* $\widehat{BAC}$ *coupe le côté* $[BC]$ *au point* D. *La bissectrice de l'angle* $\widehat{ABC}$ *coupe le côté* $[AC]$ *au point* E. *Soit* K *le centre du cercle inscrit au triangle* ADC. *On suppose que* $\widehat{BEK} = 45°$. *Déterminer les valeurs de* $\widehat{CAB}$.

Solution de l'exercice 1



Expliquons la stratégie : On identifie le nombre de degrés de libertés de la figure. Il y a les trois degrés de libertés donnés par le choix des sommets ABC (on ne compte généralement pas cela comme des degrés de libertés), on en retire 1 car le triangle est isocèle en A et manifestement, la condition $\widehat{BEK} = 45°$ impose l'angle $\widehat{CAB}$, si bien que la figure possède au plus un degré de liberté.

Une fois ce fait identifié, on sait qu'on veut déterminer un angle, l'angle $\widehat{CAB}$. On peut donc poser $x = \widehat{CAB}$ et comme la figure possède au plus un degré de liberté, on peut, en théorie, calculer toutes les longueurs et tous les angles de la figure uniquement en fonction de x. On obtiendra alors une condition sur x et on pourra conclure.

On commence par exprimer tous les angles que l'on désire à l'aide d'une chasse aux angles. On en profite pour faire apparaître le point I, centre du cercle inscrit du triangle ABC.

Angle	en fonction de x
$\widehat{DCA}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$
$\widehat{DCI}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}$
$\widehat{CID}$	$\frac{\pi}{4} + \frac{x}{4}$
$\widehat{KDI}$	$\frac{\pi}{4}$
$\widehat{DKI}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}$
$\widehat{IEA}$	$\frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{4}$
$\widehat{EIK}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$
$\widehat{EKI}$	$\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$

On va chercher à obtenir une équation sur x. Comme on n'arrive pas à l'obtenir par une simple chasse aux angles, on va utiliser un peu de trigonométrie (on s'attend donc à se trouver face à une équation trigonométrique).
On part de la condition $\widehat{BEK} = 45°$. On utilise la loi des sinus dans le triangle EIK (la longueur EK ne nous sera pas d'une grande utilité, on va donc utiliser les deux autres longueurs) :

$$\frac{EI}{IK} = \frac{\sin \widehat{EKI}}{\sin \widehat{KEI}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{\pi}{4}}$$

Maintenant on va calculer $\frac{EI}{IK}$ d'une autre façon. D'après la loi des sinus dans le triangle AEI :

$$EI = AI\frac{\sin \widehat{EAI}}{\sin \widehat{IEA}} = AI\frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{4}\right)}$$

La loi des sinus dans le triangle IKD nous donne

$$IK = ID\frac{\sin \widehat{KDI}}{\sin \widehat{DKI}} = ID\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)}$$

et en utilisant le théorème de la bissectrice $\left(\frac{AC}{CD} = \frac{AI}{ID}\right)$ et le fait que $CD = AC \sin \frac{x}{2}$ on trouve :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{AI}{ID} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{4}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{AC}{CD} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{4}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)}{\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{4}\right)}$$

Comment savoir que notre "double calcul" de rapport a fonctionné et ne va pas nous faire tomber sur une égalité triviale ? Et bien l'un des calculs a utilisé l'hypothèse que $\widehat{BEK} = 45°$ et l'autre calcul ne concernait que des relations qui sont vraie pour tout triangle isocèle. Ainsi, la mise en relation des deux va aboutir à une contrainte sur x. L'équation devient

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right) = \cos \frac{x}{4}$$

et le reste n'est plus qu'un exercice de trigonométrie. Le côté gauche peut se linéariser :

$$\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5x}{4}\right) - \cos\left(\pi - \frac{x}{4}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{4}\right) = \cos \frac{x}{4}$$

$$\frac{1}{2}\left(\sin \frac{5x}{4} + \cos \frac{x}{4}\right) = \cos \frac{x}{4}$$

$$\sin \frac{5x}{4} = \cos \frac{x}{4}$$

Pour résoudre cette équation, on chercher à faire apparaître un produit égal à 0, on va donc utiliser les formules de factorisation :

$$\begin{aligned} 0 &= \sin \tfrac{5x}{4} - \cos \tfrac{x}{4} \\ &= \sin \tfrac{5x}{4} - \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{x}{4}\right) \\ &= 2\cos\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{3x}{4} - \tfrac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Le cas $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 0$ conduit à $x = \frac{\pi}{2}$ et le cas $\cos\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ conduit à $x = \frac{\pi}{3}$.
On obtient donc les deux valeurs possibles pour l'angle $\widehat{BAC}$, à savoir $90°$ et $60°$.

3.5 Exercices

Exercice 1. *(Iran MO 2018 round 2) Soit* ABC *un triangle isocèle en* A. *Soit* X *un point du segment* $[BC]$. *Soit* Z *un point du segment* $[AC]$ *et* Y *un point du segment* $[AB]$ *tels que* $\widehat{BXY} = \widehat{ZXC}$. *La droite parallèle à la droite* (YZ) *passant par le point* B *coupe la droite* (XZ) *en un point* T. *Montrer que le point* T *appartient à la bissectrice de l'angle* $\widehat{BAC}$.

Exercice 2. *(BXMO 2012 P4) Soit* $ABCD$ *un carré. Soit* P *un point à l'intérieur du carré tel que* $\widehat{BAP} > 60°$. *Soit* Q *le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite* (BP) *passant par* P *avec le côté* $[AD]$. *Soit* R *le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite* (BP) *passant par* C *avec la droite* BQ.
1) Montrer que $BP \geqslant BR$.
2) Pour quelles positions du point P *l'inégalité précédente est-elle une égalité ?*

Exercice 3. *(EGMO 2015 P1) Soit* ABC *un triangle aux angles aigus et soit* D *le pied de la hauteur issue du sommet* C. *La bissectrice de l'angle* ABC *coupe la droite* (CD) *au point E et recoupe le cercle circonscrit au triangle* ADE *au point* F. *On suppsoe que* $\widehat{ADF} = 45°$. *Montrer que la droite* (CF) *est tangente au cercle circonscrit au triangle* ADE.

Exercice 4. *(RMM 2017 P4) Soient* G_1 *et* G_2 *les graphes de deux fonctions quadratiques* $f_1(x) = p_1x^2 + q_1x + r_1$ *et* $f_1(x) = p_2x^2 + q_2x + r_2$ *avec* $p_1 > 0 > p_2$. *Les graphes se coupent en deux points districts* A *et* B. *Les quatre tangentes aux graphes* G_1 *et* G_2 *forment un quadrilatère admettant un cercle inscrit. Montrer que les graphes* G_1 *et* G_2 *admettent le même axe de symétrie.*

Exercice 5. *(G3 IMO SL 2012) Soit* ABC *un triangle aux angles aigus. Soient* D, E *et* F *les pieds des hauteurs issues des sommets* A, B *et* C *respectivement. On note respectivement* I_1 *et* I_2 *les centres des cercles inscrits aux triangles* AEF *et* BDF. *On note* O_1 *et* O_2 *les centres des cercles circonscrits aux triangles* ACI_1 *et* BCI_2. *Montrer que les droites* (O_1O_2) *et* (I_1I_2) *sont parallèles.*

4 Les nombres complexes

4.1 Présentations

Il y a bien des façons de créer l'ensemble des nombres complexes. Comme ce n'est pas le point central du chapitre, on se restreint à une présentation un peu rapide. Je vous laisse le soin d'aller découvrir d'autres présentations des nombres complexes mieux que la mienne. La présentation qui suit n'a certainement pas vocation à être exacte ou optimale, mais plutôt de donner une façon simple de visualiser les nombres complexes.

Considérons l'équation $x - 1 = 0$. Je ne doute pas de votre habileté à en trouver la solution, qui est un entier naturel. L'équation $x + 1 = 0$ trouve sa solution dans les entiers relatifs. L'équation $2x + 1 = 0$ trouve quant à elle sa solution dans l'ensemble des nombres rationnels. L'équation $x^2 - 2 = 0$ n'a pas de solution dans l'ensemble des rationnels, elle trouve sa solution dans l'ensemble des réels. L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet cependant pas de solution réelle.

A ce stade, on constate de façon frustrante que les solutions des équations à coefficients réels ne sont pas forcément réelles. Que faire ? Pour résoudre ce problème, on étend donc l'ensemble dans lequel on travaille, en considérant les solutions non réelles de l'équation $x^2 + 1 = 0$. On décide alors d'introduire un nombre, que l'on note i, qui serait solution de cette équation, c'est-à-dire que ce nombre vérifie que $i^2 = -1$.
On notera $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres de la forme $a + ib$, avec a et b des nombres réels. On peut alors effectuer, sans y chercher plus de sens, des opérations comme sur les nombres réels. On vérifie immédiatemment que

— $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

— $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

— $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{b^2+a^2}$

Le réel a est appelée *partie réelle* du nombre complexe $z = a + ib$, notée $\mathrm{Re}(z)$ et le nombre b est appelé *partie imaginaire*, notée $\mathrm{Im}(z)$.
Notre voyage est en fait terminé puisque toutes les solutions des équations à coefficients complexes sont elles aussi complexes. Mais c'est un résultat dont nous nous désinteresserons totalement dans la suite.

Remarquons que l'on obtient une interprétation géométrique de l'ensemble $\mathbb{C}$ en l'identifiant au plan : $\mathbb{R}^2 = \{(a, b), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$. Cette identification nous intéressera particulièrement dans la suite.
On définit à présent les quantités suivantes :

Définition 1. *Soit* $z = a + ib$ *un nombre complexe. On appelle conjugué de z, noté* $\bar{z}$*, le nombre* $a - ib$. *On appelle module de z, noté* $|z|$*, la quantité* $\sqrt{a^2 + b^2}$.

On vérifie alors les propriétés suivantes sur les nombres complexes :

— $\bar{z} + \bar{z'} = \overline{z + z'}$

— $\bar{z} \cdot \bar{z'} = \overline{zz'}$

— $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$

— $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

— $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

On observe également les formules suivantes :

— $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ et est donc un nombre réel

— $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$ et a donc une partie réelle nulle, on dit que c'est un nombre *imaginaire pur*.

La propriété suivante, plus subtile, sera mise en lumière dans la section suivante. On a l'inégalité suivante, dite inégalité triangulaire (hehe) :

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

Essayer de démontrer cette inégalité est un bon exercice.

4.1.1 Les diverses formes des nombres complexes

On connaît l'écriture des nomres complexes sous la forme $a + ib$. Mais il est possible d'écrire les nombres complexes d'une autre façon, que l'on appelle la *forme exponentielle*.

Définition 2. *Soit* r *un réel strictement positif et* θ *un réel. Alors on définit*

$$re^{i\theta} := r\cos(\theta) + ri\sin(\theta)$$

c'est-à-dire que l'on note $re^{i\theta}$ *le nombre* $r\cos(\theta) + ri\sin(\theta)$.

Si a et b sont des réels, on peut noter qu'en posant $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et en prenant θ un réel tel que $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, (ce θ existe puisque le membre de droite est de valeur absolue inférieure à 1) on a bien

$$a + ib = re^{i\theta}$$

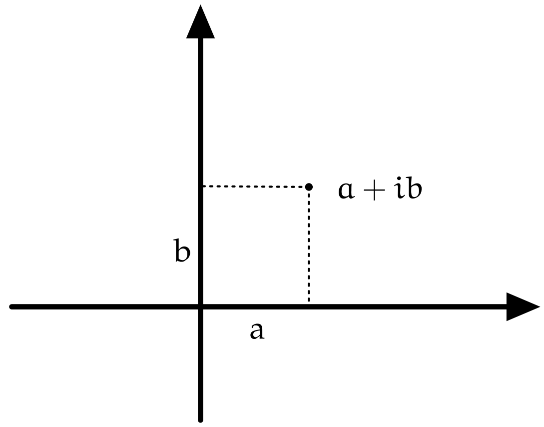
On peut donc décrire tous les nombres complexes avec les paramètre r et θ plutôt que a et b.
Notons la commodité de cette notation, en remarquant la propriété suivante :

$$re^{i\theta} \cdot r'e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta + i\theta'}$$

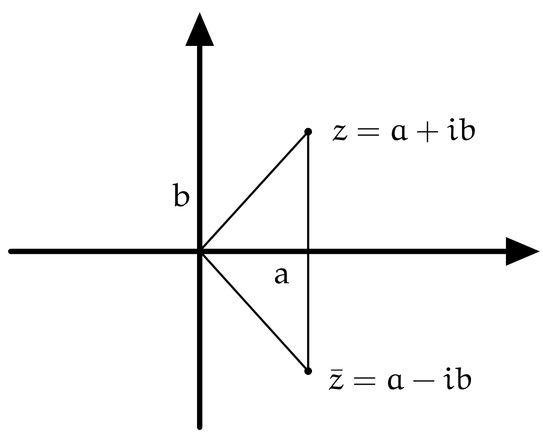
qui se démontre à l'aide des formules de duplications.
Notons également que $|e^{i\theta}| = 1$.
Ainsi, le nombre r correspond au module du complexe et le nombre θ est *un argument* du complexe et est parfois noté $\arg(z)$ (il est défini à 2π près).

4.1.2 Interprétation géométrique

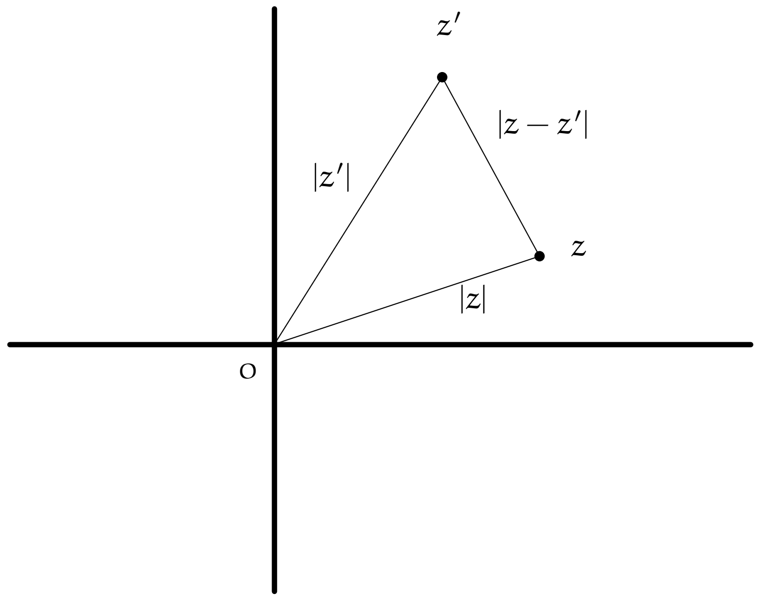
Les complexes ont une interprétation géométrique très puissante, que l'on regarde sans tarder. Soit A un point du plan, repéré par les coordonnées (a, b). On appelle *affixe* du point A le nombre complexe $a + ib$. Ainsi, le sommet A peut être repéré dans le plan par un unique nombre complexe, au lieu de deux nombres réels !



Toutes les formules vues dans le chapitre précédent s'adaptent aux affixes. Par exemple, si A et B sont deux points d'affixes respectifs a et b, alors l'affixe du milieu M du segment $[AB]$ est le complexe $m = \frac{a+b}{2}$. De même, le centre de gravité d'un triange ABC dont les sommets sont d'affixes respectifs a, b et c a pour affixe $g = \frac{a+b+c}{3}$. On obtient également une interprétation géométrique des parties réelles et imaginaires d'un complexe z, correspondant respectivement à l'abscisse et l'ordonnée du point Z d'affixe z. On a également une interprétation du conjugué de z comme l'affixe du point Z' symétrique du point Z par rapport à l'axe des abscisses.

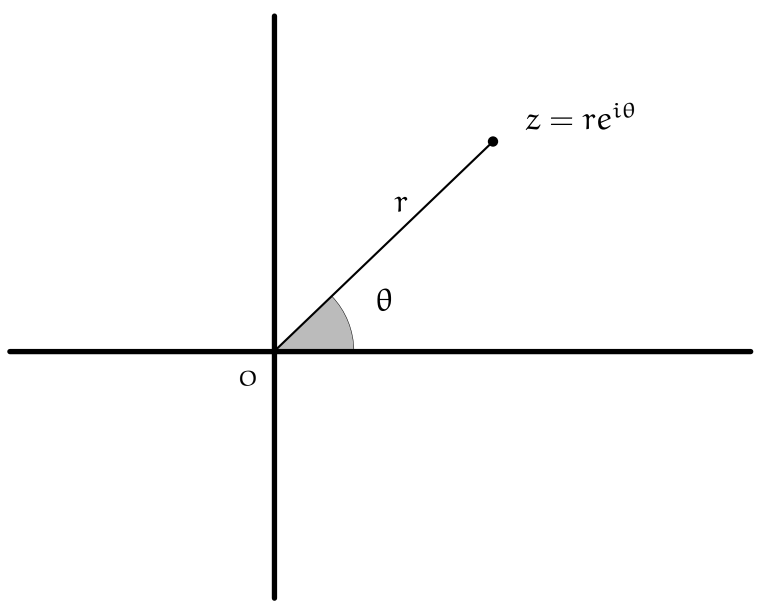


Plus intéressant encore, le module de $|z|$ s'interprète comme la distance séparant le point Z d'affixe z de l'origine O du repère. Le nombre $|z - z'|$ correspond alors à la distance entre les points Z et Z' d'affixes z et z'. L'inégalité triangulaire énoncée tout à l'heure porte donc bien son nom.

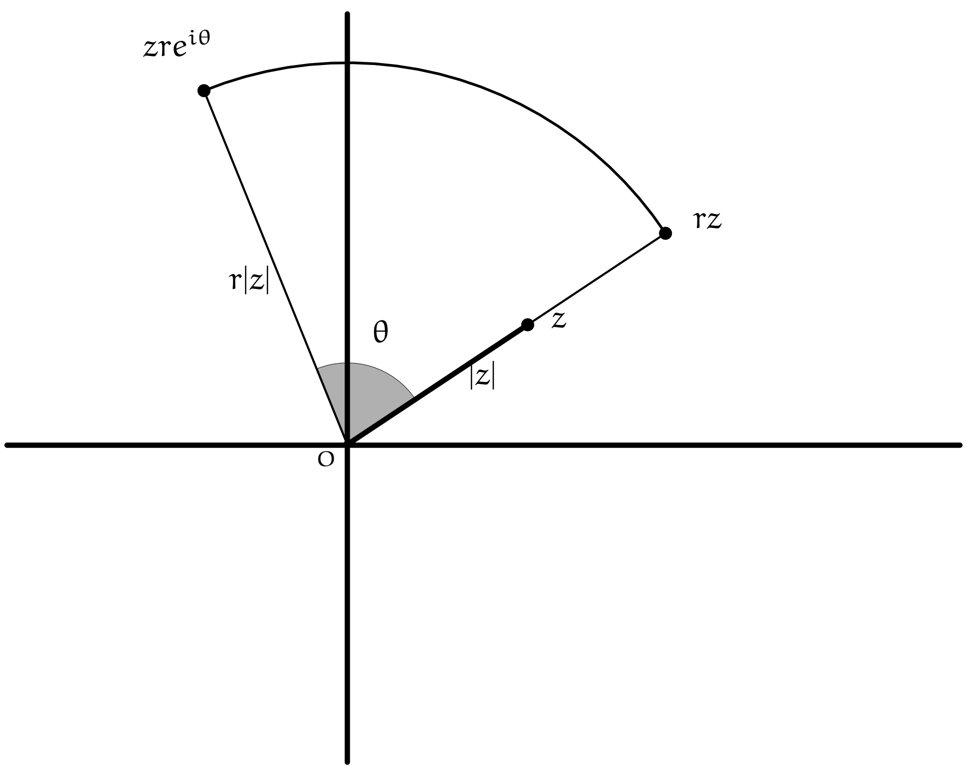


Regardons à présent la traduction géométrique de la notation sous forme exponentielle. Jusqu'ici, la forme dite algébrique (c'est-à-dire l'écriture $a + ib$) nous permettait de repérer un point comme en cartésien, c'est-à-dire avec abscisses et ordonnées.

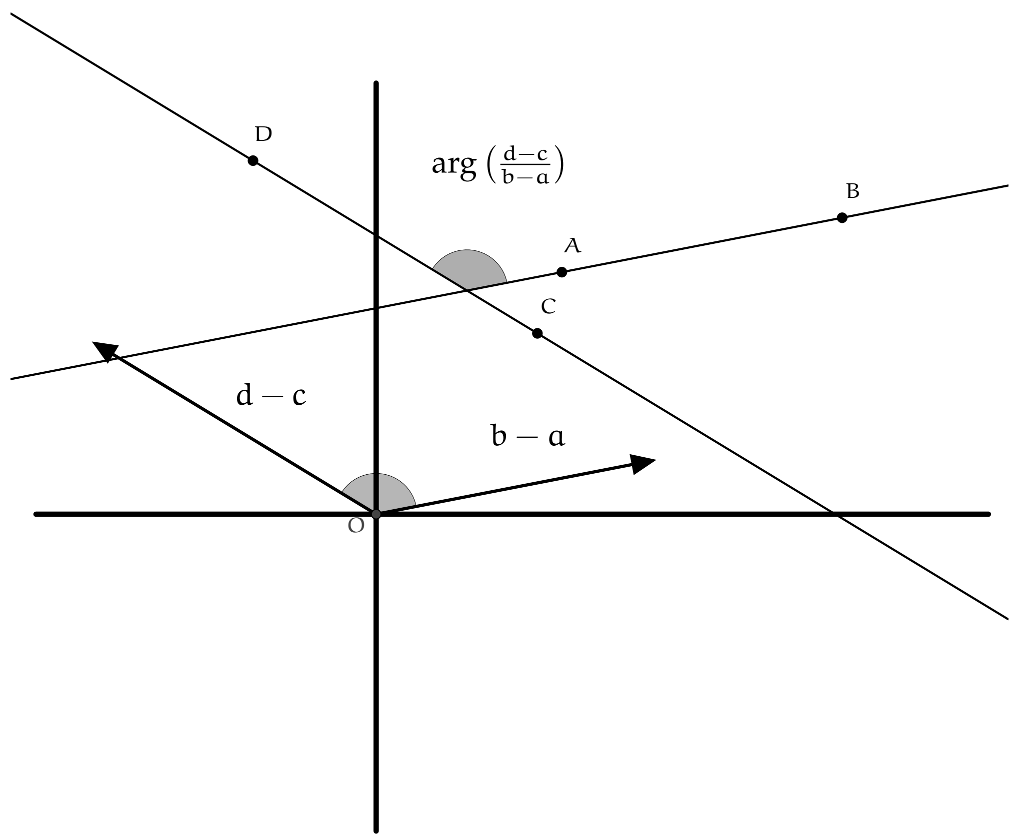
La forme exponentielle du complexe z permet de repérer le point Z d'affixe z grâce à son module et un argument, c'est-à-dire la distance séparant le point Z de l'origine O et l'angle orienté que forme l'axe des abscisses avec la droite (OZ).



Voyons alors l'effet de la multiplication d'un nombre complexe :
Soit Z un point d'affixe z. Regardons à quoi correspond le point Z', d'affixe $zre^{i\theta}$. Tout d'abord, le nombre rz possède le même argument que le complexe z (à 2π près). Le point d'affixe rz figure donc sur la même demi-doite partant de l'origine que Z. Le point d'affixe $rze^{i\theta}$ a pour argument un argument de z ajouté à θ. Il figure donc sur la demi droite formant un angle θ avec la droite (OZ). Ainsi, multiplier par $re^{i\theta}$ revient à tourner d'un angle de θ et à s'éloigner avec un rapport r de l'origine.



Pour conclure, disons qu'on peut également définir l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, qui vaut simplement $b - a$.
Typiquement, on obtient que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc si et seulement $b - a = c - d$ et donc si et seulement si $c + b = a + d$.
La notation exponentielle a également pour intérêt de définir les angles formés par deux vecteurs. En effet, choisissons deux vecteurs $\overrightarrow{Z}$ et $\overrightarrow{Z'}$ distincts et distincts de l'origine. Posons $\frac{z}{z'} = re^{i\theta}$. Alors l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{Z}$ et $\overrightarrow{Z'}$ correspond à θ (attention, tout ça se passe à 2π près).
Cela permet en particulier de définir l'angle entre deux droites quelconques : soit (AB) et (CD) deux droites du plan et soient a, b, c et d les affixes des points A, B, C et D respectivement. Alors les droites sont portées par les vecteurs d'affixes $b - a$ et $d - c$ donc l'angle (AB, CD) correspond à un argument du complexe $\frac{d-c}{b-a}$.



4.1.3 Intérêt du cercle unité

On appelle cercle unité l'ensemble des complexes de module 1, c'est-à-dire l'ensemble des complexes s'écrivant sous la forme $e^{i\theta}$.
Si z est un nombre complexe du cercle unité, alors $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$ donc

$$\bar{z} = \frac{1}{z}$$

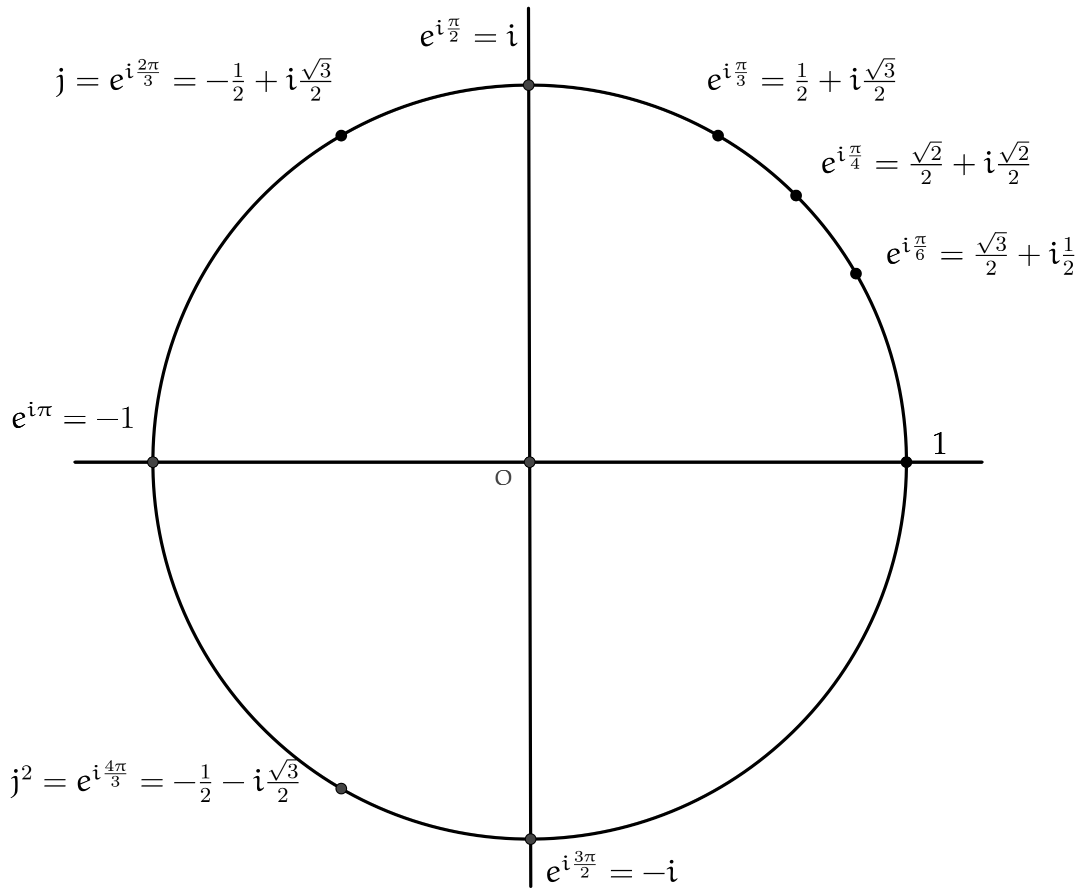
Etant donné que

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

on déduit que $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i\cdot 0} = 1$ et donc

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

Par la suite, le cercle unité sera très pratique étant donné que les conjugués apparaissent fréquemment.
Si les complexes considérés sont dans le cercle unité, les formules impliquant leur quantité conjuguée sont beaucoup plus simples que dans le cas général. Il sera donc commode, si la figure est centrée autour d'un cercle, de prendre comme origine le centre de ce cercle et de choisir ce cercle comme cercle unité.
Voici quelques points particuliers sur ce cercle :

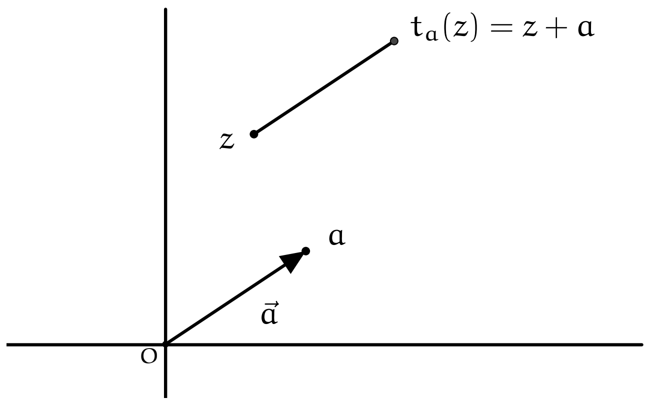


4.2 Géométrie complexe générale

4.2.1 Les transformations géométriques en coordonnées complexes

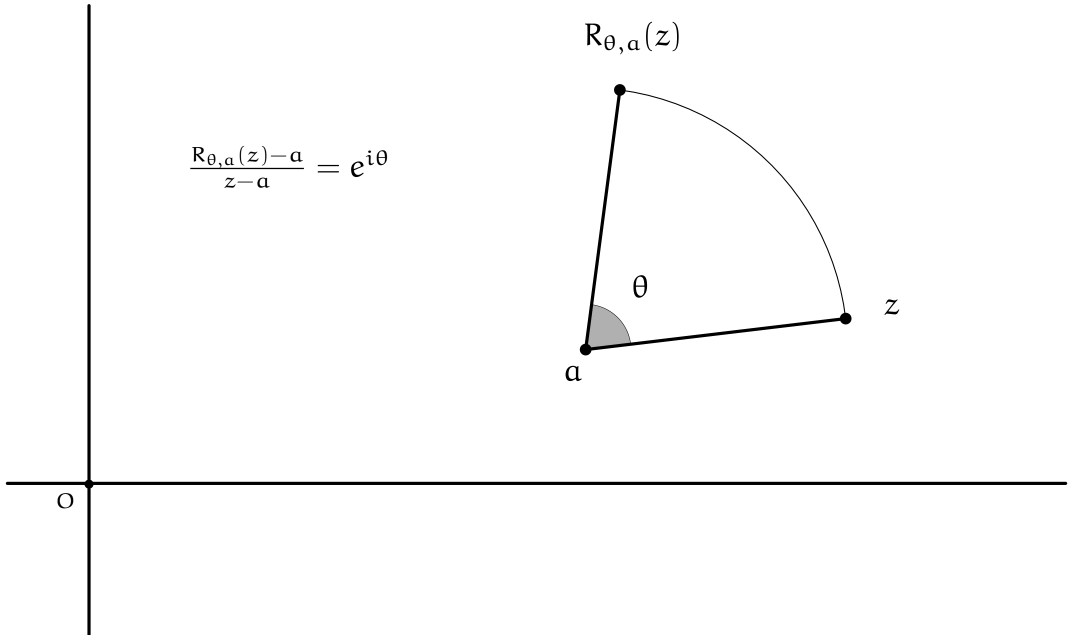
On rentre maintenant dans le vif du sujet en commençant à calculer certains affixes de points particulier, notamment l'affixe de l'image d'un point par un transformation géométrique. Dans toute la suite, le plan sera appelé *plan complexe* et les points seront exclusivement repérés par leurs affixes. L'axe des abscisses est nommé *axe réel* et l'axe des ordonnées l'*axe des imaginaires purs*. Dans la suite, sauf mention, on notera x l'affixe du point X. C'est-à-dire que la lettre désignant l'affixe d'un point correspond à la lettre désignant le point, mais en minuscule.

Tout d'abord, (faire un dessin pour s'en rendre compte) l'image d'un point Z d'affixe z par une translation t_a de vecteur d'affixe a est le point d'affixe $z + a$.



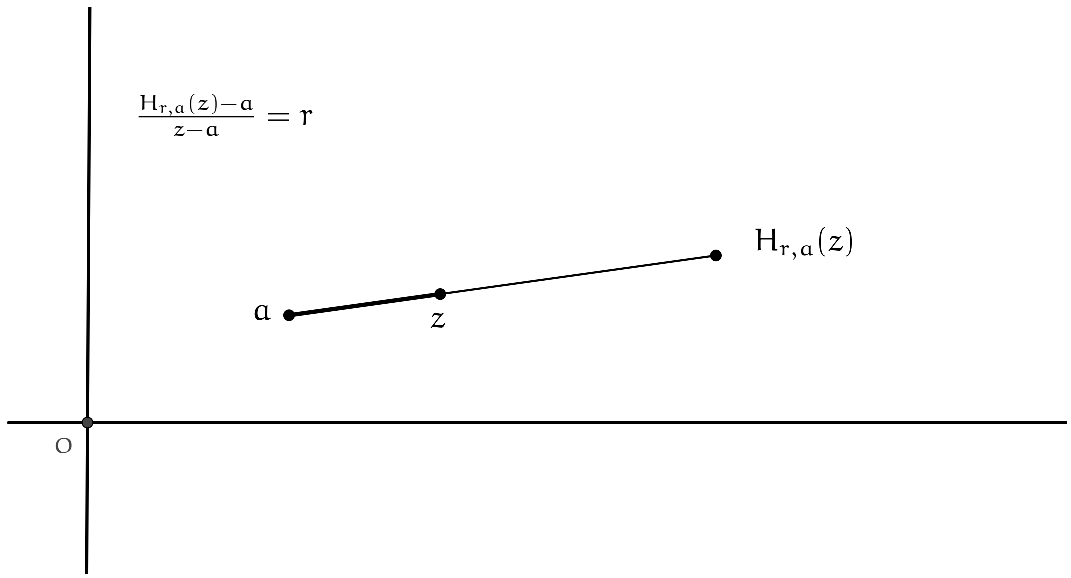
Ensuite, d'après l'interprétation géométrique du paragraphe précédent, on a la résultat suivant :

Proposition 1. *Soit R_θ la rotation de centre le point O d'affixe nulle et d'angle θ. Un point Z d'affixe z a pour image le point $R_\theta(Z)$ d'affixe $z \cdot e^{i\theta}$.*
Plus généralement, si $R_{\theta,a}$ est la rotation de centre le point A d'affixe a, alors l'image du point Z d'affixe par z par R_θ a pour affixe $e^{i\theta}(z - a) + a$.
(Pour cette deuxième formule, remarquer que $R_{\theta,a} = t_a \circ R_\theta \circ t_{-a}$)



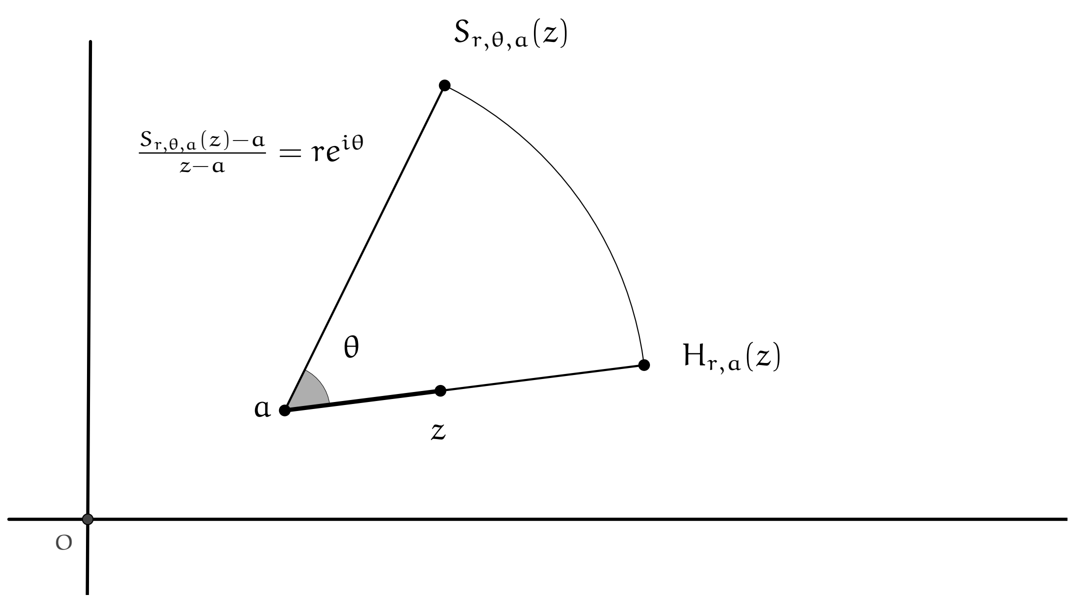
Voyons à présent l'effet d'une homothétie :

Proposition 2. *Soit* H_r *une homothétie de centre* O *de rayon* r*. L'affixe de l'image du point* Z *d'affixe* z *par* H_r *est* $r \cdot z$*.*
Plus généralement, si $H_{r,a}$ *est l'homothétie de rapport* r *de centre* A*, alors l'affixe du point* $H_{r,a}(Z)$ *vaut* $r(z-a)+a$*.*



On peut désormais voir l'effet d'une similitude, composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre :

Proposition 3. *Soit* $S_{r,\theta,a}$ *la similitude de centre* A *de rapport* r *et d'angle* θ*. Alors l'affixe du point* $S_{r,\theta,a}(Z)$ *vaut* $re^{i\theta}(z-a)+a$



Exemple 4. *Soit* ABC *un triangle équilatéral tel que* 1 *est l'affixe du point* A *et* 3 *est l'affixe du point* B. *Calculons l'affixe du point* C.
Le triangle ABC *est équilatéral donc le point* C *est l'image du point* B *par la rotation de centre* A *d'angle* $\frac{\pi}{3}$. *Ainsi :*

$$c = e^{i\frac{\pi}{3}}(2-1)+1 = 1+e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Ces résultats sur les similitudes permettent en particulier d'établir le critère suivant :

Proposition 4. *Soient* ABC *et* XYZ *deux triangles. Ces deux triangles sont semblables si et seulement si*

$$\frac{x-y}{x-z} = \frac{a-b}{a-c}$$

qui se réécrit aussi

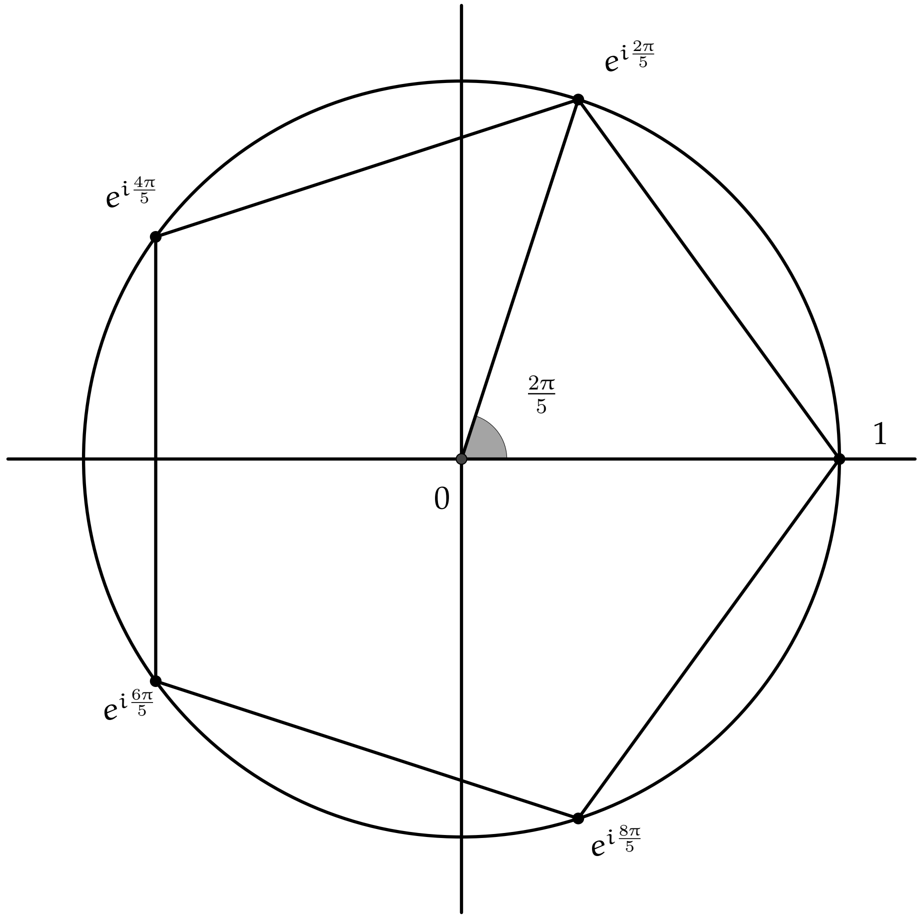
$$\begin{vmatrix} a & x & 1 \\ b & y & 1 \\ c & z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Cas particulier des polygones réguliers

Dans un polygone régulier, chaque sommet est obtenu en appliquant une rotation au sommet précédent. Par exemple, les affixes des sommets d'un n-gone régulier centré en O sont les nombres $e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ pour $k \in \{0,\dots,n-1\}$.
Ces nombres sont appelés racines $n-$ème de l'unité et satisfont diverses relations utiles au calcul. Par exemple, puisque les nombres $1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, \dots, e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \dots$ forment un progression géométrique de raison $e^{i\frac{2\pi}{n}}$, on a

$$1+e^{i\frac{2\pi}{n}}+\dots+e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} = \frac{1-e^{i\frac{2n\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

Voici l'exemple des racines 5-ème de l'unité, sommets d'un $5-$gone régulier.

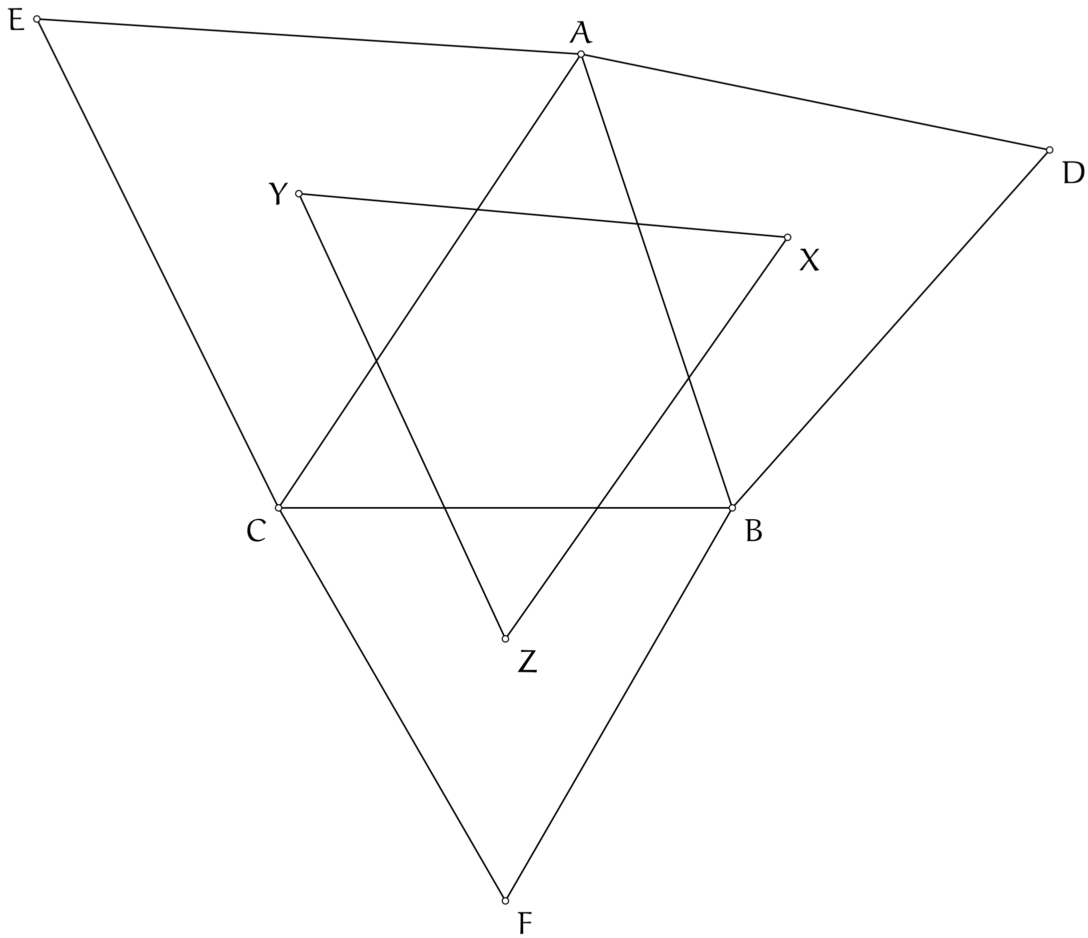


Voyons à présent un exemple montrant la puissance du calcul complexe dans le cas de polygones réguliers, le théorème de Napoléon :

Exemple 5. *Nous allons démontrer le résultat suivant :*

Théorème 1. *(Théorème dit de Napoléon) Soit* ABC *un triangle. On construit à l'extérieur du triangle* ABC *es points* D, E *et* F *respectivement de sorte que les triangles* BCD, ACE *et* ABF *sont équilatéraux. Alors les centres de gravité des trois triangles équilatéraux forment un triangle équilatéral.*

Démonstration.



Notons a, b et c les affixes des points A, B et C. Quitte à translater, on peut supposer que $c = 0$. On va devoir calculer les affixes des différents points, définis à partir de rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$. On va donc beaucoup utiliser le nombre $e^{i\frac{\pi}{3}}$.
Dans la suite, pour simplifier les notations, on notera $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$. ω vérifie $\omega^3 + 1 = 0$ et comme $\omega \neq -1$, ω vérifie la relation $\omega^2 - \omega + 1 = 0$. On calcule d. Le point D est l'image du point B par $R_{a,\frac{\pi}{3}}$. Ainsi

$$d = \omega(b - a) + a$$

De même, $e = R_{c,\frac{\pi}{3}}(a) = \omega a$ et $f = (1 - \omega)b$.
Notons X, Y et Z les centres de gravité respectifs des triangles ADB, ACE et BCF. Alors

$$x = \frac{a + b + d}{3} = \frac{(2 - \omega)a + (1 + \omega)b}{3}$$

$$y = \frac{e + c + a}{3} = \frac{(1 + \omega)a}{3}$$

$$z = \frac{b + c + f}{3} = \frac{(2 - \omega)b}{3}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $x = R_{\frac{\pi}{3},y}(z)$. Pour cela, on montre que $x - y = \omega(z - y)$. On peut déjà multiplier chaque côté par 3 pour se débarasser des dénominateurs.

$$3(x - y) = (2 - \omega)a + (1 + \omega)b - (1 + \omega)a = (1 - 2\omega)a + (1 + \omega)b$$

et d'autre part, en utilisant la relation $\omega^2 = \omega - 1$:

$$3\omega(z - y) = \omega((2 - \omega)b - (1 + \omega)a) = (-\omega - \omega^2)a + (2\omega - \omega^2)b = (1 - 2\omega)a + (1 + \omega)b$$

On a l'égalité désirée, le triangle est donc équilatéral. $\square$

Les transformations sont donc particulièrement efficaces pour calculer des affixes de points.

Exercice 1. *(Affixe du centre d'une similitude, à retenir) Soit* A, B, C *et* D *quatre points distincts. Montrer que l'affixe du centre de la similitude envoyant* A *sur* C *et* B *sur* D *a pour affixe*

$$x = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}$$

Exercice 2. *Soit* ABC *un triangle. On construit à l'extérieur du triangle les points* D, E, F *et* G *tels que les quadrilatères* $ABDE$ *et* $BCFG$ *soient des carrés. Soient* K, L, M *et* N *les milieux respectifs des segments* $[AD], [DG], [GC]$ *et* $[AC]$*. Montrer que le quadrilatère* $KLMN$ *est un carré.*

Exercice 3. *(Coupe Animath de Printemps 2020, énoncé originel) Soit* $ABCD$ *un carré et* S *le point tel que le triangle* BCS *est équilatéral et à l'extérieur du carré* $ABCD$*. Soit* H *le milieu du segment* $[AB]$ *et* N *le milieu du segment* $[DS]$*. Montrer que* $\widehat{NHC} = 60°$*.*

4.2.2 Conditions d'alignements, de perpendicularité, de cocyclicité

On aurait pu choisir de parler de l'alignement et de la perpendicularité avant de parler des similitudes. Cependant, les formules étant un peu plus compliquées pour caractériser les alignements, perpendicularités et cocyclicités, on préfère commencer par bien maitriser la notion d'angle dans le plan complexe ; et les transformations du plan fournissent à la fois une bonne façon de s'imprégner et des premiers outils pour pratiquer sur des exercices simples.

Commençons par l'alignement. Soient A, B et C trois points du plan complexes. Ces points sont alignés si et seulement si l'angle (AB, AC) vaut 0 ou π modulo 2π. Ainsi, ces points sont alignés si et seulement $\frac{c-a}{b-a}$ s'écrit $re^{i\cdot 0}$ ou $re^{i\cdot\pi}$. En somme, les points sont alignés si et seulement si le nombre complexe $\frac{c-a}{b-a}$ est réel.
Or, on dispose d'une caractérisation des complexes qui sont réels : ce sont les complexes égaux à leur conjugué ! On obtient la propriété suivante :

Proposition 5. *Les points* A, B *et* C *sont alignés si et seulement si*

$$\frac{c - a}{b - a} = \overline{\left(\frac{c - a}{b - a}\right)} = \frac{\overline{c} - \overline{a}}{\overline{b} - \overline{a}}$$

ou encore (et on préfère cette forme là) :

$$\frac{c - a}{\overline{c} - \overline{a}} = \frac{b - a}{\overline{b} - \overline{a}}$$

Il peut parfois être utile de retenir cette formule sous la forme du déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Un petit calcul permet de vérifier que ces formules sont bien équivalentes. La formule du déterminant peut également être retrouver à partir de la propriété suivante (dont on se sert peu) :

Proposition 6. *Soient* A, B *et* C *trois points du plan complexe. L'aire (orientée) du triangle* ABC *vaut*

$$\frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}$$

Le fait que les trois points sont alignés correspond au fait l'aire du triangle qu'ils forment est nulle.
On peut procéder de la même façon pour une caractérisation des droites parallèles. Pour deux droites parallèles (AB) et (CD), l'angle entre les droites vaut 0 ou π modulo 2π. On obtient :

Proposition 7. *Les droites* (AB) *et* (CD) *sont parallèles si et seulement si*

$$\frac{d-c}{b-a} = \frac{\overline{d}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{a}}$$

ou encore (et on préfère cette forme) :

$$\frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}} = \frac{d-c}{\overline{d}-\overline{c}}$$

Passons à la condition de perpendicularité :

Cette fois-ci, l'angle entre les droites (AB) et (CD) vaut $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, c'est-à-dire que le rapport $\frac{d-c}{b-a}$ est imaginaire pur, ce qui se caractérise par une égalité du type $z = -\overline{z}$.

Proposition 8. *Les droites* (AB) *et* (CD) *sont perpendiculaires si et seulement si*

$$\frac{b-a}{d-c} = -\frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{c}}$$

ou encore (et l'on préfère) :

$$\frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}} = -\frac{d-c}{\overline{d}-\overline{c}}$$

Passons désormais à la condition de cocyclicité. Une fois de plus, les angles orientés nous sauvent et nous aident à ne pas avoir à distinguer les divers cas. Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $(AB, AC) = (DB, DC)$, c'est-à-dire que les quantités $\frac{c-a}{b-a}$ et $\frac{c-d}{b-d}$ ont le même argument. Leur quotient est donc réel.

Proposition 9. *Les points* A, B, C *et* D *sont cocycliques si et seulement si*

$$\frac{c-a}{b-a} \cdot \frac{c-d}{b-d} = \overline{\frac{c-a}{b-a} \cdot \frac{c-d}{b-d}}$$

ou encore

$$\frac{c-a}{\overline{c}-\overline{a}} \cdot \frac{\overline{b}-\overline{a}}{b-a} = \frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}} \cdot \frac{\overline{b}-\overline{d}}{b-d}$$

Les amateurs de géométrie projective auront reconnu le birapport des quatre points. Je vous laisse faire le lien tout seul. En pratique, on se sert rarement de cette dernière formule.

Il est important de savoir retrouver rapidement chacune de ces caractérisations, voire même, pourquoi pas, apprendre les deux premières caractérisations par coeur.
Voyons quelques exemples d'applications. Certains exemples sont eux-mêmes des résultats important à retenir. Nous recommandons de ne pas lire les exemples mais bien de faire les calculs en même temps pour s'imprégner. Qu'ils servent d'exercice.

Exemple 6. *Voyons une condition pour montrer que deux cordes du cercle unité sont perpendiculaires. Soient* A, B, C *et* D *quatre points situés sur le cercle unité. Les droites* (AD) *et* (BC) *sont perpendiculaires si et seulement si*

$$\frac{d-a}{\overline{d}-\overline{a}} = -\frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}}$$

Mais puisque les points sont sur le cercle unité, on a par exemple $\overline{a} = \frac{1}{a}$. *Ainsi*

$$\frac{d-a}{\overline{d}-\overline{a}} = \frac{d-a}{\frac{1}{d}-\frac{1}{a}} = \frac{d-a}{\frac{a-d}{ad}} = -ad$$

De même $\frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}} = -bc$. *Ainsi, les cordes* (AD) *et* (BC) *sont perpendiculaires si et seulement si*

$$ad + bc = 0$$

On voit ici l'intérêt de se placer dans le cercle unité, dans lequel toutes les formules deviennent simples.

Voyons à présent une formule pour le pied de la perpendiculaire à une corde du cercle unité passant par un point quelconque.

Exemple 7. *Soit* B *et* C *deux points du cercle unité et soit* Z *un point quelconque. Notons* D *le pied de la hauteur issue du sommet* Z *dans le triangle* BCZ.
Les points B, C *et* D *sont alignés, ce qui se réécrit*

$$\frac{d-b}{\overline{d}-\overline{b}} = \frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}} = -bc$$

d'après le calcul précédent, ou encore

$$d + bc\overline{d} = c + b$$

Les droites (DZ) *et* (BC) *sont perpendiculaires, ce qui se réécrit*

$$\frac{d-z}{\overline{d}-\overline{z}} = -\frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}} = bc$$

ou encore :

$$d - bc\overline{d} = z - bc\overline{z}$$

En remplaçant $bc\overline{d}$ *par* $b + c - d$ *on trouve*

$$d = \frac{1}{2}(b + c + z - bc\overline{z})$$

Dans l'exemple suivant, on calcule l'affixe du point d'intersection de deux cordes (AB) et (CD) du cercle unité. La formule générale de l'affixe d'un point d'intersection de deux droites quelconques se calcule de la même façon mais, puisque très grande, est assez peu utilisable en pratique.

Exemple 8. *Soient* A, B, C *et* D *quatre points du cercle unité et soit* X *le point d'intersection des droites* (AB) *et* (CD).
Les points X, A *et* B *sont alignés, ce qui se traduit par :*

$$\frac{x - a}{\overline{x} - \overline{a}} = \frac{b - a}{\overline{b} - \overline{a}} = -ab$$

soit $x + ab\overline{x} = b + a$
Les points X, C *et* D *sont alignés, on obtient de même*

$$x + cd\overline{x} = c + d$$

en remplaçant $\overline{x}$ *par* $\overline{a}\overline{b}(b + a - x)$, *on obtient*

$$(ab - cd)x = ab(c + d) - cd(a + b)$$

et finalement

$$x = \frac{ab(c + d) - cd(a + b)}{ab - cd}$$

On voit avec cette formule que calculer des affixes de points d'intersection devient rapidement fastidieux si on en a trop à calculer. On veillera donc à limiter l'utilisation de complexes lorsque la figure présente trop de points d'intersections entre des droites (encore plus si les points ne sont pas sur le cercle unité !).

Exercice 4. *(Point d'intersection de deux tangentes, à retenir) Soient* A *et* B *deux points du cercle unité, calculer l'affixe du point d'intersection des tangentes en* A *et en* B *au cercle unité.*

Exercice 5. *(Inégalité de Ptolémée) Soit* $ABCD$ *un quadrilatère. Montrer que*

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geqslant AC \cdot BD$$

avec égalité si et seulement si le quadrilatère est cyclique.

Exercice 6. *(Droite de Simson) Soit* ABC *un triangle et soit* D *un point quelconque. Soient* X, Y *et* Z *les projetés orthogonaux du point* D *sur chacune des droites* $(AB), (BC)$ *et* (CA). *Montrer que les points* X, Y *et* Z *sont alignés si et seulement si le point* D *appartient au cercle circonscrit au triangle* ABC.

4.3 Géométrie complexe centrée autour d'un triangle de référence

4.3.1 Points particuliers

Dans toute la suite, on considère un triangle ABC dont les affixes des sommets sont notées a, b et c. Le triangle a pour cercle circonscrit le cercle unité, l'affixe du centre O de ce cercle est donc 0.

On sait déjà que le centre de gravité de ce triangle a pour affixe $g = \frac{a+b+c}{3}$.

Déterminons l'affixe h de l'orthocentre H.
On pourrait utiliser la formule du point d'intersection de deux droites, appliquées à deux hauteurs du triangle.
Mais pour gagner du temps, on va être plus malin. On sait que le symétrique X du point H par rapport au segment $[BC]$ appartient au cercle unité et vérifie, d'après les exemples précédents, la relation $xa + bc = 0$, soit $x = -bc\overline{a}$.
De plus, avec l'exemple du paragraphe précédent, on sait que le pied H_A de la hauteur issue du sommet A a pour affixe $h_A = \frac{1}{2}(a + b + c - bc\overline{a})$.
Puisque $h_a = \frac{h+x}{2}$, on obtient immédiatemment la jolie formule suivante :

$$h = a + b + c$$

Dans un triangle quelconque, on sait donc déterminer les affixes du centre de gravité, de l'orthocentre, des pieds des hauteurs et des milieux des côtés.

Exercice 7. *Retrouvez à l'aide des nombres complexes le résultat suivant : les symétriques de l'orthocentre d'un triangle ABC par rapport aux milieux des côtés appartiennent au cercle circonscrit au triangle ABC et correspondent aux points diamétralement opposés aux sommets A, B et C.*

Exercice 8. *Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Retrouver que les pieds des hauteurs, les milieux des côtés et les milieux des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$ appartiennent tous à un même cercle de centre le milieu du segment $[OH]$ et de rayon $R/2$, avec R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.*

Exercice 9. *(Droite de Steiner) Soit ABC un triangle et soit D un point quelconque. Soient X', Y' et Z' les symétriques du point D par rapport aux droites (AB), (BC) et (CA). Montrer que les points X', Y' et Z' sont alignés si et seulement si le point D appartient au cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que si c'est le cas, la droite $(X'Z')$ passe par le point H. La droite de Simson coupe donc le segment $[DH]$ en son milieu.*

4.3.2 Les affixes du centre du cercle inscrit et des pôles Sud

Nous n'avons pas évoqué encore l'affixe du centre du cercle inscrit d'un triangle, ni l'affixe des pôles Nords et Sud.
Comment les calculer ?

Prenons par exemple le pôle Sud S du point A dans le triangle ABC de cercle circonscrit le cercle unité.
On écrit $b = e^{i\theta}$ et $c = e^{i\phi}$. Puisque le point S est le milieu de l'arc BC, on pourrait penser que son argument vaut la moyenne des arguments de b et c.
Le problème c'est qu'un argument est choisi à 2π près, ainsi la moyenne de deux arguments se calculerait modulo π et non plus modulo 2π. Ceci est cohérent avec le fait qu'il y a deux arcs BC et donc deux moyennes possibles, correspondant aux pôles Nord et Sud.

Pour régler ce problème, on effectue un changement de variables, en admettant le résultat suivant :

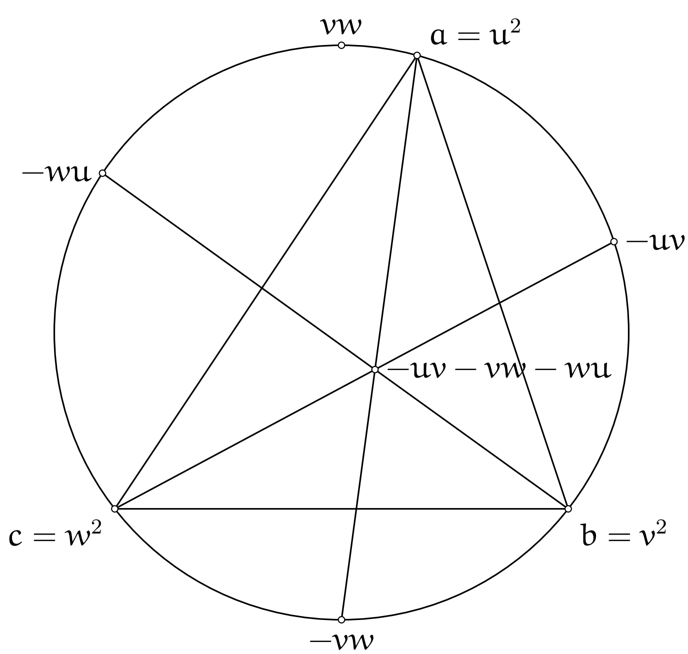
Théorème 2. *Soient* a, b *et* c *trois complexes du cercle unité. Alors on dispose de trois complexes du cercle unité* u, v *et* w *tels que*

- $a = u^2$, $b = v^2$ *et* $c = w^2$
- *L'affixe du pôle Sud du sommet* A *dans le triangle* ABC *est* $-vw$. *L'affixe du pôle Nord du sommet* A *est* vw.
- *L'affixe du pôle Sud du sommet* B *dans le triangle* ABC *est* $-wu$. *L'affixe du pôle Nord du sommet* B *est* wu.
- *L'affixe du pôle Sud du sommet* C *dans le triangle* ABC *est* $-uv$. *L'affixe du pôle Nord du sommet* C *est* uv.

Comment en déduire l'affixe du point I, centre du cercle inscrit du triangle ABC ? On se souvient que le point I est l'orthocentre du triangle formé par les pôles Sud du triangle ABC. Puisque les pôles Sud sont sur le cercle unité, la formule de l'orthocentre nous dit que l'affixe du point I est la somme des affixes des pôles sud. En notant k l'affixe de I (pour ne pas confondre l'affixe du point I avec le nombre complexe i), on a donc

$$k = -uv - vw - wu$$

en gardant les notations du théorème.



Ainsi, dans un problème impliquant le centre du cercle inscrit du triangle de référence, on commencera par changer de variable et se placer en coordonnées u^2, v^2, w^2, c'est-à-dire qu'on introduira les complexes u, v et w satisfaisant le théorème et on travaillera avec u, v et w plutôt qu'avec a, b et c.

Exemple 9. *Calculons les affixes des points de contact du cercle inscrit avec les côtés du triangle* ABC, *en fonction de* u, v *et* w, *si* ABC *est inscrit dans le cercle unité.*

Soit D *le point de contact du cercle inscrit avec le côté* $[BC]$. *On se contente de calculer* d, *les expressions des autres points de contact s'obtiennent de manière cyclique.*
Puisque le point D *est le projeté orthogonale du point* I *sur le segment* $[BC]$, *on a besoin de l'affixe du point* I. *On change alors de varibale et on se place en coordonnées* u^2, v^2 *et* w^2.
Alors, en notant k *l'affixe du point* I *le centre du cercle inscrit du triangle* ABC, $k = -uv - vw - wu$.
On a donc

$$d = \frac{1}{2}(b + c - bc\overline{k}) = \frac{1}{2}(v^2 + w^2 + (v + w)(\bar{u}vw - u))$$

Remarquons que cette expression n'est pas très simple et donc ne sera pas facile à manipuler. On le verra dans le chapitre suivant, mais il est préférable d'utiliser les coordonnées barycentriques en présence des points de contact du cercle inscrit plutôt que les nombres complexes.

4.4 Quand utiliser (ou pas) les nombres complexes ?

On aura vu à travers ce chapitre que les nombres complexes ne passent pas à toutes les sauces et qu'ils ne conviennent que pour des configurations bien choisies. Voici quelques critères pour qu'un exercice se fasse bien en géométrie complexe.

- Les points sont définis par des transformations géométriques. En effet, on a vu qu'on pouvait facilement déterminer l'affixe de points définis par des transformations géométriques comme les rotations, les homothéties et plus généralement les similitudes. La formule de l'affixe du projeté orthogonal permet d'avoir l'affixe du symétrique d'un point par rapport à une corde du cercle unité.
- La figure est centrée autour d'un triangle. On peut alors fixer comme cercle unité le cercle circonscrit de ce triangle. On connaît alors les affixes des points particuliers, qui ont des expressions assez simples.
- Il y a peu de points définis comme l'intersection de deux droites. On l'a vu, l'expression de l'affixe d'un point d'intersection de deux droites n'est pas simple à manipuler. Son utilisation pourrait entraîner des calculs interminables voire inhumains. De manière générale, s'il y a peu de points dans la figure, c'est plus facile car il y a moins de calculs et moins de risques que les expressions deviennent abominables.
- Il n'y a qu'un ou deux cercles dans la figure, et l'un d'eux est un cercle central. Si l'on peut choisir comme cercle unité l'un des cercles et que la plupart des points de la figure appartiennent à ce cercle, les calculs seront beaucoup plus faciles. Si un deuxième cercle coupe le cercle unité en deux points, on peut identifier une similitude et calculer l'affixe du centre de la similitude. Ainsi, il est parfois possible de calculer les affixes des points d'intersections de deux cercles (cf exemple qui suit). Mais la formule n'est pas forcément manipulable, il faut donc là aussi prendre garde à ce que les calculs ne dégénèrent pas.
- Il y a un point variable dans la figure. On n'en a pas forcément parlé, mais lorsqu'un point est variable, la géométrie analytique est une bonne façon de gérer le problème. Dans le plan complexe, un point n'a qu'une seule coordonnée, son affixe. Il n'y a donc qu'une seule inconnue à gérer dans les différentes formules, et on peut exprimer toutes les autres affixes en fonction de l'affixe du point variable. Si le point varie sur un cercle, c'est encore mieux, car on choisit ce cercle pour cercle unité.

Du coup, voici la liste des cas où il vaut mieux éviter de calculer en complexe :

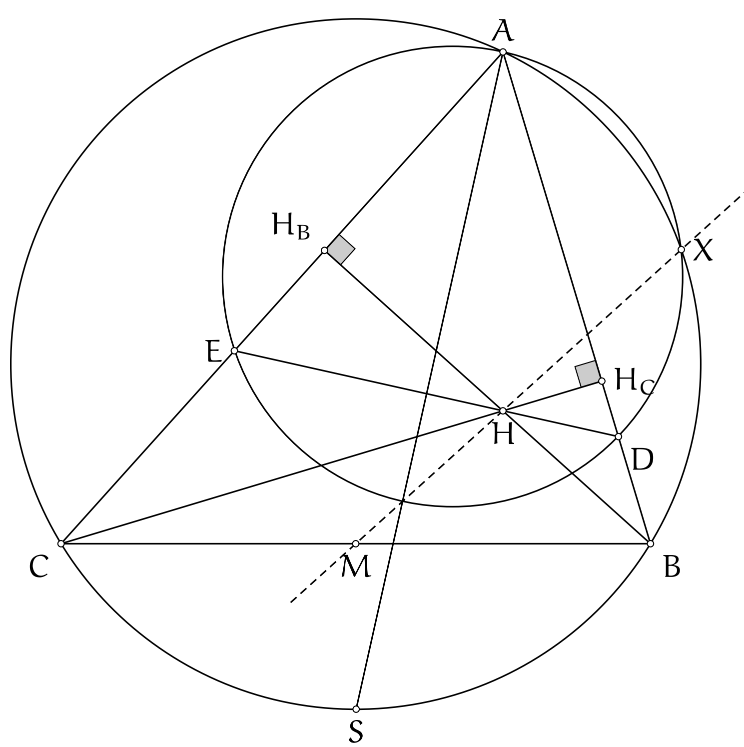
- Trop de cercles. Même s'il y a un cercle et un triangle de référence, il vaut mieux éviter de se lancer. De plus, on sait assez peu comment trouver les points d'intersection d'une droite et d'un cercle.
- Trop de fractions avec des dénominateurs différents lors des calculs des premiers affixes. Des affixes qui sont des fractions fournissent des calculs très laborieux, prenant un temps immense et une énergie folle. Il vaut mieux revenir en arrière et chercher une autre façon plutôt que de se lancer dans des calculs. Pour certains exercices, un dernier calcul un peu fastidieux est un prix à payer, mais la plupart du temps, c'est une cause perdue par rapport à l'impératif du temps limité.

4.5 Un exemple d'exercice qui marche bien en complexes

Voyons un exemple de problème d'olympiades que l'on peut humainement résoudre avec les nombres complexes avec le G5 de la Shortlist 2005.

Exercice 1. *(G5 IMOSL 2005) Soit* ABC *un triangle actuangle qui n'est pas isocèle en* A*. Soit* H *l'orthocentre du triangle* ABC *et soit* M *le milieu du segment* $[BC]$*. Soit* D *et* E *deux points situés respectivement sur les segments* $[AB]$ *et* $[AC]$ *tels que les points* D, H *et* E *sont alignés et* $AD = AE$*. Montrer que la droite* (HM) *est perpendiculaire à la corde commune aux cercles respectivement circonscrits aux triangles* ABC *et* AED*.*

Solution de l'exercice 1 On commence toujours par faire une figure propre. Comment placer D et E ? Puisque $AD = AE$, la droite (DE) est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. On obtient la figure suivante :



Avec un figure propre, le constat que les points M, H et X sont alignés est immédiat.

C'est là qu'il est bien d'avoir de la culture en géométrie : le point X' d'intersection de la droite (MH) avec le grand arc BC n'est autre que le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et AH_BH_C. Notons aussi, et cela est plus connu, que le point d'intersection Y' de la droite (HM) avec le petit arc BC est également le point diamétralement opposé au sommet A dans cercle circonscrit au triangle ABC. Il vient que $\widehat{MX'A} = 90°$. Ainsi, si l'on montre que $X = X'$, nous avons terminé l'exercice.

On commence alors à chercher ce résultat à la régulière. Si l'on ne trouve rien de concluant on peut alors se demander si l'on ne pourrait pas résoudre ce problème en complexe en montrant que les affixes des points X' et X sont identiques.

Posons nous alors les différentes questions qui s'imposent : peut-on calculer les affixes de chacun des points et est-ce que ce sera supportable en terme de calcul. La première difficulté est pour les affixes des points D et E. On se rappelle alors de comment on a tracé les points D et E : en utilisant la droite (AS). On va donc avoir besoin du point S et donc de se placer en coordonnées (u^2, v^2, w^2). La deuxième difficulté est pour les points X' et X. Mais par définition, X est le centre de la similitude envoyant D sur B et F sur C et on a vu en exercice comment déterminer l'affixe du centre de la similitude envoyant une paire de point sur une autre. Idem pour X' qui est par définition le centre de la similitude envoyant H_B sur C et H_C sur B.
L'intérêt de procéder comme suit est que l'on ne s'attende pas à ce que l'expression de x soit très sympathique, et si on montrait bêtement l'alignement de H, M et X, on aurait à manipuler $\overline{x}$ en plus de x.

C'est parti ! Dans la suite, on note en minuscule l'affixe d'un point noté en lettre majuscule. On effectue le changement de variable en invoquant des complexes u, v et w tels que $a = u^2$, $b = v^2$, $c = w^2$, $s = -vw$, $h = u^2 + v^2 + w^2$.
On calcule d : d'une part D est sur (AB) donc

$$\frac{d - u^2}{\overline{d} - \overline{u}^2} = \frac{u^2 - v^2}{\overline{u}^2 - \overline{v}^2} = -u^2v^2$$

$$d + u^2v^2\overline{d} = u^2 + v^2$$

et d'autre part la droite (DH) est perpendiculaire à la droite (AS) :

$$\frac{d - h}{\overline{d} - \overline{h}} = -\frac{u^2 + vw}{\overline{u}^2 + \overline{vw}} = -u^2vw$$

$$d + u^2vw\overline{d} = h + u^2vw\overline{h} = u^2 + v^2 + w^2 + vw + u^2\frac{v}{w} + u^2\frac{w}{v}$$

On peut alors résoudre le système et obtenir :

$$d = \frac{v}{w} \cdot \frac{u^2w + v^2w + w^3 + u^2v}{v - w}$$

On obteint de même l'expression de e :

$$e = \frac{w}{v} \cdot \frac{u^2v + v^3 + vw^2 + u^2w}{w - v}$$

Ces expressions ne sont pas forcément très agréables, en plus de comporter des fractions. Surtout que pour calculer x, le centre de la smilitude envoyant D sur B et E sur C, on va devoir utiliser la formule

$$x = \frac{dw^2 - ev^2}{d + w^2 - e - v^2}$$

On va donc s'épargner un peu de calcul en utilisant

$$x = \frac{dw^2 - ev^2}{d + w^2 - e - v^2} = \frac{(v-w)dw^2 - (v-w)ev^2}{(v-w)(d-e) + (w^2 - v^2)(v-w)}$$

afin de manipuler $(v-w)d$ et $(v-w)e$, ce qui va réduire un peu la quantité de fractions (attention aux signes).
Vous vous souvenez du moment où on a dit "les méthodes analytiques sont parfois très calculatoires, il faut être prêt à faire des gros calculs et sans erreur" ? Bah c'est maintenant.
Calculons séparément numérateurs et dénominateurs :

$$\begin{aligned}(v-w)dw^2 - (v-w)ev^2 &= wv[u^2w + v^2w + w^3 + u^2v + u^2v + v^3 + vw^2 + u^2w] \\ &= vw(v+w)[v^2 + w^2 + 2u^2]\end{aligned}$$

et

$$(v-w)(d-e) + (w^2 - v^2)(v-w) = (v+w)[2vw + u^2(\frac{v}{w} + \frac{w}{v})]$$

et donc

$$x = \frac{vw[v^2 + w^2 + 2u^2]}{[2vw + u^2(\frac{v}{w} + \frac{w}{v})]}$$

On calcule désormais x' l'affixe du point X'. Par définition de h_B, on trouve $h_B = \frac{1}{2}(h - u^2w^2\overline{v}^2)$ et $h_C = \frac{1}{2}(h - u^2v^2\overline{w}^2)$. x' est l'affixe du centre de la similitude qui envoie H_B sur C et H_C sur B. Ainsi :

$$x' = \frac{v^2h_B - w^2h_C}{v^2 + h_B - w^2 - h_C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h(v^2 - w^2) + u^2v^2 - u^2w^2}{v^2 - w^2 + \frac{1}{2}u^2(\frac{v^2}{w^2} - \frac{w^2}{v^2})} = \frac{h + u^2}{2 + \frac{u^2}{v^2w^2}(v^2 + w^2)}$$

C'est le moment de vérité, a-t-on $x' = x$?
On peut s'en apercevoir en remplaçant h par $u^2 + v^2 + w^2$ et en passant le vw du numérateur de x au dénominateur, nous donnant bien que $x' = x$ et permettant de conclure le problème !

Pour conclure cet exemple, remarquons simplement qu'il était très facile de faire une erreur de calcul puisque les expressions étaient assez grandes. Elles restaient toutefois gérables.

4.6 Exercices

Exercice 1. *Soit* ABC *un triangle,* H *son orthocentre et* M *le milieu du segment* $[BC]$*. Une droite passant par* A *recoupe le cercle circonscrit au triangle* ABC *en un point* Z*. Soit* Y *le projeté orthogonal du point* H *sur le segment* $[AZ]$*. Montrer que* $MY = MZ$*.*

Exercice 2. *(Cyberspace Mathematical Competition 2020 P6) Déterminer tous les entiers* $n \geqslant 2$ *satisfaisant la propriété suivante : Si un* n*-gone* $\mathcal{P}$ *convexe possède* $n-1$ *côtés de même longueur et* $n-1$ *angles de même mesure, alors le polygone* $\mathcal{P}$ *est un polygone régulier.*

Exercice 3. *(Olympiade Francophone de Mathématiques 2020) Soit* ABC *un triangle aux angles aigus tel que* $AB < AC$*. Soit* D, E *et* F *les points de contact respectifs du cercle inscrit au triangle* ABC *avec les côtés* $[BC], [CA]$ *et* $[AB]$*. La droite perpendiculaire au semgent* $[EF]$ *passant par le point* D *recoupe le segment* $[AB]$ *en un point* G*. Le cercle circonscrit au triangle* AEF *recoupe le cercle circonscrit au triangle* ABC *au point* X*. Montrer que les points* X, G, D *et* B *sont cocycliques.*

Exercice 4. *(G2 Balkan MO 2018) Soit* ABC *un triangle et* Γ *son cercle circonscrit. Soit* O *le centre de* Γ *et* H *l'orthocentre du triangle* ABC*. Soit* K *le milieu du segment* $[OH]$*. La tangente en* B *au cercle* Γ *coupe la médiatrice du segment* $[AC]$ *en un point* L*. La tangente en* C *au cercle* Γ *coupe la médiatrice du segment* $[AB]$ *en un point* M*. Montrer que les droites* (AK) *et* (LM) *sont perpendiculaires.*

Exercice 5. *(Taiwan TST 2019 Round 1 Quiz 2 P1) Soit* ABC *un triangle,* H *sont orthocentre et* P *un point appartenant au cercle circonscrit au triangle* ABC*. Soit* M *le milieu du segment* $[HP]$*. On définit les points* D, E *et* F *sur les segments* $[BC], [CA]$ *et* $[AB]$ *respectivement tels que les droites* (AP) *et* (HD) *sont parallèles, les droites* (BP) *et* (HE) *sont parallèles et les droites* (CP) *et* (HF) *sont parallèles. Montrer que les points* D, E, F *et* M *sont alignés.*

Exercice 6. *(ELMO 2016 P2) Soit* ABC *un triangle et* Γ *son cercle circonscrit. Soit* D *le point d'intersection des tangentes au cercle* Γ *en les points* B *et* C*. Soit* B' *le symétrique du point* B *par rapport à la droite* (AC) *et soit* C' *le symétrique du point* C *par rapport à la droite* (AB)*. Soit* O *le centre du cercle circonscrit au triangle* $DB'C'$*. Montrer que les droites* (AO) *et* (BC) *sont perpendiculaires.*

5 Les coordonnées barycentriques

Dans les chapitres précédents, on a d'abord vu l'analytique en cartésien, avec deux coordonnées. On avait vu que deux coordonnées, ça donnait des calculs un peu compliqués. Puis on a vu les nombres complexes qui avaient l'avantage de n'associer qu'une seule coordonnée à un point, ce qui rendaient les calculs assez agréables.

Et maintenant on aborde le chapitre des coordonnées barycentriques, où on associe à un point non pas une, non pas deux mais bien TROIS coordonnées. Comment ? Mais pourquoi faire ? Quel est l'avantage d'avoir plus de coordonnées ? Nous allons essayer d'en découvrir l'intérêt au fur et à mesure du chapitre.

5.1 Coordonnées homogènes dans un triangle de référence

Contrairement au plan cartésien ou au plan complexe, où l'on a besoin de deux axes ou d'un cercle de référence, en géométrie barycentrique il y a besoin d'un triangle de référence.
Imaginons que l'on choisisse le triangle ABC comme triangle de référence. Pour tout point P, on dispose d'un unique triplet de réels (x, y, z) tel que $x + y + z = 1$ et tel que

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$$

avec O un point quelconque. Notons que les réels x, y et z ne dépendent pas du point O choisit (vérifier pourquoi). Ainsi, la notation $\vec{P} = x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}$ est parfois utilisée.

Et bien voilà, on a trouvé les coordonnées barycentriques du point P, il s'agit du triplet (x, y, z). On a terminé le chapitre ? Non, les coordonnées barycentriques possèdent encore quelques subtilités.
Tout d'abord, on peut calculer les réels x, y et z à l'aide de la formule suivante :

$$(x, y, z) = \left(\frac{\text{Aire}(PBC)}{\text{Aire}(ABC)}, \frac{\text{Aire}(PCA)}{\text{Aire}(BCA)}, \frac{\text{Aire}(PAB)}{\text{Aire}(CAB)}\right)$$

où $\text{Aire}(XYZ)$ est l'aire *orientée* du triangle XYZ.
On en déduit que les sommets A, B et C ont pour coordonnées respectives $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.
Soyons un instant émus par la symétrie offerte par ces coordonnées. Ceci annonce que les coordonnées barycentriques seront particulièrement *friendly* lorsque le problème tourne autour d'un triangle.

Observons également que cette formule donne un bon moyen de vérifier la cohérence des calculs que l'on peut-être amené à faire. En effet, un point situé à l'intérieur du triangle aura toutes ses coordonnées strictement positives. A l'inverse, un point situé de l'autre côté que A du segment $[BC]$ aura sa première coordonée négative.

Les points en coordonnées barycentriques ont donc trois coordonnées liées par une relation. On a donc bien $3 - 1 = 2$ degrés de liberté, ce qui est rassurant lorsqu'on se balade dans un plan. En parcourant le plan, on retrouve donc tous les triplets (x, y, z) dont les coordonnées sont de somme 1.

On passe à l'étage au dessus : jusqu'ici, on n'a considéré que des triplets (x, y, z) de coordonnées de somme 1. On appelle ces coordonnées les coordonnées *homogènes*.

On introduit les coordonnées inhomogènes d'un point P comme les coordonnées $(x : y : z)$, où x, y et z sont des réels tels que les coordonnées homogènes de P sont

$$\left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}\right)$$

L'esprit des coordonnées inhomogènes, c'est que si k est un réel non nul, les coordonnées $(kx : ky : kz)$ et $(x : y : z)$ représentent le même point. Si un point P a pour coordonnées inhomogènes $(x : y : z)$, on peut retrouver ses coordonnées homogènes en divisant chaque coordonnée par $x+y+z$. Nous verrons dans la suite à quel point les coordonnées inhomogènes sont commodes pour les calculs. Les amateurs de géométrie projective peuvent déjà voir une ressemblance frappante entre le "plan barycentrique" et le plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$.

Dans la suite, par confort, et puisque les coordonnées homogènes de P sont aussi des coordonnées inhomogènes, on confondra coordonnées inhomogènes et coordonnées homogènes, on les appellera simplement coordonnées barycentriques de P et on les notera (x, y, z) (oublions les :). On précisera lorsqu'il le faut si on utilise uniquement les coordonnées homogènes du point P.

5.2 Premiers pas avec les coordonnées barycentriques

Comme nous allons le voir, la géométrie barycentrique est la géométrie des droites. On est toujours dans le triangle de référence ABC.

5.2.1 Condition d'alignement de trois points

On voit ici un point essentiel de la géométrie barycentrique (s'il ne fallait retenir qu'une chose de la géométrie barycentrique, c'est celle là), c'est la condition pour que trois points soient alignés.
Cette condition découle du résultat suivant :

Théorème 3. *Soient P, Q et R trois points de coordonnées homogènes respectives (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) et (x_3, y_3, z_3). Alors*

$$\frac{\mathit{Aire}(PQR)}{\mathit{Aire}(ABC)} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

où on parle à nouveau en terme d'aire orientée.

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 1. *Soient P, Q et R trois points de coordonnées homogènes respectives (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) et (x_3, y_3, z_3). Alors les points P, Q et R sont alignés si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Cependant, on se souvient des propriétés d'homogénéité du déterminant : si $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$*, alors* $\begin{vmatrix} kx_1 & ky_1 & kz_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$ *pour tout réel* k *non nul. On a donc de façon plus générale :*

Soient P, Q *et* R *trois points de coordonnées barycentriques respectives* (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) *et* (x_3, y_3, z_3). *Alors les points* P, Q *et* R *sont alignés si et seulement si :*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Nous allons voir que dans beaucoup de cas, le déterminant et ses propriétés d'homogénéité nous permettent d'obtenir des conditions sur les coordonnées barycentriques des points, sans exiger que ces coordonnées soient forcément homogènes.

On déduit de cette condition que si un point P de coordonnées (x, y, z) appartient à la droite (BC), alors (en développant selon la première ligne) :

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = x$$

Ainsi, n'importe quel point de la droite (BC) a ses coordonnées barycentriques de la forme $(0, y, z)$. On a bien sûr des résultats analogues pour les droites (AB) et (CA). On pouvait bien sûr le deviner avec la formules reliant les coordonnées d'un point P aux aires des triangles PBC, PCA et PAB. Cette formule se décline alors en la formule suivante :

Proposition 2. *Soit* P *un point sur la droite* (BC). *Alors les coordonnées de* P *sont*

$$\left(0, \frac{\overline{CP}}{\overline{CB}}, \frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}\right)$$

où $\overline{XY}$ *est la longueur orientée.*

Notons également un deuxième résultat particulièrement satisfaisant, surtout parce que l'on n'a pas à utiliser les coordonnées homogènes :

Considérons un point P de coordonnées (x, y, z) et un point Q appartenant à la droite (AP). On note (x', y', z') les coordonnées barycentriques du point Q.
Alors en développant selon la première ligne :

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} = yz' - y'z$$

Ainsi, $\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}$ et en notant k ce rapport, les coordonnées de Q sont (x', ky, kz) ou encore $(\frac{x'}{k}, y, z)$. Ainsi, un point appartenant à la droite (AP) admet des coordonnées barycentriques de la forme (t, y, z). On retrouve bien que les coordonnées d'un point se baladant sur la droite (AP) admet un seul degré de liberté, correspondant au paramètre t.

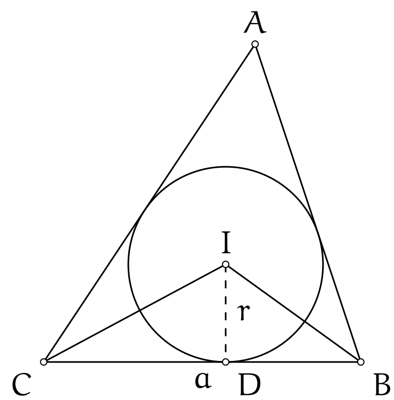
On retient de ces résultats que les céviennes d'un triangle, c'est-à-dire les droites passant par les sommets, sont très faciles à manipuler. De manière générale, les droites passant par des points comportant des 0 dans leurs coordonnées barycentriques sont faciles à manipuler.

5.2.2 Coordonnées des points particuliers du triangle de référence

On a vu que l'on pouvait facilement exprimer les coordonnées des points appartenant aux céviennes ou aux côtés du triangle de référence. On peut désormais calculer les coordonnées des points particuliers du triangle. Dans toute la suite, on notera a, b et c les longueurs respectives des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Tout d'abord, d'après la discussion ci-dessus, les coordonnées du milieu du segment $[BC]$ sont $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, ou, comme c'est plus commode, $(0, 1, 1)$.

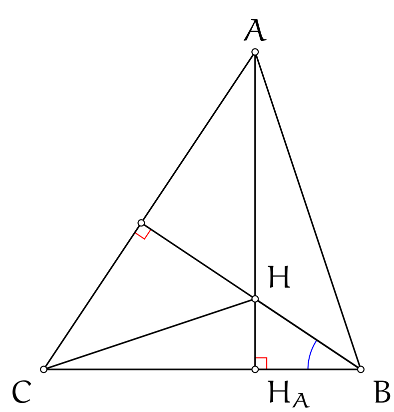
Par définition, mais on peut le vérifier par le calcul, le centre de gravité est "l'isobarycentre" du triangle, ses coordonnées barycentriques sont donc naturellement $(1, 1, 1)$.

Calculons les coordonnées du point I, centre du cercle inscrit.



Nous allons pour cela utiliser la formule des aires. Soit r le rayon du cercle inscrit au triangle ABC et soit D le point de contact du cercle inscrit avec le côté $[BC]$. L'aire du triangle BIC vaut alors $\frac{1}{2}r \cdot BC = \frac{1}{2}ra$. On obtient des résultats analogues pour les aires des triangles IAC et IAB. Les coordonnées du points I sont donc $(\frac{ra}{2}, \frac{rb}{2}, \frac{rc}{2})$ ou encore, et c'est plus commode, (a, b, c). On obtient par la même méthode que les coordonnées du centre I_A du cercle $A-$exinscrit sont $(-a, b, c)$ et je vous laisse deviner quelles sont les coordonnées du centre I_B du cercle $B-$exinscrit.

On peut désormais calculer les coordonnées du point H, l'orthocentre du triangle ABC.



On utilise à nouveau la formule des aires. On note H_A le pied de la hauteur issue du sommet A. Les triangles ABC et HBC ont la même base, le rapport des aires vaut donc $\frac{HH_A}{AH_A}$. On peut alors utiliser un peut de trigonométrie pour calculer ce rapport. Dans le triangle BHH_A rectangle en H_A,

$$\frac{HH_A}{H_AB} = \tan\widehat{HBH_A} = \tan\left(90° - \widehat{ACB}\right) = \frac{1}{\tan\widehat{ACB}}$$

De même dans le triangle AH_AB :

$$\frac{AH_A}{H_AB} = \tan\widehat{ABC}$$

Ainsi, $\frac{HH_A}{AH_A} = \frac{1}{\tan\widehat{ACB}\tan\widehat{ABC}}$.
Les coordonnées du point H sont donc

$$\left(\frac{1}{\tan\widehat{ACB}\tan\widehat{ABC}}, \frac{1}{\tan\widehat{BAC}\tan\widehat{BCA}}, \frac{1}{\tan\widehat{ABC}\tan\widehat{BAC}}\right)$$

ou encore, et c'est déjà plus commode, en multipliant par $\tan\widehat{ABC}\tan\widehat{BAC}\tan\widehat{ACB}$

$$(\tan\widehat{BAC}, \tan\widehat{ABC}, \tan\widehat{ACB})$$

On en déduit les coordonnées des pieds des hauteurs, par exemple les coordonnées de H_A : il appartient au segment $[BC]$ donc ses coordonnées sont de la forme $(0, y, z)$ et comme il est sur la droite (AH), ses coordonnées sont de la forme $(t, \tan\widehat{ABC}, \tan\widehat{ACB})$. En combinant ces deux informations, on déduit que les coordonnées de H_A sont $(0, \tan\widehat{ABC}, \tan\widehat{ACB})$.
On verra plus loin dans ce chapitre une autre façon d'écrire les coordonnées du point H avec les formules de Conway, qui sont bien plus pratiques.

On calcule les coordonnées du point O, encore avec la formule des aires. L'aire du triangle OBC vaut $\frac{1}{2}OB \cdot OC \sin\widehat{BOC}$. Puisque $OB = OC = R$ le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, et puisque $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$ d'après le théorème de l'angle au centre, en simplifiant par $\frac{1}{2}R^2$, les coordonnées du point O sont

$$(\sin 2\widehat{BAC}, \sin 2\widehat{ABC}, \sin 2\widehat{BCA})$$

Nous verrons là aussi une autre façon d'écrire ce point O avec les notations de Conway.

Poursuivons avec le résultat suivant :

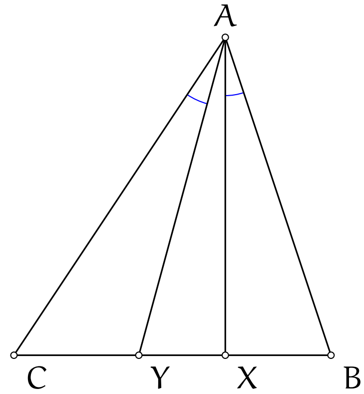
Proposition 3. *Soit P un point de coordonnées (x, y, z). Alors les coordonnées du conjugué isogonal P' du point P dans le triangle ABC sont*

$$\left(\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z}\right)$$

Démonstration. Afin de démontrer ce résultat, nous allons démontrer un lemme préliminaire :

Lemme 1. *Soient X et Y des points distincts du segment $[BC]$ tels que $\widehat{BAX} = \widehat{CAY}$. Alors :*

$$\frac{BY}{CY} \cdot \frac{BX}{CX} = \frac{AB^2}{AC^2}$$



Démonstration.
Des angles qu'on veut transformer en rapports, et sans triangles semblables apparents, c'est l'occasion d'utiliser la loi des sinus.
Dans le triangle ACY, on a $\frac{AC}{CY} = \frac{\sin \widehat{CYA}}{\sin \widehat{CAY}}$ et dans le triangle AYB, on a $\frac{YB}{AB} = \frac{\sin \widehat{YAB}}{\sin \widehat{CBA}}$ donc en combinant (avec en tête que $\sin \widehat{CYA} = \sin \widehat{BYA}$:

$$\frac{BY}{CY} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \widehat{YAB}}{\sin \widehat{CAY}}$$

On a de même pour le point X :

$$\frac{BX}{CX} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \widehat{XAB}}{\sin \widehat{CAX}}$$

Puisque $\widehat{CAY} = \widehat{BAX}$ et $\widehat{YAB} = \widehat{CAX}$, en combinant on trouve bien

$$\frac{BY}{CY} \cdot \frac{BX}{CX} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

□

On est à présent en mesure de démontrer la proposition. Soit X le point d'intersection de la droite (AP) avec la droite (BC) et soit Y celui des droites (AP') et (BC).
Alors les coordonnées du point X sont $(0, y, z)$. Celles du point Y sont donc $(0, CY, BY)$, soit

$$\left(0, CY, CY \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{CX}{BX}\right) = \left(0, 1, \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z}\right) = \left(0, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z}\right)$$

Les égalités sont bien sûr à prendre avec des pincettes, c'est un confort de notation pour dire qu'il s'agit des coordonnées du même point.
On obtient des résultats similaires en prolongeant les droites (BP), (BP'), (CP) et (CP').
En particulier, le point Z d'intersection des droites (BP') et (AC) a pour coordonnées $\left(\frac{a^2}{x}, 0, \frac{c^2}{z}\right)$.
On note alors (u, v, w) les coordonnées du point P'. Il est aligné avec les points A et Y donc ses coordonnées sont de la forme $\left(t, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z}\right)$. Il est aligné avec les points B et Z donc ses coordonnées sont aussi de la forme $\left(\frac{a^2}{x}, t', \frac{c^2}{z}\right)$. Ces deux coordonnées sont celles du même points donc proportionnelles. Comme la troisième coordonnée est identique dans chaque triplet, le rapport de proportionalité est de 1 donc $t = \frac{a^2}{x}$, on a donc les coordonnées désirées.

□

Grâce à cette propriété, on peut déduire les coordonnées barycentriques de quelques points supplémentaires. Par exemple, le point de Lemoine, point de concours des symmédianes est le conjugué isogonal du centre de gravité, ses coordonnées barycentriques sont donc (a^2, b^2, c^2). On récapitule tout cela dans un tableau :

point	coordonnées barycentriques
G centre de gravité	$(1, 1, 1)$
I centre du cercle inscrit	(a, b, c)
I_A centre du cercle A − exinscrit	$(-a, b, c)$
K point d'intersection des symmédianes	(a^2, b^2, c^2)
H orthocentre	$(\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma)$
O centre du cercle circonscrit	$(\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma)$

Voyons comment s'en servir et à quel point il est facile de calculer les coordonnées barycentriques de points d'intersections de droites passant par les sommets.

Exemple 10. *Calculons les coordonnées barycentriques du point d'intersection de la symmédiane issue du sommet* B *et de la médiane issue du sommet* C.

Soit P *le point d'intersection de ces deux droites et soient* (x, y, z) *ses coordonnées. Puisque le point* P *est aligné avec le point* B *et le point de Lemoine, on a*

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = xc^2 - za^2$$

ce qui nous donne un première équation.
Puisque le point P *est aligné avec le centre de gravité et le sommet* C

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = y - x$$

On obtient ainsi une deuxième équation. Puisqu'il y a un degré de liberté sur les coordonnées, on peut fixer $x = a^2$ *et obtenir les deux autres paramètres en fonction. On déduit que* $y = a^2$ *et* $z = c^2$. *Les coordonnées barycentriques du point* P *sont donc* (a^2, a^2, c^2).

Exercice 1. *Démontrer le théorème de Céva : soit* ABC *un triangle et soient* D, E *et* F *des points appartenant aux côtés respectifs* $[BC], [CA]$ *et* $[AB]$. *Alors les droites* $(AD), (BE)$ *et* (CF) *sont concourrantes si et seulement si*

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$$

Exercice 2. *Calculer les coordonnées du point de Gergonne et de Nagel du triangle de référence (c'est-à-dire les points d'intersection des droites relaiant les sommets aux points de contact des cercles inscrits et exinscrits aux côtés opposés). En déduire les coordonnées du point d'intersection des droites reliant les sommets aux points de contact des cercles mixtilinéaires avec le cercle circonscrit.*

5.2.3 Calculer les coordonnées d'un point appartenant à une droite parallèle à une droite donnée

Soit d une droite et X un point. On donne ici une méthode par l'exemple pour calculer les coordonnées d'un point appartenant à la droite parallèle à la droite d et passant par le point X.

Imaginons que l'on souhaite calculer les coordonnées barycentriques du point d'intersection de la médiane issue de B et de la parallèle à la droite (BC) passant par le point A (oui oui faut imaginer...)

Soient (x, y, z) les coordonnées d'un tel point, que l'on note P.
Tout d'abord le point P appartient à la médiane issue du sommet B, donc

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = x - z$$

donc $x = z$.
Mais comment caractériser le fait que P est sur la droite parallèle à la droite (BC) passant par le sommet A. A priori, on ne connaît pas d'autre point...à moins que...

Quel autre "point" appartient à la droite (AP) ? Il s'agit en effet du point à l'infini porté par la droite (BC), que l'on note $P_{B,C}$. Vous vous doutez bien que les points à l'infini n'ont pas des coordonnées barycentriques comme les autres, sinon ce seraient des points du plan réel.
La particularité des points à l'infini est que leurs coordonnées ont une somme nulle. Du reste, on effectue les calculs comme sur des points normaux.
Soient donc (u, v, w) les coordonnées du point $P_{B,C}$. Puisque le point $P_{B,C}$ est aligné avec les points B et C on a

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ u & v & w \end{vmatrix} = u$$

Donc les coordonnées de $P_{B,C}$ ont la forme $(0, v, w)$ (comme un point normal sur la droite (BC) en fait...). En rajoutant le fait que la somme des coordonnées est nulles, on trouve $v + w = 0$ donc $v = -w$. Les coordonnées du point $P_{B,C}$ sont donc $(0, 1, -1)$. On peut finir le calcul des coordonnées du point P.
Puisque le point P appartient à la droite parallèle à la droite (BC) passant par A, il est aligné avec les points A et $P_{B,C}$. Ainsi :

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ x & y & x \end{vmatrix} = x + y$$

Ainsi, les coordonnées du point P sont $(x, -x, x)$ ou encore $(1, -1, 1)$.

En résumé, pour obtenir une équation sur les coordonnées d'un point P appartenant à la droite parallèle à la droite d passant par le point X, on calcule les coordonnées du point à l'infini P_d porté par la droite d puis on utilise que les points P, X et P_d sont alignés.

Exercice 3. *(Coupe Animath d'automne 2020) Soit* $ABCD$ *un parallélogramme d'aire* 1 *et soit* M *le point du segment* $[BD]$ *tel que* $MD = 3MB$. *Soit* N *le point d'intersection des droites* (AM) *et* (BC). *Quelle est l'aire du triangle* MND.

5.3 Coordonnées barycentriques, niveau 2

5.3.1 Equation d'un cercle

On présente ici les équations de cercle en coordonnées barycentrique. La démonstration de ce résultat se fera dans la partie suivante.

Proposition 4. *Soit $\mathcal{C}$ un cercle. Alors on dispose de trois réels u, v et w tels que les coordonnées (x, y, z) des points appartenant au cercle satisfont*

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$$

Remarquons d'emblée que si (x, y, z) satisfait l'équation, (kx, ky, kz) satisfait également l'équation. On n'a donc toujours pas besoin que les coordonnées soient homogènes.

Effectuons également une petite remarque sur les "unités" des trois réels u, v et w. En effet, la formule indique que ces trois réels sont homogènes à une longueur au carré. Ainsi, si dans les calculs on obtient par exemple $u = a + b$, on sait qu'on a fait une erreur puisque $a + b$ est un polynôme de degré 1 en les variables a et b, alors qu'on cherche des polynômes de degré 2.

Comment déterminer les équations de cercles ? Voyons par exemple l'équation de cercle du cercle circonscrit au triangle ABC de référence.

Pour l'instant, on sait que cette équation est de la forme

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$$

Puisque le point A de coordonnées $(1, 0, 0)$ appartient au cercle circonscrit au triangle ABC, en remplaçant ses coordonnées dans l'équation de cercle on a

$$0 = -a^2 \cdot 0 \cdot 0 - b^2 \cdot 0 \cdot 1 - c^2 \cdot 1 \cdot 0 + (u \cdot 1 + v \cdot 0 + w \cdot 0)(1 + 0 + 0) = u$$

On obtient de même en injectant les coordonnées des points B et C que $v = 0$ et $w = 0$. L'équation du cercle circonscrit au triangle ABC est donc

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy = 0$$

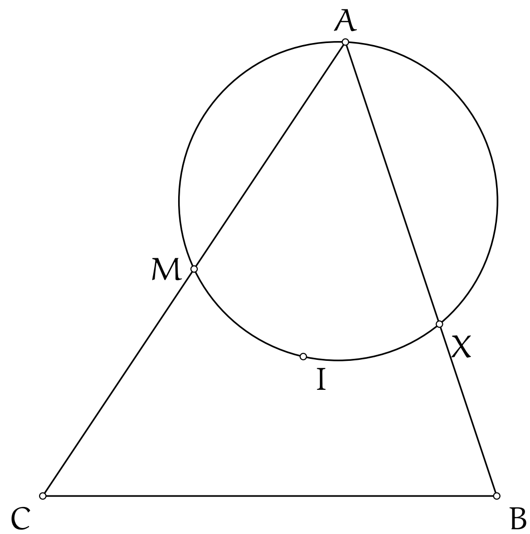
On peut remarquer un résultat plus général qui est que, pour un cercle $\mathcal{C}$ donné, si le point A appartient à ce cercle, alors le réel u dans l'équation du cercle $\mathcal{C}$ est nul. Dans les exercices impliquant des cercles, on sera donc particulièrement heureux si l'on a des cercles passant par un ou deux des trois sommets du triangle de référence, car leurs équations ont des formes simples. Dans le cas général, déterminer les réels u, v et w revient à injecter les coordonnées de 3 points du cercle et résoudre un système 3 équations/ 3 inconnus.

Que faire des équations de cercle ? Que peut-on calculer avec ?

On peut théoriquement calculer les points d'intersection d'une droite et d'un cercle si on a l'équation du cercle et les coordonnées de deux points appartenant à la droite. Le cas le plus fréquent est lorsque l'un des deux points est déjà sur le cercle, et si c'est l'un des sommets de référence alors c'est le jackpot. Il est très douloureux techniquement de calculer les coordonnées barycentriques des deux points d'intersection d'une droite et d'un cercle. (Les équations sont de degré 2 et à plusieurs variables).
C'est encore plus rare de pouvoir calculer les coordonnées des points d'interection de deux cercles, à part si vous possédez le capacité de résoudre aisément des systèmes d'équations de degré 2 à 3 inconnus.

En général, les points qui se calculent bien comme intersection d'une droite et d'un cercle sont les pôles Sud, les symétriques de l'orthocentre, les seconds points d'intersection des médianes ave le cercle, bref vous l'aurez compris, les seconds points d'intersection d'une cévienne avec le cercle. Trêve de bavardage, voyons un exemple :

Exemple 11. *Soit* ABC *le triangle de référence, soit* M *le milieu du segment* $[AC]$ *et soit* I *le centre du cercle inscrit. Calculer les coordonnées du second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle* AMI *avec le segment* $[AB]$*. (Miam !)*



Première étape, calculer l'équation du cercle circonscrit au triangle AIM*. Le point* M *a pour coordonnées* $(1, 0, 1)$ *et le point* I *les coordonnées* (a, b, c)*.*
L'équation du cercle circonscrit au triangle AMI *est de la forme*

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$$

Puisque le point A *appartient au cercle,* $u = 0$*. Puisque le point* M *appartient au cercle :*

$$0 = -b^2 + 2w$$

donc $w = \frac{b^2}{2}$*. Puisque le point* I *appartient au cercle :*

$$0 = -a^2bc - b^2ca - c^2ab + (vb + \frac{b^2}{2}c)(a + b + c) = (a + b + c)b[-ac + v + \frac{bc}{2}]$$

donc $v = c\left(a - \frac{b}{2}\right)$*.*
On calcule à présent les coordonnées du point X*, second point d'intersection de la droite* (AB) *avec le cercle.*
Puisque le point X *appartient à la droite* (AB)*, ses coordonnées sont de la forme* $(1 - t, t, 0)$*. On injecte ces coordonnées dans l'équation de cercle :*

$$0 = -c^2t(1 - t) + c\left(a - \frac{b}{2}\right)t \cdot 1 = tc\left[-c(1 - t) + a - \frac{b}{2}\right]$$

Le cas $t = 0$ *correspondant au point* A*, on déduit que* $t = \frac{c-a+\frac{b}{2}}{c}$ *et* $1 - t = \frac{a-\frac{b}{2}}{c}$*. On peut multiplier par* c *pour simplifier et obtenir que les coordonnées du point* X *sont*

$$\left(a - \frac{b}{2}, c - a + \frac{b}{2}, 0\right)$$

Terminons avec une remarque sur la façon d'écrire les équations de cercles. On peut par exemple se demander l'intérêt de considérer cette équation et non son opposée. On le découvrira dans la prochaine partie. Notons qu'avec ce choix de signe, l'expression évaluée en (x, y, z) est positive si le point est à l'extérieur du cercle et négative si le point est à l'intérieur du cercle.

Exercice 4. *Donner l'équation du cercle inscrit du triangle de référence.*

5.3.2 Notation de Conway

On présente ici la notation de Conway, qui nous permet notamment d'exprimer facilement les coordonnées des points O et H.
On pose

$$S_A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

$$S_B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$$

$$S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

On pose également $S_{BC} = S_B S_C, S_{AB} = S_A S_B$ et $S_{CA} = S_C S_A$.
On pourra remarquer que $S_B + S_C = a^2$ et on a de même les autres expressions en permuttant cycliquement.
On peut penser à ces expressions comme des analogues des expressions obtenues par la transformation de Ravi, mais avec des carrés. Voici quelques propriétés permettant la manipulation.

Proposition 5. *Soit* $S = 2Aire(ABC)$*. Alors*

$$S^2 = S_{AB} + S_{BC} + S_{CA} = \frac{1}{2}\left(a^2 S_a + b^2 S_B + c^2 S_C\right)$$

L'avantage des formules de Conway est de pouvoir obtenir des coordonnées des points O et H sans utiliser de trigonométrie. Observons plutôt :

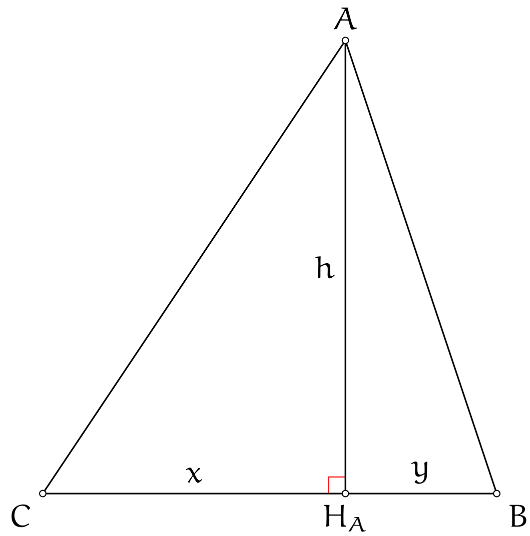
Les coordonnées du point O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC sont

$$(a^2 S_A, b^2 S_b, c^2 S_C)$$

Les coordonnées du point H le centre du cercle circonscrit au triangle ABC sont

$$(S_{BC}, S_{CA}, S_{AB})$$

Effectuons la preuve pour les coordonnées du point H. Soit H_A le pied de la hauteur issue du sommet A. On calcule les coordonnées du point H_A.



On note $x = H_A C$ et $y = H_A B$. Alors les coordonnées du point H_A sont $(0, x, y)$. Dans le triangle rectangle $AH_A B$, $y^2 + h^2 = c^2$ et dans le triangle $AH_A C$, $x^2 + h^2 = b^2$. En soustrayant et en se rappelant que $x + y = a$, on trouve $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = ax - ay = b^2 - c^2$. En combinant avec $ax + ay = a^2$, on trouve que $ax = \frac{a^2+b^2-c^2}{2} = S_C$ et $ay = S_B$. Les coordonnées du point H_A sont donc $(0, S_C, S_B)$. On obtient de même que les coordonnées du pied de la hauteur issue du sommet B sont $(S_C, 0, S_A)$. On déduit alors par le calcul que les coordonnées du point H sont bien (S_{BC}, S_{CA}, S_{AB}) comme annoncé.

Inspirons-nous des calculs précédents pour déduire les coordonnées du point O.
On a obtenu que $ay = S_B$. Mais d'autre part,

$$ay = ac \cos \widehat{ABC} = ac \frac{\sin 2\widehat{ABC}}{2 \sin \widehat{ABC}}$$

Ainsi, en gardant à l'esprit la loi des sinus qui donne $\frac{b}{\sin \widehat{ABC}} = 2R$ avec R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC :

$$\sin 2\widehat{ABC} = \frac{2S_B \sin \widehat{ABC}}{ac} = \frac{2bS_B}{2acR} = \frac{b^2 S_B}{abc}$$

On obtient des expressions similaires pour les coordonnées du point O, si bien qu'on retrouve les coordonnées annoncées.
On met à jour notre tableau des coordonnées des points particuliers :

point	coordonnées barycentriques
G centre de gravité	$(1, 1, 1)$
I centre du cercle inscrit	(a, b, c)
I_A centre du cercle $A-$exinscrit	$(-a, b, c)$
K point d'intersection des symédianes	(a^2, b^2, c^2)
H orthocentre	(S_{BC}, S_{CA}, S_{AB})
O centre du cercle circonscrit	$(a^2 S_A, b^2 S_B, c^2 S_C)$

Exercice 5. *Montrer que les points* O, H *et* G *sont alignés sur la droite d'Euler, en utilisant d'abord les coordonnées barycentriques sous forme trigonométrique, puis en utilisant les coordonnées avec les notations de Conway. Quelles coordonnées sont plus pratiques ?*

Exercice 6. *Vérifier que les milieux des côtés du triangle* ABC *appartiennent au cercle passant par les pieds des hauteurs.*

Exercice 7. *Soit* ABC *un triangle non plat,* I_A, I_B, I_C *les centres des cercles exinscrits respectivement des sommets* A, B *et* C. *Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle* $I_AI_BI_C$ *n'appartient pas au cercle circonscrit au triangle* ABC.

5.4 Les vecteurs en barycentrique : niveau 3

5.4.1 Premières utilisations

La notion de vecteur en barycentrique n'est pas bien différente d'un vecteur classique. En revanche, cette fois-ci, on va devoir faire attention au caractère homogène des coordonnées. Soient

P et Q deux points de coordonnées homogènes (x_p, y_p, z_p) et (x_q, y_q, z_q). Alors le vecteur $\vec{PQ}$ a pour coordonnées $(x_q - x_p, y_q - y_p, z_q - z_p)$
La somme des coordonnées de ce vecteur est donc 0.

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\
&= x_q\overrightarrow{OA} + y_q\overrightarrow{OB} + z_q\overrightarrow{OC} - (x_p\overrightarrow{OA} + y_p\overrightarrow{OB} + z_p\overrightarrow{OC}) \\
&= (x_q - x_p)\overrightarrow{OA} + (y_q - y_p)\overrightarrow{OB} + (z_q - z_p)\overrightarrow{OC}
\end{aligned}$$

Une première application de l'utilisation des vecteurs est le calcul des coordonnées du milieu d'un segment. Etant donnés deux points P et Q de coordonnées homogènes (x_p, y_p, z_p) et (x_q, y_q, z_q) on cherche les coordonnées du point M, le milieu du segment [PQ]. On sait que

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QM}$$

qui se réécrit pour O un point quelconque :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right) \\
&= \tfrac{x_p+x_q}{2}\overrightarrow{OA} + \tfrac{y_p+y_q}{2}\overrightarrow{OB} + \tfrac{z_p+z_q}{2}\overrightarrow{OC}
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{x_p+x_q}{2} + \frac{y_p+y_q}{2} + \frac{z_p+z_q}{2} = 1$, les coordonnées du point M sont donc $\left(\frac{x_p+x_q}{2}, \frac{y_p+y_q}{2}, \frac{z_p+z_q}{2}\right)$, ce qui est conforme à l'intuition.

Dans la définition du vecteur $\overrightarrow{PQ}$, le point O correspond à n'importe quel point, mais il sera utile dans la suite de fixer le point O comme le centre du cercle circonscrit au triangle ABC étant donné que l'on dispose des relations suivantes :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = R^2$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2 - \frac{c^2}{2}$$

avec R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. On a bien sûr des relations identiques concernant $\overrightarrow{OC}$.
Grâce à ces relations, on peut calculer $|PQ|^2$ en fonctions des coordonnées (x, y, z) du vecteur $\vec{PQ}$.
En effet :

$$\begin{aligned}
|PQ|^2 &= \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} \\
&= (x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}) \cdot (x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}) \\
&= x^2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} + y^2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} + z^2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} \\
&\quad +2xy\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2yz\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 2zx\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} \\
&= R^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy\left(R^2 - \frac{c^2}{2}\right) \\
&\quad +2yz\left(R^2 - \frac{a^2}{2}\right) + 2zx\left(R^2 - \frac{b^2}{2}\right) \\
&= R^2(x + y + z)^2 - a^2yz - b^2zx - c^2xy \\
&= -a^2yz - b^2zx - c^2xy
\end{aligned}$$

où la dernière égalité utilise le fait que les coordonnées d'un vecteur sont nulles.
Ceci nous donne un aperçu de ce qu'on peut faire avec les vecteurs en barycentriques, surtout lorsque l'on prend le point O comme "référence". Cette formule de la distance rappelle fortement l'équation d'un cercle. Et cela n'est pas pour rien.

Etant donné un cercle de centre P de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et de rayon r, la formule de la distance donne qu'un point Q aux coordonnées homogènes (x, y, z) appartenant au cercle satisfait

$$-a^2(y - y_0)(z - z_0) - b^2(z - z_0)(x - x_0) - c^2(x - x_0)(y - y_0) = r^2$$

On développe tout, cette expression est de la forme

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + u_0x + v_0y + w_0z = r^2$$

On peut écrire $r^2 = r^2(x + y + z)$ puisque les coordonnées sont homogènes. Alors on pose $u = u_0 - r^2, v = v_0 - r^2$ et $w = w_0 - r^2$. En écrivant à nouveau $ux + vy + wz = (ux + vy + wz)(x + y + z)$, de sorte que la formule est désormais homogène et qu'elle ne nécessite plus de fonctionner que pour des coordonnées homogènes, mais bien pour n'importes quelles coordonnées, on trouve bien

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$$

L'équation de cercle est démontrée.
Voyons d'autres utilités des vecteurs !

5.4.2 Droites perpendiculaires et tangente à un cercle

Vous avez pu remarquer l'usage que l'on fait du produit scalaire de deux vecteurs en barycentrique. Nous allons continuer de nous en servir, notamment du fait crucial que le produit scalaire est nul si les deux vecteurs sont orthogonaux, c'est-à-dire s'ils portent des droites perpendiculaires.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{RS}$ de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2). Alors les droites (PQ) et (RS) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS} = 0$. Ceci se réécrit

$$\begin{aligned}
0 &= (x_1\overrightarrow{OA} + y_1\overrightarrow{OB} + z_1\overrightarrow{OC}) \cdot (x_2\overrightarrow{OA} + y_2\overrightarrow{OB} + z_2\overrightarrow{OC}) \\
&= R^2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\left(R^2 - \frac{c^2}{2}\right) \\
&\quad +(y_1z_2 + z_1y_2)\left(R^2 - \frac{a^2}{2}\right) + (z_1x_2 + x_1z_2)\left(R^2 - \frac{b^2}{2}\right) \\
&= (x_1 + y_1 + z_1)(x_2 + y_2 + z_2)R^2 - \frac{1}{2}[a^2(y_1z_2 + z_1y_2) + b^2(z_1x_2 + x_1z_2) + c^2(x_1y_2 + y_1x_2)]
\end{aligned}$$

Du fait que $x_1 + y_1 + z_1 = 0$, on obtient donc la propriété suivante :

Proposition 6. *Soient (PQ) et (RS) deux droites telles que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{RS}$ ont pour coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2). Alors les droites (RS) et (PQ) sont perpendiculaires si et seulement si*

$$0 = a^2(y_1z_2 + z_1y_2) + b^2(z_1x_2 + x_1z_2) + c^2(x_1y_2 + y_1x_2)$$

On peut en fait obtenir un rafinement de ce résultat. En effet, dans le calcul, nous n'avons pas utilisé que les réels x_2, y_2, z_2 étaient les coordonnées barycentriques du vecteur $\vec{RS}$ (et donc que leur somme était nulle). On a seulement utilisé que $\vec{RS} = x_2\vec{OA} + y_2\vec{OB} + z_2\vec{OC}$. Toute autre écriture (même sans que les réels somment à 0) peut donc convenir ! Voici donc un raffinement :

Proposition 7. *Soient (PQ) et (RS) deux droites telles que*

$$\overrightarrow{PQ} = x_1\overrightarrow{OA} + y_1\overrightarrow{OB} + z_1\overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{RS} = x_2\overrightarrow{OA} + y_2\overrightarrow{OB} + z_2\overrightarrow{OC}$$

de telle sorte qu'on a soit $x_1 + y_1 + z_1 = 0$, soit $x_2 + y_2 + z_2 = 0$ soit les deux. Alors les droites (PQ) et (RS) sont perpendiculaires si et seulement si

$$0 = a^2(y_1z_2 + z_1y_2) + b^2(z_1x_2 + x_1z_2) + c^2(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Avec ce critère, on peut établir les coordonnées d'un point appartenant à la tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC.
En effet, soit P un tel point, de coordonnées (pas forcément homogènes) (x, y, z).
Alors $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (x-1)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA} = 1 \cdot \overrightarrow{OA}$. Le point P est sur la tangente en A si et seulement si les droites (AP) et (OA) sont perpendiculaires, c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{aligned}
0 &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AP} \\
0 &= a^2(0 \cdot z + y \cdot 0) + b^2(0 \cdot (x-1) + 1 \cdot z) + c^2(1 \cdot y + 0 \cdot (x-1)) \\
0 &= b^2z + c^2y
\end{aligned}$$

Donc si le point P appartient à la tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC, alors ses coordonnées satisfont $b^2z + c^2y = 0$.

Exercice 8. *Calculer les coordonnées du point d'intersection de la bissectrice issue du sommet B avec la médiatrice du segment $[AC]$ et vérifier que le point d'intersection est bien sur le cercle circonscrit au triangle ABC (redémontrer donc en barycentrique l'existence du pôle Sud).*

5.4.3 Puissance d'un point et axe radical

Etant donné un point P et un cercle $\mathcal{C}$ de centre O_1 et de rayon r et d'équation

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$$

La puissance du point P de coordonnées (x, y, z) **homogènes** par rapport au cercle $\mathcal{C}$ correspond à $O_1P^2 - r^2$. Or c'est exactement ce calcul qui nous a permis d'obtenir la formule de l'équation de cercle ! On a donc une formule pour la puissance d'un point par rapport à un cercle :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P) = -a^2xy - b^2yz - c^2zx + (ux + vy + wz)(x + y + z)$$

On comprend maintenant le choix de signe lorsque l'on écrit l'équation d'un cercle : cette formule avec ce choix de signe correspond aussi à la formule de la puissance d'un point. Il est important dans cette formule que (x, y, z) soient des coordonnées homogènes, sans quoi la preuve ne tient plus.

Cette formule met en lumière une chose importante : dans une équation de cercle, le paramètre u correspond à la puissance du point A par rapport au cercle, le paramètre v correspond à la puissance du point B par rapport au cercle et le paramètre w correspond à la puissance du point C. Cette remarque peut servir par exemple lorsqu'un cercle est défini comme passant par deux points et tangents à un côté du triangle en l'un des points. On pourra notemment retrouver rapidement l'équation du cercle inscrit au triangle ABC à partir de cette observation.

De cette formule on déduit immédiatemment :

Proposition 8. *Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles d'équations respectives*

$$-a^2xy - b^2yz - c^2zx + (u_1x + v_1y + w_1z)(x + y + z) = 0$$
$$-a^2xy - b^2yz - c^2zx + (u_2x + v_2y + w_2z)(x + y + z) = 0$$

Alors un point P de coordonnées (x, y, z) appartient à l'axe radical de ces deux cercles si et seulement si

$$(u_1 - u_2)x + (v_1 - v_2)y + (w_1 - w_2)z = 0$$

Ici, il n'y plus besoin que les coordonnées soient homogènes puisque la formule est elle-même homogène. Pour l'obtenir, on écrit que le point P a même puissance par rapport aux deux cercles et l'on passe tout du même côté de l'égalité.

5.5 Quand utiliser (ou pas) les coordonnées barycentriques

Tout comme avec les nombres complexes, l'analytique en barycentrique ne passe pas partout. Voici quelques critères pour qu'un exercice admette une solution simple en coordonnées barycentriques :

- La figure est centrée autour d'un triangle. On choisit alors souvent ce triangle comme triangle de référence. On a vu qu'on savait calculer proprement les coordonnées des multiples points particulier du triangle.
- La figure comporte de nombreuses droites. On a vu à quel point il est facile de calculer les points d'intersection de deux droites, surtout si celles si passent par un sommet du triangle de référence.

- La figure comporte peu de cercles. Ou alors ces cercles passent par un ou deux des sommets du triangle de référence, l'équation de cercle est alors facile à calculer.
- La figure comporte peu de points. Moins il y a de points dont il faut calculer les coordonnées, moins il y a de chances que les calculs deviennent affreux.
- L'énoncé est symétrique par rapport aux sommets du triangle de référence. Comme les coordonnées barycentriques préservent cette symétrie, les calculs faits par rapport à un sommet se transposent sur les autres sommets.
- Si la figure présente un point variable sur un des côtés du triangle de référence, on peut écrire ses coordonnées avec un paramètre t et tout calculer en fonction de t. En revanche, éviter les points variables sur un cercle !

Voici, à l'inverse, quelques cas où il vaut mieux éviter les coordonnées barycentriques.

- Il y a beaucoup de cercles et les points sont définis comme point d'intersection de deux cercles ou point d'intersection de droites avec un cercle. On a vu qu'il était rarement possible de calculer les coordonnées des points d'intersection de deux cercles. Si trop de cercles ne passent pas les sommets du triangle de référence, les calculs deviennent rapidement fastidieux.
- Beaucoup de points sont définis avec des droites perpendiculaires. On l'a vu, les conditions pour que deux droites soient perpendiculaires sont une équation pas forcément très simple.
- Beaucoup de points sont définis par des transformations géométriques. Calculer les images d'un point par une rotation ou une similitude ne sera pas simple. C'est bien sûr possible à la main, mais il ne faut donc pas que trop de points soient définis par une transformation.

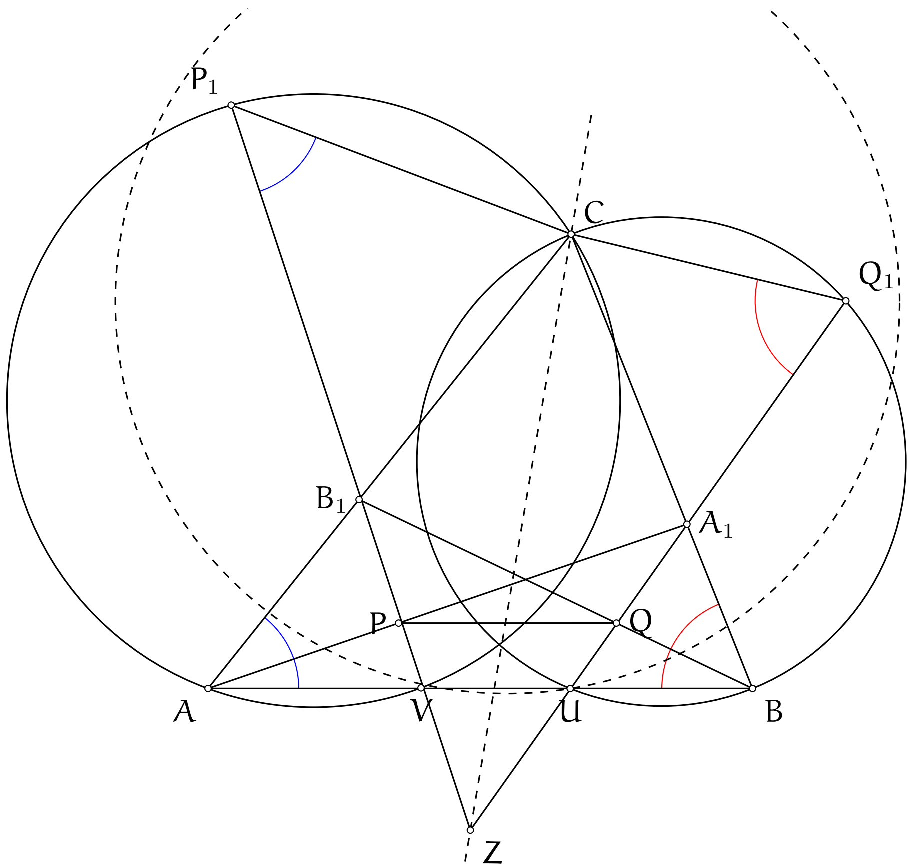
Tout comme les nombres complexes, il est recommandé de commencer par effectuer quelques observations sur la figure et essayer de réduire le problème avant de se jeter à corps perdu dans une méthode. Parfois, c'est justement en réduisant le problème que la méthode barycentrique apparaît.

5.6 Un exemple d'exercice qui fonctionne en barycentrique

Voyons un exercice qui admet une solution décente avec la méthode barycentrique, modulo quelques efforts : le problème 2 des IMO 2019.

Exercice 1. *(IMO 2019 P2) Soit* ABC *un triangle et soient* A_1 *et* B_1 *deux points appartenant respectivement aux côtés* $[BC]$ *et* $[CA]$. *Soient* P *et* Q *deux points appartenant respectivement aux segments* $[AA_1]$ *et* $[BB_1]$, *de telle sorte que les droites* (PQ) *et* (AB) *soient parallèles. Soit* P_1 *un point situé sur la droite* (PB_1) *tel que* B_1 *se trouve situé entre les points* P *et* P_1 *et tel que* $\widehat{PP_1C} = \widehat{BAC}$. *Soit* Q_1 *un point situé sur la droite* (QC_1) *tel que* C_1 *se trouve situé entre les points* Q *et* Q_1 *et tel que* $\widehat{QQ_1C} = \widehat{ABC}$. *Montrer que les points* P, Q, P_1 *et* Q_1 *sont cocycliques.*

Solution de l'exercice 1



Bien sûr, au départ, on ne sait pas que l'on va utiliser les coordonnées barycentriques pour cet exercice. D'ailleurs, l'énoncé n'est pas très avenant pour ce genre de méthode, principalement à cause des définitions des points Q_1 et P_1.

Comme toujours, on commence par tracer une figure propre. Comment tracer les points P_1 et Q_1 ? L'égalité $\widehat{QQ_1C} = \widehat{ABC}$ fait penser au théorème de l'angle inscrit. On introduit donc le point U, le point d'intersection des droites (B_1Q) et (AB). D'après le théorème de l'angle inscirt, puisque $\widehat{CQ_1U} = \widehat{CBU}$, les points U, B, Q_1 et C sont cocycliques. Le point Q_1 est donc le second point d'intersection de la droite (B_1Q) avec le cercle circonscrit au triangle CUB.
Bien sûr, on peut construire de même le point V et le point P_1. On a donc rajouté deux points et deux cercles, voilà qui devrait nous être utile.

Remarquon que si les points P, Q, P_1 et Q_1 sont cocycliques, alors $\widehat{PP_1Q_1} = \widehat{PQU} = \widehat{QUB}$ donc $\widehat{VP_1Q_1} = 180° - \widehat{VUQ_1}$ et les points P_1, V, U et Q_1 sont cocycliques à leur tour, et réciproquement. Il suffit donc de montrer que les points P_1, Q_1, V et U sont cocycliques. S'ils sont cocycliques, les axes radicaux des cercles circonscrits aux triangles CUB, ACV et P_1VU sont concourants.
Il suffit donc, réciproquement, de montrer que le point d'intersection des droites (P_1V) et (Q_1U), point que l'on appelle Z, appartient à l'axe radical des cercles circonscrits aux triangles AVC et CUB.

Cet énoncé commence à ressembler à quelque chose que l'on peut démontrer avec des coordonnées barycentriques. Voyons voir de quoi nous avons besoin : on a besoin des équations de cercle des cercles circonscrits aux triangles ACV et CUB et des coordonnées du point Z. Les cercles décrits passent par deux sommets du triangle ABC, donc en prenant le triangle ABC comme triangle de référence, ces équations devraient être relativement simples. Il nous faut pour cela les coordonnées des points U et V, qui sont décrits comme point d'intersection de deux droites. De plus, de nombreuses céviennes sont impliquées. Au final,

ON N'A MEME PAS BESOIN DE CALCULER LES COORDONNEES DES POINTS P_1 ET Q_1 !

Allons-y : On choisit ABC comme triangle de référence. Alors A, B et C ont pour coordonnées respectives $(1,0,0), (0,1,0)$ et $(0,0,1$ comme d'habitude.
Le point A_1 appartient au côté $[BC]$, on peut noter $(0,d,1-d)$ ses coordonnées. Le point B_1 appartient au segment $[CA]$, on peut noter $(e,0,1-e)$ ses coordonnées. Le point P appartient à la droite (AA_1), ses coordonnées sont donc de la forme $(t,d,1-d)$ avec t un paramètre réel. On en déduit les coordonnées du point Q. Le point Q appartient à la droite (BB_1), ses coordonnées sont donc de la forme $(e,s,1-e)$ avec s un paramètre réel. Puisque les droites (PQ) et (AB) sont parallèles, les points P et Q sont alignés avec le point $P_{A,B}$, le point à l'infini porté par la droite (AB), dont les coordonnées sont $(1,-1,0)$. Ainsi on a la relation sur s et t suivante :

$$0 = \begin{vmatrix} t & d & 1-d \\ e & s & 1-e \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = d(1-e) - s(1-d) + t(1-e) - e(1-d)$$

Ne cherchons pas à obtenir s en fonction de t. Tout d'abord parce que l'expression serait moche, mais aussi parce que cela briserait la symétrie imposée par la figure. Nous allons plutôt garder la relation sous la forme suivante, symétrique en s et t :

$$s(1-d) - d(1-e) = t(1-e) - e(1-d) = k$$

On ne cherche même pas à simplifier étant donner que l'on peut s'attendre à ce que $d(1-e)$ et $e(1-d)$ apparaissent souvent dans les calculs. Poser $k = t(1-e) - e(1-d)$ permet d'alléger les expressions.
On passe à la suite, on calcule les coordonnées du point V. Puisqu'il appartient à la droite (AB), ses coordonnées sont de la forme $(x,y,0)$. Puisqu'il est aligné avec les points B_1 et P :

$$0 = \begin{vmatrix} t & d & 1-d \\ e & 0 & 1-e \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = xd(1-e) + y[e(1-d) - t(1-e)]$$

Et les coordonnées du point V sont $(t(1-e) - e(1-d), d(1-e), 0)$ ou encore $(k, d(1-e), 0)$.
Par symétrie, on obtient que les coordonnées du point U sont $(e(1-d), k, 0)$.

On calcule désormais l'équation du cercle $\mathcal{C}_1$ circonscrit au triangle AVC. Celle-ci est de la forme

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (u_1x + v_1y + w_1z)(x+y+z) = 0$$

Puisque le cercle passe par les sommets A et C, on trouve que $u_1 = w_1 = 0$. Puisque le point V appartient au cercle, on a (la coordonnée en z de V est nulle, cela simplifie le calcul) :

$$-c^2kd(1-e) + v_1d(1-e)(k + d(1-e)) = 0$$

donc $v_1 = \frac{c^2k}{k+d(1-e)} = \frac{c^2k}{s(1-d)}$. Si on note $\mathcal{C}_2$ le cercle circonscrit au triangle BUC et qu'on note u_2, v_2 et w_2 ses paramètres, on trouve aussi que $v_2 = w_2 = 0$ car le cercle passe par les sommets C et B et comme les calculs sont symétriques, on obtient $u_2 = \frac{c^2k}{t(1-e)}$.
Un point appartenant à l'axe radical des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ voit ses coordonnées (x,y,z) vérifier

$$0 = (u_1 - u_2)x + (v_1 - v_2)y + (w_1 - w_2)z = -\frac{c^2k}{k + e(1-d)}x + \frac{c^2k}{k + d(1-e)}y$$

ou encore

$$0 = -\frac{x}{t(1-e)} + \frac{y}{s(1-d)}$$

Il est temps de calculer les coordonnées du point Z, le point d'intersection des droites (B_1P) et (QA_1). On note (x, y, z) ses coordonnées et on remarque que l'on n'a pas besoin de calculer z. Puisque les points B_1, P et Z sont alignés, on a

$$0 = \begin{vmatrix} e & 0 & 1-e \\ t & d & 1-d \\ x & y & z \end{vmatrix} = -xd(1-e) + y(-e(1-d) + t(1-e)) + zed = -xd(1-e) + yk + zde$$

De l'alignement des points A_1, Q et Z on déduit

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & d & 1-d \\ e & s & 1-e \\ x & y & z \end{vmatrix} = x(d(1-e) - s(1-d)) + ye(1-d) - zde = -kx + ye(1-d) - zde$$

On somme ces deux équations pour éliminer la variable z et on trouve

$$0 = -x(k + d(1-e)) + y(k + e(1-d)) = -xs(1-d) + yt(1-e)$$

ce qui correspond exactement à la condition pour que le point Z appartiennent à l'axe radical des deux cercles. Le problème est donc terminé.

Quelques remarques : Tout d'abord, gardons-nous d'oublier quelques cas dégénrés. En particulier, le point Z pourrait ne pas exister si les droites (B_1P) et (A_1Q) sont parallèles. Mais dans ce cas, les mêmes calculs permettent de démontrer que les deux droites sont parallèles à l'axe radical, ce qui permet également de conclure.

De plus, notons que les calculs n'étaient pas bourrins mais réfléchis en amont : conserver la symétrie entre s et t quitte à devoir rajouter des variables, conserver les expression $d(1-e)$ et $e(1-d)$ et prévoir exactement pour quels points on a besoin de calculer les coordonnées. Penser ces calculs fait partie de la difficulté du problème. N'oublions pas que l'on a d'abord cherché à réduire le problème.

5.7 Exercices

Exercice 1. *Soit* $ABCD$ *un trapèze isocèle dont les bases sont* (AD) *et* (BC)*. Soit* H *le projeté orthogonal du sommet* A *sur le côté* $[BC]$*. Montrer que le centre gravité du triangle* ABC *appartient à la droite* (DH).

Exercice 2. *Soit* ABC *un triangle,* I *le centre de son cercle inscrit et soient* D, E *et* F *les points de contact du cercle inscrit avec les côtés* $[BC], [CA]$ *et* $[AB]$ *respectivement. Soient* M, L *et* K *les milieux des côtés* $[BC], [CA]$ *et* $[AB]$*. Montrer que les droites* $(BI), (EF)$ *et* (ML) *se coupent sur le cercle de diamètre* $[BC]$.

Exercice 3. *(Belarus TST 2016 P2) Soit* ABC *un triangle. Soient* K *et* L *les centres des cercles* $B-$ *et* $C-$*exinscrits respectivement. Soient* B_1 *et* C_1 *les milieux des côtés* $[AC]$ *et* $[AB]$ *respectivement. Soient* M *et* N *les symétriques respectifs des points* B *et* C *par rapports aux points* B_1 *et* C_1*. Montrer que les droites* (KM) *et* (LN) *se coupent sur la droite* (BC).

Exercice 4. *(G1 ELMO 2014) Soit* ABC *un triangle et* K *son point de Lemoine, c'est-à-dire le point d'intersection des symmédianes. Soit* A_1 *le point de la droite* (BC) *tel que les droites* $(AB), (AC), (A_1K)$ *et* (BC) *forment un quadrilatère cyclique. On définit les points* B_1 *et* C_1 *de manière simillaire. Montrer que les points* A_1, B_1 *et* C_1 *sont alignés.*

Exercice 5. *(G4 BMO 2015) Soit* ABC *un triangle et soit* I *le centre de son cercle inscrit. Soient* D, E *et* F *les points d'intersection respectifs des droites* $(AI), (BI)$ *et* (CI) *avec le cercle circonscrit au triangle* ABC*. La droite parallèle à la droite* (BC) *passant par le point* I *coupe la droite* (EF) *au point* K*. On définit les points* L *et* M *de manière similaire. Montrer que les points* K, L *et* M *sont alignés.*

Exercice 6. *(RMM 2016 P1) Soit* ABC *un triangle et soit* A' *le symétrique du point* A *par rapport au segment* $[BC]$*. Soit* D *un point du segment* $[BC]$ *différent des points* B *et* C*. Le cercle circonscrit au triangle* ABD *recoupe le segment* $[AC]$ *en un point* E*. Le cercle circonscrit au triangle* ACD *recoupe le segment* $[AB]$ *en un point* F*. Les droites* $(A'C)$ *et* (DE) *se coupent en un point* P *et les droites* $(A'B)$ *et* (DF) *se coupent en un point* Q*. Montrer que les droites* $(AD), (BP)$ *et* (CQ) *sont concourrantes ou parallèles.*

6 Exercices

Les exercices suivants sont tous faisables avec l'une des méthodes présentées dans ce poly. A vous de trouver laquelle. Certains exercices admettent plusieurs méthodes.

Exercice 1. *(USA TSTST 2017 P1) Soit* ABC *un triangle tel que* $AB \neq AC$ *et* $\widehat{BAC} \neq 90°$. *Soient* M *et* N *les milieux des segment* $[AB]$ *et* $[AC]$. *Soient* E *et* F *les pieds respectifs des hauteurs issues des sommets* B *et* C. *Soit* O *le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC *et soit* H *l'orthocentre du triangle* ABC. *La tangente au cercle circonscrit au triangle* ABC *en* A *coupe la droite* (MN) *en un point* P. *Soit* Q *le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles* ABC *et* AEF. *Les droites* (EF) *et* (AQ) *se coupent au point* R. *Montrer que les droites* (OH) *et* (PR) *sont perpendiculaires.*

Exercice 2. *(G1 ELMO 2019) Soit* ABC *un triangle,* E *et* F *les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets* B *et* C. *Soit* P *le point d'intersection de la hauteur issue du sommet* A *avec le cercle circonscrit au triangle* ABC. *La droite* (PE) *recoupe le cercle circonscrit au triangle* ABC *en un point* Q. *Montrer que la droite* (BQ) *coupe le segment* $[EF]$ *en son milieu.*

Exercice 3. *(G2 IMO 2016) Soit* ABC *un triangle,* I *le centre de son cercle inscrit et* Γ *sont cercle circonscrit. Soit* M *le milieu du segment* $[BC]$. *Soit* D *le projeté orthogonal du point* I *sur le segment* $[BC]$. *La perpendiculaire à la droite* (AI) *passant par le point* I *coupe le segment* $[AB]$ *en un point* E *et le segment* $[AC]$ *en un point* F. *Soit* X *le second point d'intersection des cercles circonscrits aux traingles* ABC *et* AEF. *Montrer que les droites* (XD) *et* (AM) *se coupent sur le cercle* Γ.

Exercice 4. *(G4 IMO 2016) Soit* ABC *un triangle isocèle au point* A. *Soit* I *le centre de son cercle inscrit. La droite* (BI) *recoupe la droite* (AC) *au point* D *et la droite perpendiculaire à la droite* (AC) *passant par* D *coupe la droite* (AI) *au point* E. *Montrer que le symétrique du point* I *par rapport à la droite* (AC) *appartient au cercle circonscrit au triangle* BDE.

Exercice 5. *(G4 IMO 2019) Soit* ABC *un triangle et soit* P *un point situé à l'intérieur du triangle* ABC. *Soit* A_1 *le point d'intersection des droites* (AP) *et* (BC) *et soit* A_2 *le symétrique du point* P *par rapport au point* A_1. *Les points* B_1, B_2, C_1 *et* C_2 *sont définis de manière similaire. Démontrer que l'un au moins des trois segments* $[PA_2], [PB_2]$ *et* $[PC_2]$ *a un point commun avec le cercle circonscrit au triangle* ABC.

Exercice 6. *(EGMO 2019 P3) Soit* ABC *un triangle tel que* $\widehat{CAB} > \widehat{ABC}$. *Soit* I *le centre de son cercle inscrit. Soit* D *un point du segment* $[BC]$ *tel que* $\widehat{CAD} = \widehat{CBA}$. *Soit* ω *le cercle tangent au segment* $[AC]$ *au point* A *et passant par le point* I. *Soit* X *le second point d'intersection du cercle* ω *avec le cercle circonscrit au triangle* ABC. *Montrer que les bissectrices des angles* $\widehat{DAB}$ *et* $\widehat{CXB}$ *se coupent sur le segment* $[BC]$.

Exercice 7. *(Balkan MO 2017 G4) Soit* ABC *un triangle aux angles aigus et soit* O *le centre de son cercle circonscrit. On note respectivement* D, E *et* F *les milieux des segment* $[BC], [CA]$ *et* $[AB]$. *Soit* M *un point distinct du point* D *sur le segment* $[BC]$. *Soit* N *le point d'intersection des droites* (EF) *et* (AM). *La droite* (ON) *recoupe le cercle circonscrit au triangle* ODM *au point* P. *Montrer que le symétrique du point* M *par rapport à la droite* (DP) *appartient au cercle d'Euler du triangle* ABC.

Exercice 8. *(Mathraining Concours 11 P6) Soit* ABC *un triangle et* Ω *sont cercle circonscrit. On considère un cercle* ω *tangent intérieurement au cercle* Ω *au point* A. *On note* P *et* Q *les points d'intersection (distincts du point* A*) du cercle* ω *avec les côtés* $[AB]$ *et* $[AC]$ *respectivement. On note également* O *le point d'intersection des droites* (BQ) *et* (CP). *Soit* A' *le symétrique du point* A *par rapport à la droite* (BC) *et on note* S *le point d'intersection de la droite* (OA') *avec le cercle* ω *tel que le point* S *appartient à l'arc* PQ *ne contenant pas le point* A. *Montrer que le cercle circonscrit au triangle* BSC *est tangent au cercle* ω.

Exercice 9. *(China TST 2017 P5) Soit* ABC *un triangle non isocèle. Soient,* D, E *et* F *les milieux respectifs des segments* $[BC], [CA]$ *et* $[AB]$*. La tangente (autre que la droite* (BC)*) au cerlce inscrit du triangle* ABC *issue du sommet* D *coupe la droite* (EF) *au point* X*. On définit les points* Y *et* Z *de la même façon. Montrer que les points* X, Y *et* Z *sont alignés.*

Exercice 10. *(RMM 2019 P2) Soit* $ABCD$ *un trapèze isocèle (avec* (AB) *et* (CD) *parallèles). Soit* E *le milieu du segment* $[AC]$*. Soit* ω *le cercle circonscrit au triangle* ABE *et soit* Ω *le cercle circonscrit au triangle* CDE*. Soit* P *le point d'intersection des tangentes aux cercles* ω *et* Ω *respectivement en les points* A *et* D*. Montrer que la droite* (PE) *est tangente au cercle* Ω*.*

Exercice 11. *(EGMO 2015 P6) Soit* ABC *un triangle tel que* $AB \neq AC$ *et soient* H *son orthocentre et* G *son centre de gravité. La droite* (AG) *recoupe le cercle circonscrit au triangle* ABC *au point* P*. Soit* P' *le symétrique du point* P *par rapport au côté* $[BC]$*. Montrer que* $GP' = HG$ *si et seulement si* $\widehat{BAC} = 60°$.

Exercice 12. *(G5 IMO 2007) Soit* ABC *un triangle fixé,* Γ *son cercle circonscrit et* P *un point appartenant au cercle* Γ*. Soient* A_1, B_1, C_1 *les milieux respectifs des segments* $[BC], [CA]$ *et* $[AB]$*. La droite* (PA_1) *recoupe le cercle* Γ *en un point* A'*. Les points* B' *et* C' *sont définis de façon similaire. On suppose les points* A, B, C, A', B' *et* C' *distincts. Les droites* $(AA'), (BB')$ *et* (CC') *forment un triangle. Montrer que l'aire de ce triangle ne dépend pas du point* P*.*

Exercice 13. *(IMO 2019 P6) Soit* ABC *un triangle et* I *le centre de son cercle inscrit. Soient* D, E *et* F *les points de contact du cercles inscrit avec respectivement les côtés* $[BC], [CA]$ *et* $[AB]$*. Soit* ω *le cercle inscrit au triangle* ABC*. La perpendiculaire à la droite* (EF) *passant par le point* D *recoupe le cercle* ω *au point* R *et la droite* (AR) *recoupe le cercle* ω *au point* P*. Les cercles circonscrits aux triangles* PEC *et* PFB *se recoupent au point* Q*. Montrer que les droites* (DI) *et* (PQ) *recoupent la bissectrice extérieure de l'angle* $\widehat{ABC}$*.*

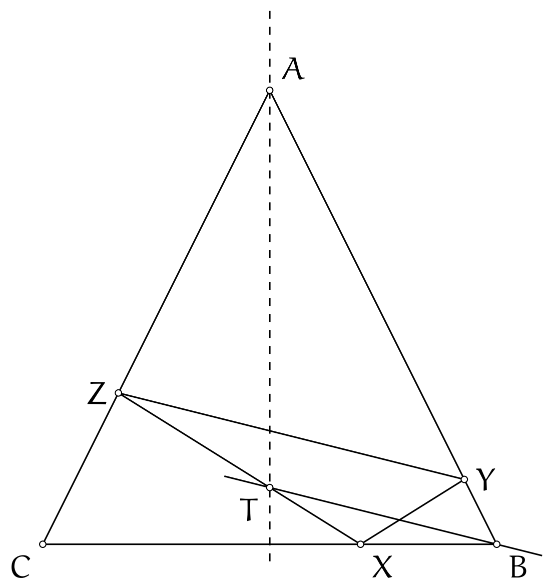
Exercice 14. *(IMO 2013 P3) Soit* ABC *un triangle. Le cercle exinscrit au triangle* ABC *opposé au sommet* A *est tangent au côté* BC *au point* A_1*. On définit de la même façon les points* A_1 *et* B_1*. On suppose que le centre du cercle circonscrit au triangle* $A_1B_1C_1$ *appartient au cercle circonscrit au triangle* ABC*. Montrer que le triangle* ABC *est rectangle.*

7 Corrigés

7.1 La méthode cartésienne

Exercice 1. *(Iran MO 2018 round 2) Soit* ABC *un triangle isocèle en* A. *Soit* X *un point du segment* $[BC]$. *Soit* Z *un point du segment* $[AC]$ *et* Y *un point du segment* $[AB]$ *tels que* $\widehat{BXY} = \widehat{ZXC}$. *La droite parallèle à la droite* (YZ) *passant par le point* B *coupe la droite* (XZ) *en un point* T. *Montrer que le point* T *appartient à la bissectrice de l'angle* $\widehat{BAC}$.

Solution de l'exercice 1



La figure présente un axe de symétrie, qui est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et il y a relativement peu de points. Si l'on devait utiliser les coordonnées cartésiennes, le repére serait défini par cette bissectrice et la droite (BC). Les égalités d'angles pour définir les points Y et Z peuvent se traduire par des égalités de coefficients directeurs de droites et l'énoncé se traduit par montrer que l'abscisse du point T est nulle. Cet exercice est un candidat idéal pour de l'analytique.

On pose $A : (0, a)$, $B : (1, 0)$, $C : (-1, 0)$ et $X : (d, 0)$. L'équation de la droite (AC) est $y = ax + a$ et l'équation de la droite (AB) est $y = -ax + a$. Soient (x_Z, y_Z) les coordonnées du point Z, avec $y_Z = ax_Z + a$. Le coefficient directeur de la droite (XZ) est donc $\dfrac{ax_Z + a}{x_Z - d}$ donc l'équation de la droite (XZ) est

$$y = \frac{ax_Z + a}{x_Z - d}(x - d)$$

Puisque les droites (XZ) et (YZ) sont symétriques par rapport à la perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point X, l'équation de la droite (YX) est

$$y = -\frac{ax_Z + a}{x_Z - d}(x - d)$$

Les coordonnées du point Y sont (x_Y, y_Y) et vérifient $y_Y = -ax_Y + a$ et l'équation de la droite (XY) donc

$$-ax_Y + a = -\frac{ax_Z + a}{x_Z - d}(x_Y - d)$$

soit $x_Y = \frac{2d}{d+1} + \frac{d-1}{d+1}x_Z$, donc $y_Y = -a\frac{d-1}{d+1}(x_Z + 1)$.
Le coefficient directeur de la droite (YZ) est donc

$$\frac{-a\frac{d-1}{d+1}(x_Z + 1) + ax_Z - a}{\frac{2d}{d+1} + \frac{d-1}{d+1}x_Z - x_Z} = \frac{2a(x_Z + 1) - (d + 1)a}{2d - 2x_Z}$$

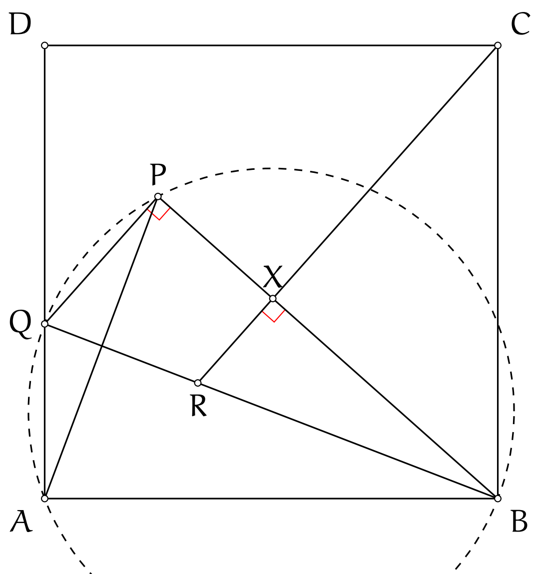
La droite (BT) a donc pour équation $y = \frac{2ax_Z - 2ad}{2d - 2x_Z}(x - 1)$. L'abscisse x du point T vérifie donc

$$\begin{array}{rcl} \frac{2ax_Z - 2ad}{2d - 2x_Z}(x - 1) & = & \frac{ax_Z + a}{x_Z - d}(x - d) \\ (2ax_Z - 2ad)(x - 1) & = & (2ax_Z + 2a)(x - d) \end{array}$$

et $x = 0$ est bien solution de cette équation (et il n'y a qu'au plus une solution). On a donc bien le point T sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 2. *(BXMO 2012 P4) Soit* ABCD *un carré. Soit* P *un point à l'intérieur du carré tel que* $\widehat{\mathrm{BAP}} > 60°$*. Soit* Q *le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite* (BP) *passant par* P *avec le côté* $[\mathrm{AD}]$*. Soit* R *le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite* (BP) *passant par* C *avec la droite* BQ*.*
1) Montrer que $\mathrm{BP} \geqslant \mathrm{BR}$*.*
2) Pour quelles positions du point P *l'inégalité précédente est-elle une égalité ?*

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>



Puisqu'il y a un carré, on pourrait vouloir poser un repère et effectuer un calcul en coordonnées cartésiennes. Mais on peut aussi traiter cet exercice à l'aide du trigo/length bashing.

Première étape : combien y a-t-il de degrés de libertés ? Manifestement il y en a 2 donnés par la position du point P. Si l'on veut tenter le trigo/length bashing, on s'attend à exprimer toutes les longueurs et angles en fonction de deux paramètres.
Le fait que l'énoncé nous demande une inégalité de longueur pourrait nous donner envie de choisir deux longueurs en paramètre, mais on va vite se rendre compte que pour avancer, on aura plutôt besoin d'angles.
On rajoute les points dont on a besoin, notamment le point X, point d'intersection des droites (BP) et (CR). On remarque aussi que $\widehat{\mathrm{QPB}} = 90° = \widehat{\mathrm{QAB}}$ donc les points $\mathrm{A}, \mathrm{Q}, \mathrm{P}$ et B sont cocycliques, ce qui est indéniablement une information utile.
Les deux angles paramètres vont apparaître naturellement dans nos calculs.
D'une part :

$$\mathrm{BP} = \mathrm{BQ} \cos \widehat{\mathrm{QBP}} = \frac{\mathrm{AB}}{\cos \widehat{\mathrm{QBA}}} \cos \widehat{\mathrm{QBP}}$$

et d'autre part :

$$\mathrm{BR} = \frac{\mathrm{BX}}{\cos \widehat{\mathrm{QBP}}} = \frac{\mathrm{BC} \cos \widehat{\mathrm{XBC}}}{\widehat{\mathrm{QBP}}}$$

Les meilleurs candidats pour être des paramètres sont donc les angles $\widehat{\mathrm{QBA}}$ et $\widehat{\mathrm{QBP}}$ que l'on note resepctivement α et β. La condition $\widehat{\mathrm{BAP}} > 60°$ se réécrit $\widehat{\mathrm{QBP}} = \widehat{\mathrm{QAP}} < 30°$. De plus

$\widehat{XBC} = 90° - \widehat{PBA}$ donc $\cos\widehat{XBC} = \cos(90° - (\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta)$. L'inégalité à démontrer se réécrit

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \geqslant \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$$

ou encore

$$\cos^2\beta \geqslant \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta\right)$$

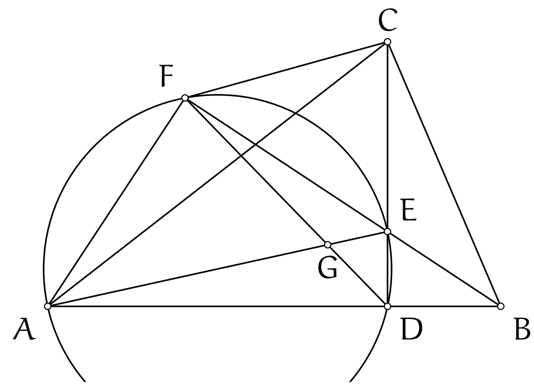
Pour cette inégalité, on remarque que l'angle $2\alpha+\beta$ n'a pas beaucoup de signification géométrique, on peut donc tenter bêtement l'inégalité $\sin(2\alpha+\beta) \leqslant 1$. En revanche, puisque $\beta < 30°$, on a $\sin\beta \leqslant \sin 30° = \frac{1}{2}$ et $\cos\beta \geqslant \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On rentre toutes ces inégalités dans l'inégalité et on trouve

$$\cos^2\beta \geqslant \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta\right)$$

L'inégalité de la question $1)$ est donc démontrée. Le cas d'égalité demandé en question $2)$ est facile avec nos inégalités : il faut $\beta = 30°$ et $2\alpha + 30° = 90°$ soit $\alpha = 30°$. Ceci est satisfait si et seulement si $\widehat{BAP} = \widehat{ABP} = 60°$ donc lorsque le triangle ABP est équilatéral.

Exercice 3. *(EGMO 2015 P1) Soit* ABC *un triangle aux angles aigus et soit* D *le pied de la hauteur issue du sommet* C*. La bissectrice de l'angle* ABC *coupe la droite* (CD) *au point* E *et recoupe le cercle circonscrit au triangle* ADE *au point* F*. On suppsoe que* $\widehat{ADF} = 45°$*. Montrer que la droite* (CF) *est tangente au cercle circonscrit au triangle* ADE*.*

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>



Si $\widehat{ADE} = 45°$, alors le point F est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{ADE}$ et du cercle circonscrit au triangle ADE. Le point F est donc le pôle Sud du sommet D dans le triangle ADE. Le triangle AFE est donc isocèle. Pour montrer que la droite (CF) est tangente au cercle circonscrit au triangle ADE, il suffit donc de montrer que les droites (AE) et (CF) sont parallèles.
Pour le faire nous allons utiliser le théorème de Thalès et introduire le point G, point d'intersection des droites (DF) et (AE).
Il suffit de montrer que $\frac{GD}{GF} = \frac{ED}{EC}$. On note que la condition supprime au moins un degré de liberté, on doit donc s'attendre à manipuler des expressions dépendant d'au plus deux paramètres (encore faut-il les trouver).

D'une part, par le théorème de la bissectrice, $\frac{ED}{EC} = \frac{BD}{BC} = \cos \widehat{ABC}$. On note $\beta = \widehat{ABC}$ qui nous donne un premier paramètre. Cela dit, comme la première fraction ne dépend que de β, on s'attend à ce que la deuxième fraction aussi. On doit donc exprimer tous les angles et toutes les longueurs en fonction de β.

Il n'y pas beaucoup d'autre solutions que d'utiliser la loi des sinus dans les triangles ADG et AFG pour avoir $\frac{GD}{GF}$. On calcule donc tous les angles dans ces triangles en fonction de β. Les triangles AFB et EDB sont semblables, donc $\widehat{FAD} = 90° - \frac{\beta}{2}$. Par le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{GAF} = 45°$ donc $\widehat{GAD} = 45° - \frac{\beta}{2}$. Enfin, $\widehat{AFD} = 90° - \widehat{DFA} = 90° - \widehat{DAE} = 45° + \frac{\beta}{2}$.

$$\frac{GD}{GF} = \frac{GD}{AG} \cdot \frac{AG}{GF} = \frac{\sin(45° - \beta/2)}{\sin 45°} \cdot \frac{\sin(45° + \beta/2)}{\sin 45°} = 2\sin(45° - \beta/2)\sin(45° + \beta/2)$$

Le reste n'est plus qu'un exercice de trigonométrie.

$$2\sin(45°-\beta/2)\sin(45°+\beta/2) = \cos(45°+\beta/2-(45°-\beta/2))-\cos(45°-\beta/2+45°+\beta/2) = \cos\beta$$

On a donc l'égalité de rapport $\frac{GD}{GF} = \frac{ED}{EC}$, cela termine l'exercice.

Exercice 4. *(RMM 2017 P4) Soient* G_1 *et* G_2 *les graphes de deux fonctions quadratiques* $f_1(x) = p_1x^2 + q_1x + r_1$ *et* $f_1(x) = p_2x^2 + q_2x + r_2$ *avec* $p_1 > 0 > p_2$*. Les graphes se coupent en deux points districts* A *et* B*. Les quatre tangentes aux graphes* G_1 *et* G_2 *forment un quadrilatère admettant un cercle inscrit. Montrer que les graphes* G_1 *et* G_2 *admettent le même axe de symétrie.*

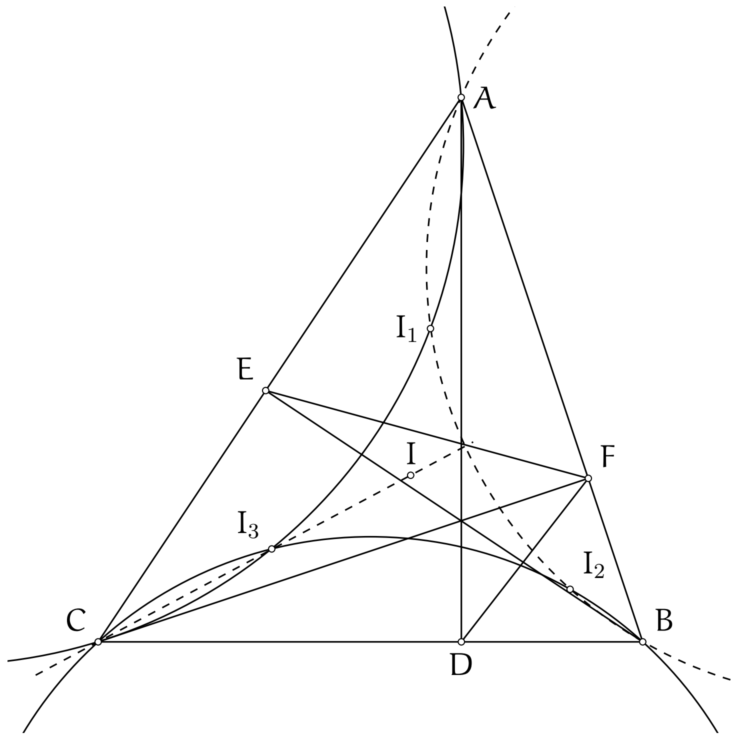
Solution de l'exercice 4 Je ne suis pas sûr, personnellement, d'avoir fait le deuil de ce problème.

Comme c'est des paraboles et qu'on n'a pas l'habitude, on se contente de foncer dans le tas pour voir ce que ça donne. Soit a et b les abscisses des points A et B. La tangente en A à G_i a pour équation $y = (2ap_i + q_i)(x - a) + f_i(a)$ et la tangente en B à G_i a pour équation $y = (2ap_i + q_i)(x - a) + f_i(a)$. Soient C et D les deux autres sommets du quadrilatère et c et d leur abscisse.
Alors c vérifie $(2ap_1 + q_1)(c - a) + f_1(a) = (2bp_1 + q_1)(c - b) + f_1(b)$ soit après développement $2p_1(a - b)c = p_1(a^2 - b^2)$ et $c = \frac{a+b}{2}$. On obtient la même abscisse pour d.
On commence à saisir et on se dit que ce serait beau que la droite (CD) coupe le segment $[AB]$ en son milieu (c'est le cas si l'axe de symétrie est commun, donc on peut tenter notre chance). On note y_m l'ordonnée du point d'intersection des droites (AB) et (CD) et M ce point d'intersection.
L'équation de la droite (AB) et $y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$, où f désigne f_1 ou f_2. Evaluée en c, on trouve $y_m = q_1\frac{b+a}{2} + \frac{p_1}{2}(b + a)^2 - \frac{p_1}{2}ab + r_1 = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ comme annoncé.
Ces informations, le jour du concours, valaient $2/7$.
Il suffit désormais de montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires. On déduirait alors que la droite (CD) est la médiatrice du segment $[AB]$ et que les points A et B ont la même ordonnée et que la droite (CD) est l'axe de symétrie commun.
On note qu'on a encore un tour dans notre sac puisqu'on n'a pas utilisé l'hypothèse du quadrilatère circonscriptible. Un peu de culture (eh oui, la culture c'est important) nous dit que cette hypohtèse se traduit par $AC + BD = AD + BC$.
Pour conclure il y a différentes approches. La plus maligne est la suivante :

Supposons que les droites (AB) et (CD) ne sont pas perpendiculaires. Alors disons que $\widehat{AMC} > \widehat{CMB}$. Alors, puisque $MB = MA$, on a $AC > CB$ et $BD > AD$, contredisant l'égalité $AC + BC = AD + CB$. De même dans l'autre cas. Habile n'est-ce pas ?

Exercice 5. *(G3 IMO SL 2012) Soit* ABC *un triangle aux angles aigus. Soient* D, E *et* F *les pieds des hauteurs issues des sommets* A, B *et* C *respectivement. On note respectivement* I_1 *et* I_2 *les centres des cercles inscrits aux triangles* AEF *et* BDF*. On note* O_1 *et* O_2 *les centres des cercles circonscrits aux triangles* ACI_1 *et* BCI_2*. Montrer que les droites* (O_1O_2) *et* (I_1I_2) *sont parallèles.*

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>



On cherche d'abord à éliminer les points O_1 et O_2, qui sont les points les plus inaccessibles dans la figure (on ne sait rien de leurs propriétés). Pour cela, on utilise l'axe radical des cercles circonscrits aux triangle AI_1C et BI_2C. Celui-ci est perpendiculaire à la droite (O_1O_2), on doit donc montrer qu'il est perpendiculaire à la droite (I_2I_1). En traçant cet axe radical, on se rend compte qu'il passe le point I, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Si c'est le cas, alors par puissance d'un point (puisque le point I appartient aux droites (AI_1) et (BI_2)) on a $II_1 \cdot IA = II_2 \cdot IB$ et les points A, I_1, I_2 et B sont cocycliques.
Récirproquement, si on suppose que les quatre points sont cocycliques, en notant I_3 le centre du cercle inscrit au triangle CED, alors les points A, I_1, I_3 et C sont cocycliques par symétrie. Le point I_3 est donc le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles AI_1C et BI_2C. Il reste alors à montrer que les droites (II_3) et (I_1I_2) sont perpendiculaires. Or

$$\widehat{II_3I_1} = 180° - \widehat{CI_3I_1} = \widehat{CAI_1} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$$

Mais les mêmes calculs permettent d'avoir

$$\widehat{I_3I_1I_2} = \widehat{I_3I_1I} + \widehat{II_1I_2} = \frac{\widehat{ACB}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2}$$

Donc $\widehat{I_3I_1I_2} + \widehat{II_3I_1} = 90°$ ce qui donne le résultat voulu.

Il reste donc à démontrer que les points A, I_1, I_2 et B sont cocycliques. Pour cela, on va montrer que $II_1 \cdot IA = II_2 \cdot IB$ et utiliser la réciproque de la puissance d'un point.

Tout d'abord, la longueur II_1 n'est pas très arrangeante, on la transforme donc en $II_1 = IA - AI_1$. Puisque les triangles AEF et ABC son semblables, on a $\frac{AI_1}{AE} = \frac{IA}{AB}$ donc $AI_1 = AI \cdot \frac{AE}{AB} = AI \cdot \cos\alpha$. Ainsi

$$II_1 \cdot IA = (IA - AI_1) \cdot IA = IA^2 (1 - \cos\alpha)$$

On ne sait pas manipuler $1 - \cos\alpha$, on exprime donc tout en fonction de $\tan\frac{\alpha}{2}$. On sait qu'on est sur la bonne voit car on pourra relier $\frac{\alpha}{2}$ à IA. Justement, en adoptant la transformation de Ravi, $IA = \frac{x}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Ainsi :

$$II_1 \cdot IA = IA^2 \left(1 - \frac{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{x^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{2\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

On utilise alors la relation $1 + \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ pour simplifier

$$II_1 \cdot IA = 2x^2 \tan^2\frac{\alpha}{2} = 2r^2$$

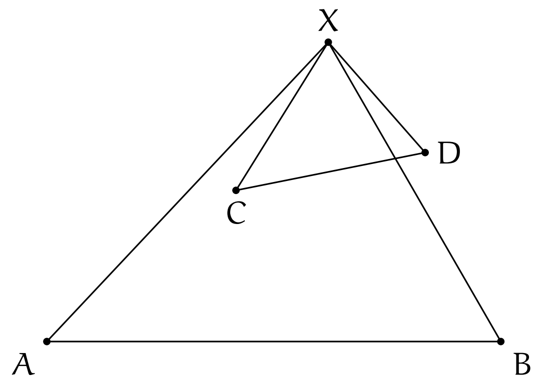
où r est le rayon du cercle inscrit au triangle ABC. On obtient bien sûr de même que $II_2 \cdot IB = 2r^2$. On a donc égalité des puissances et les points sont cocycliques, ce qui termine le problème.

7.2 Les nombres complexes

7.2.1 Exercices du cours

Exercice 1. *(Affixe du centre d'une similitude, à retenir) Soit* A, B, C *et* D *quatre points distincts. Montrer que l'affixe du centre de la similitude envoyant* A *sur* C *et* B *sur* D *a pour affixe*

$$x = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}$$



<u>*Solution de l'exercice 1*</u>
Soit X le centre de la similitude recherché. Par définition du point X, les triangles XCD et XAB sont semblables, ce qui s'écrit

$$\frac{x - a}{x - b} = \frac{x - c}{x - d}$$

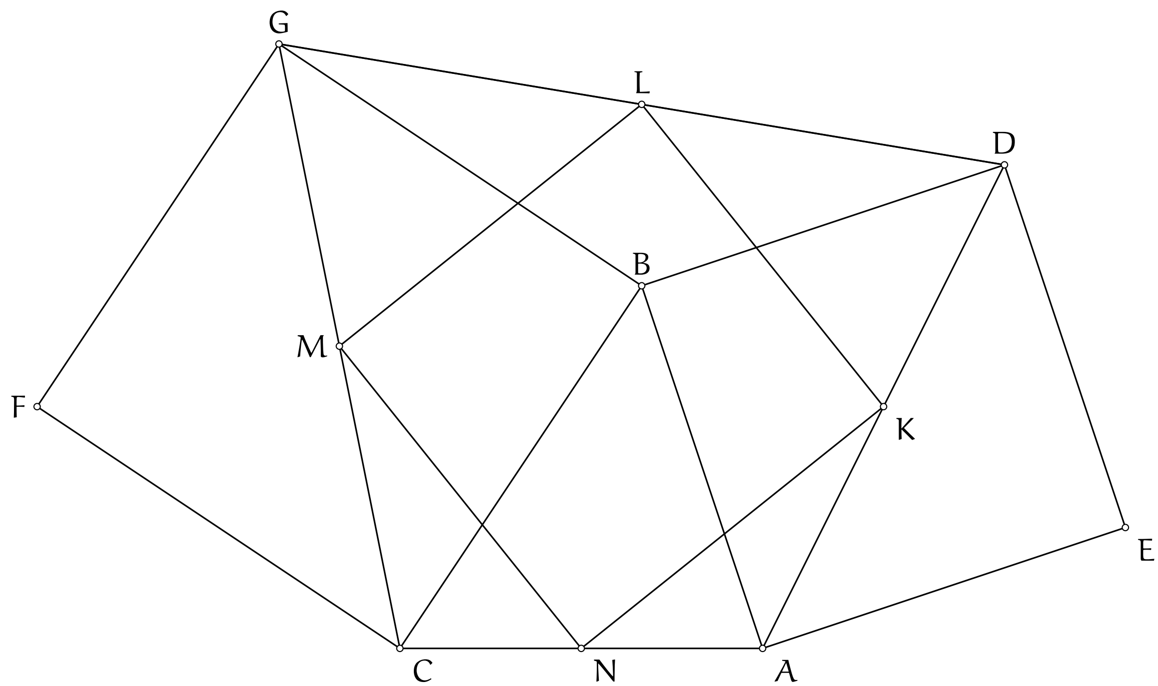
Après développement et simplification, cette formule est équivalente à

$$x = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}$$

On retrouve d'ailleurs qu'il n'y a pas de similitude si $ACDB$ est un parallélogramme (la transformation est en effet une translation à ce moment-là).

Exercice 2. *Soit* ABC *un triangle. On construit à l'extérieur du triangle les points* D, E, F *et* G *tel que les quadrilatères* $ABDE$ *et* $BCFG$ *soient des carrés. Soient* K, L, M *et* N *les milieux respectifs des segments* $[AD], [DG], [GC]$ *et* $[AC]$. *Montrer que le quadrilatère* $KLMN$ *est un carré.*

Solution de l'exercice 2



On fixe $c = 0$. Remarquons qu'il n'y a pas besoin de calculer les affixes des points E et F. Calculons donc les autres.
Par définition, le point D est l'image du point A par la rotation d'angle $90°$ de centre B. Ainsi $d = R_{b,\frac{\pi}{2}}(a) = i(a-b) + b$.
De même, $g = R_{b,-\frac{\pi}{2}}(c) = -i(c-b) + b = (1+i)b$.
Ainsi,

$$k = \frac{a+d}{2} = \frac{(1+i)a + (1-i)b}{2}$$

$$l = \frac{d+g}{2} = \frac{ia + 2b}{2}$$

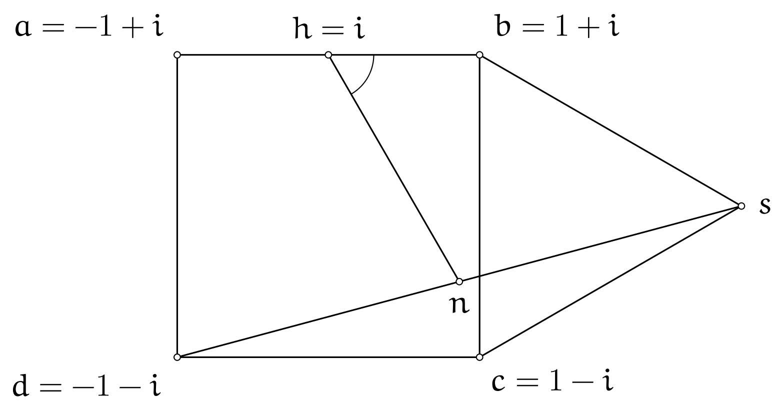
$$m = \frac{g+c}{2} = \frac{(1+i)b}{2}$$

$$n = \frac{a+c}{2} = \frac{a}{2}$$

Il suffit de vérifier que $k - n = -i(m-n)$ et $l - m = i(n-m)$.
Or d'une part $2(k-n) = ia + (1-i)b$ et d'autre part $-2i(m-n) = -i(1+i)b - i(-a) = (1-i)b + ia$.
De plus d'une part $2(l-m) = ia + (1-i)b$ et $2i(n-m) = ia - i(1+i)b = ia + (1-i)b$, on conclut donc que le quadrilatère $KLMN$ est un carré.

Exercice 3. *(Coupe Animath 2020, énoncé originel) Soit* $ABCD$ *un carré et* S *le point tel que le triangle* BCS *est équilatéral et à l'extérieur du carré* $ABCD$*. Soit* H *le milieu du segment* $[AB]$ *et* N *le milieu du segment* $[DS]$*. Montrer que* $\widehat{NHC} = 60°$.

Solution de l'exercice 3



Première étape : se fixer un repère. N'importe quel repère simple devrait marcher, prenons donc $a = -1 + i$, $b = 1 + i$, $c = 1 - i$ et $d = -1 - i$. On cherche désormais à calculer s. Le point S est l'image du point C par la rotation d'angle $60°$ de centre B, ce qui se réécrit :

$$\frac{s-b}{c-b} = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

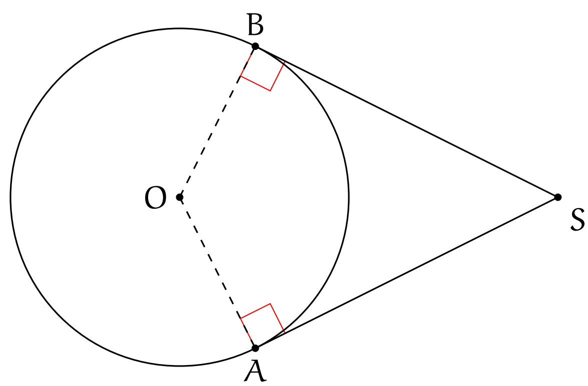
soit $s = -2ie^{\frac{i\pi}{3}} + 1 + i$.
On déduit $n = \frac{s+d}{2} = -ie^{\frac{i\pi}{3}}$. Notons que cela implique que le point N est sur le cercle inscrit au carré ABCD. C'est cadeau. Il reste à calculer l'argument de $\frac{n-h}{b-h}$. Or

$$\frac{n-h}{b-h} = \frac{-ie^{\frac{i\pi}{3}} - i}{1} = -i(e^{\frac{i\pi}{3}} + 1) = -2ie^{\frac{i\pi}{6}} \cos(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}e^{\frac{-i\pi}{3}}$$

donc l'angle vaut bien $60°$.

Exercice 4. *(Point d'intersection de deux tangentes, à retenir) Soient* A *et* B *deux points du cercle unité, calculer l'affixe du point d'intersection des tangentes en* A *et en* B *au cercle unité.*

Solution de l'exercice 4



Soit S le point d'intersection des tangentes au cercle unité en A et B.
Les droites (AS) et (OA) sont perpendiculaires, ainsi :

$$\frac{s-a}{\overline{s}-\overline{a}} = -\frac{a-0}{\overline{a}-0} = -a^2$$

soit $s + a^2\overline{s} = 2a$.
De même on obtient $s + b^2\overline{s} = 2b$.
On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnus s et $\overline{s}$, qui donne après résolution : $s(b^2 - a^2) = 2ab(b-a)$ et

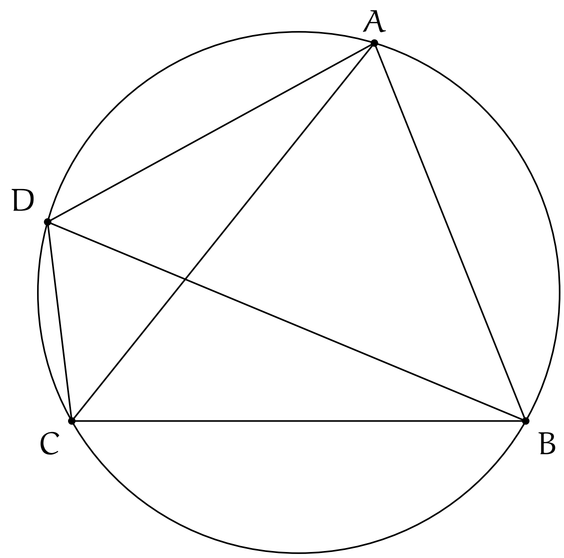
$$s = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\overline{a}+\overline{b}}$$

Exercice 5. *(Inégalité de Ptolémée) Soit* $ABCD$ *un quadrilatère. Montrer que*

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geqslant AC \cdot BD$$

avec égalité si et seulement si le quadrilatère est cyclique.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>



On écrit naïvement l'inégalité avec des modules. On se rend alors compte que pour simplifier, on pourrait fixer une affixe, par exemple d, comme nulle. L'inégalité devient

$$|b-a|\cdot|c|+|c-b|\cdot|a| \geqslant |a-c|\cdot|b|$$

Cela ressemble fort à l'inégalité triangulaire. Pour la transformer en inégalité triangulaire, il suffit de diviser de part et d'autre par $|abc|$. L'inégalité devient en effet :

$$\left|\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right|+\left|\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right| \geqslant \left|\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right|$$

Il y a égalité si et seulement si

$$\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}$$

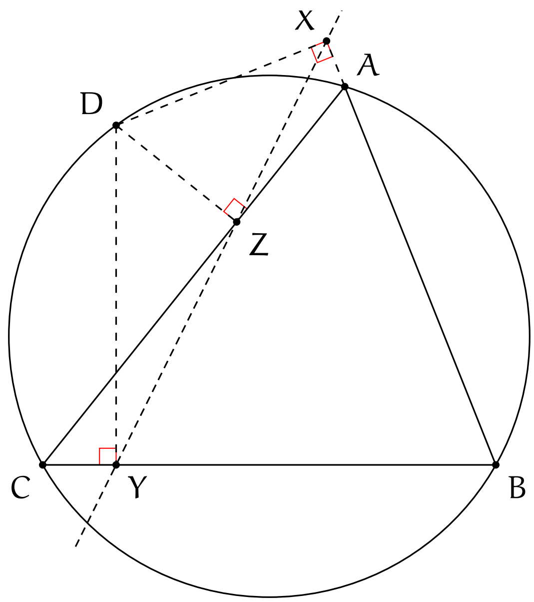
est un réel strictement positif, ce qui se réécrit comme

$$\frac{c-0}{a-0}\cdot\frac{a-b}{c-b}$$

qui doit être réel. On retrouve la condition que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 6. *(Droite de Simson) Soit* ABC *un triangle et soit* D *un point quelconque. Soient* X, Y *et* Z *les projetés orthogonaux du point* D *sur chacune des droites* $(AB), (BC)$ *et* (CA)*. Montrer que les points* X, Y *et* Z *sont alignés si et seulement si le point* D *appartient au cercle circonscrit au triangle* ABC*.*

Solution de l'exercice 6



On connaît l'affixe du projeté d'un point sur la corde du cercle unité. On fixe donc le cercle circonscrit au triangle ABC comme le cercle unité et on note a, b, c et d les affixes des points A, B, C et D respectivement. On peut donc calculer les affixes des points x, y et z.

$$x = \frac{1}{2}(a + b + d - ab\overline{d})$$
$$y = \frac{1}{2}(c + b + d - bc\overline{d})$$
$$z = \frac{1}{2}(a + c + d - ac\overline{d})$$

Les points x, y et z sont alignés si et seulement si le complexe suivant est réel :

$$\frac{x-y}{z-y} = \frac{a+b+d-ab\overline{d}-(c+b+d-bc\overline{d})}{a+c+d-ac\overline{d}-(c+b+d-bc\overline{d})} = \frac{a-c-b\overline{d}(a-c)}{a-b-c\overline{d}(a-b)}$$

soit

$$\frac{x-y}{z-y} = \frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{1-b\overline{d}}{1-c\overline{d}}$$

Or, puisque $\overline{a} = \frac{1}{a}$ et de même pour b et c, on a :

$$\frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{1-b\overline{d}}{1-c\overline{d}} = \frac{1-\overline{a}c}{1-\overline{a}b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{\overline{b}-\overline{d}}{\overline{c}-\overline{d}} = \frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} \cdot \frac{\overline{b}-\overline{d}}{\overline{c}-\overline{d}}$$

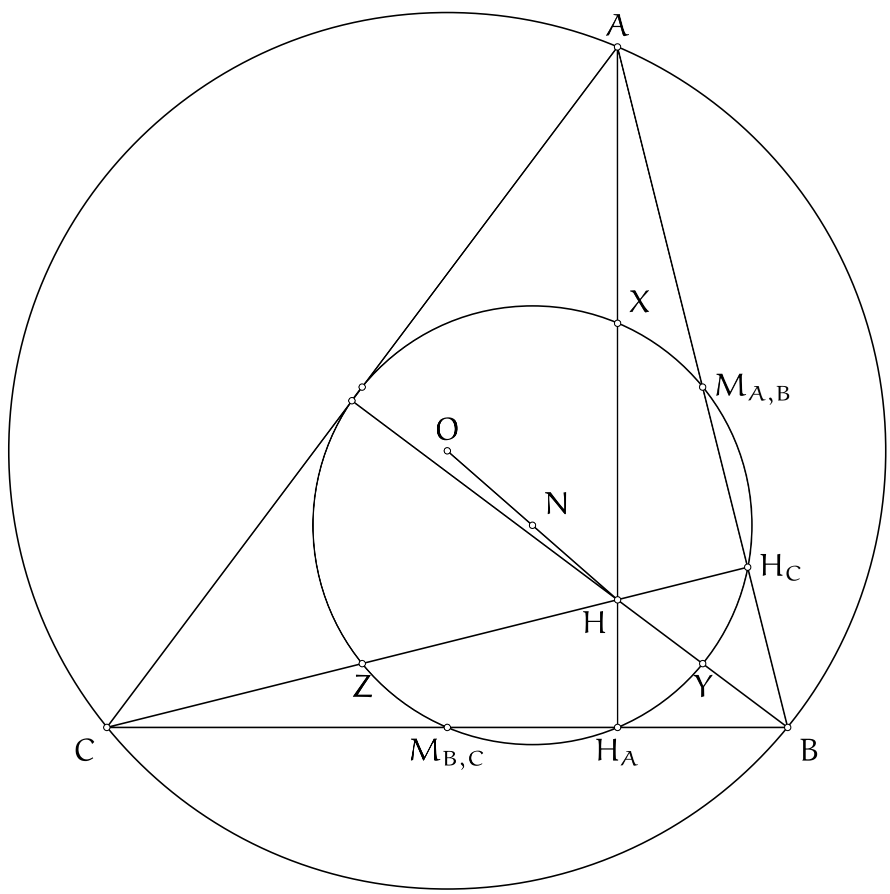
Ainsi, $\frac{x-y}{z-y}$ est réel si et seulement si $\frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} \cdot \frac{\overline{b}-\overline{d}}{\overline{c}-\overline{d}}$ est réel, ou encore (en passant au conjugué), si et seulement si, $\frac{c-a}{b-a} \cdot \frac{b-d}{c-d}$ est réel. Cette dernière fraction est réelle si et seulement si les points A, B, C et D sont cocycliques, on a donc l'équivalence voulue.

Exercice 7. *Retrouvez à l'aide des nombres complexes le résultat suivant : les symétriques de l'orthocentre d'un triangle* ABC *par rapport aux milieux des côtés appartiennent au cercle circonscrit au triangle* ABC *et correspondent aux points diamétralement opposés aux sommets* A, B *et* C.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On fixe le cercle circonscrit au triangle ABC comme le cercle unité. Le point X diamétralement opposé au sommet A a pour affixe $-a$. Pour montrer que X est le symétrique de l'orthocentre H par rapport au côté $[BC]$, il suffit de montrer que le quadrilatère $HBXC$ est un parallélogramme, ce qui revient à montrer que $x+h = b+c$. Puisque $h = a+b+c$ et $x = -a$, l'égalité est satisfaite.

Exercice 8. *Soit* ABC *un triangle et* H *son orthocentre. Retrouver que les pieds des hauteurs, les milieux des côtés et les milieux des segments* $[AH]$, $[BH]$ *et* $[CH]$ *appartiennent tous à un même cercle de centre le milieu du segment* $[OH]$ *et de rayon* $R/2$, *avec* R *le rayon du cercle circonscrit au triangle* ABC.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>



On note $M_{B,C}$ le milieu du segment $[BC]$ on adapte cette notation pour les milieux des segments $[CA]$ et $[AB]$.
On note H_A, H_B et H_C les milieux des hauteurs issues des sommets A, B et C respectivement.

On note X, Y et Z les milieux respectifs des segments [AH], [BH] et [CH].
On note enfin N le milieu du segment [OH]. On fixe pour cercle unité le cercle circonscrit au triangle ABC et pour tout point noté par une lettre majuscule, on note son affixe en minuscule.

Il suffit de montrer les égalités de module : $|n-m_{b,c}| = |n-h_a| = |n-x| = \frac{1}{2}$. Les autres égalités de module suivront par raisonnement cyclique.

Tout d'abord, par définition, $n = \frac{0+h}{2} = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

De plus, $m_{b,c} = \frac{b+c}{2}$, $h_a = \frac{1}{2}(a+b+c-bc\overline{a})$ et $x = \frac{a+h}{2} = a + \frac{b+c}{2}$. Alors

$$|n-m_{b,c}| = \left|\frac{a+b+c-(b+c)}{2}\right| = \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

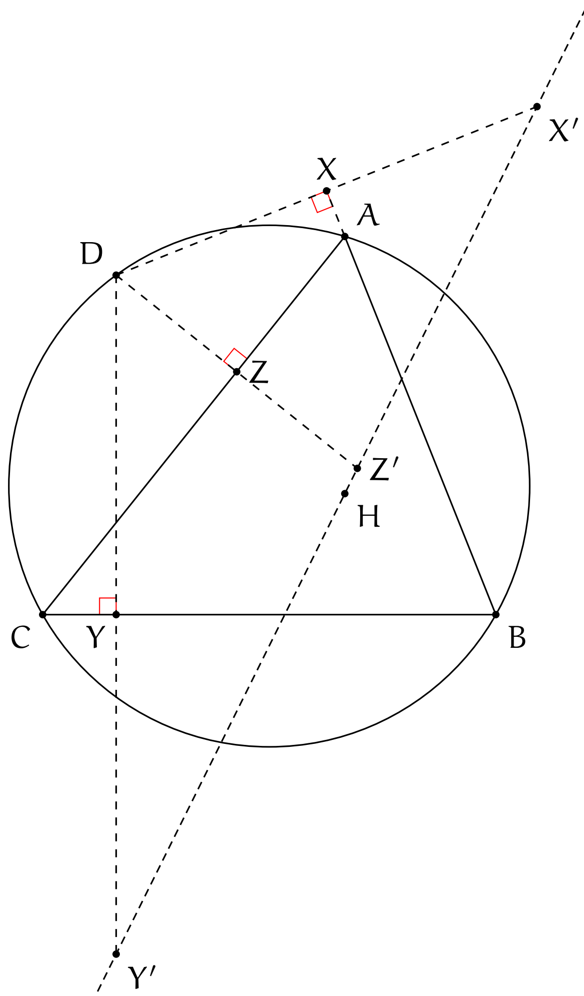
$$|n-h_a| = \left|\frac{a+b+c-(a+b+c-bc\overline{a})}{2}\right| = \left|\frac{bc\overline{a}}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$|n-x| = \left|\frac{a+b+c-(2a+b+c)}{2}\right| = \left|-\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

puisque les nombres a, b et c sont de module 1. On a donc le résultat voulu.

Exercice 9. *(Droite de Steiner) Soit* ABC *un triangle et soit* D *un point quelconque. Soient* X', Y' *et* Z' *les symétriques du point* D *par rapport aux droites* $(AB), (BC)$ *et* (CA)*. Montrer que les points* X', Y' *et* Z' *sont alignés si et seulement si le point* D *appartient au cercle circonscrit au triangle* ABC*. Montrer que si c'est le cas, la droite* $(X'Z')$ *passe par le point* H*. La droite de Simson coupe donc le segment* $[DH]$ *en son milieu.*

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>



Une fois de plus, on fixe le cercle circonscrit au triangle ABC comme le cercle unité.
Soient X, Y et Z les projections orthogonales du point D sur les droites $(AB), (BC)$ et (CA) et soient X', Y' et Z' les symétriques du points D par rapport à ces mêmes droites. Alors on a $x = \frac{x'+d}{2}$ et $x = \frac{1}{2}(a + b + d - ab\overline{d})$ donc

$$x' = a + b - ab\overline{d}$$

$$y' = b + c - bc\overline{d}$$

$$z' = c + a - ac\overline{d}$$

Les points X', Y' et Z' sont alignés si et seulement si le complexe suivant est réel :

$$\frac{x' - y'}{z' - y'} = \frac{(a - c)(1 - b\overline{d})}{(a - b)(1 - c\overline{d})}$$

On peut alors conclure comme pour la droite de Simson que ce rapport est réel si et seulement si les points A, B, C et D sont cocycliques.
Dans ce cas, on montre que le rapport $\frac{h-y'}{h-x'}$ est réel, en utilisant que le point D est sur le cercle unité et donc que $\bar{d} = \frac{1}{d}$:

$$\frac{h-x'}{h-y'} = \frac{c+ab\overline{d}}{a+bc\overline{d}} = \frac{dc+ab}{ad+bc}$$

Pour voir que cette fraction est réelle, on calcule son conjugué et on espère retomber sur la même chose :

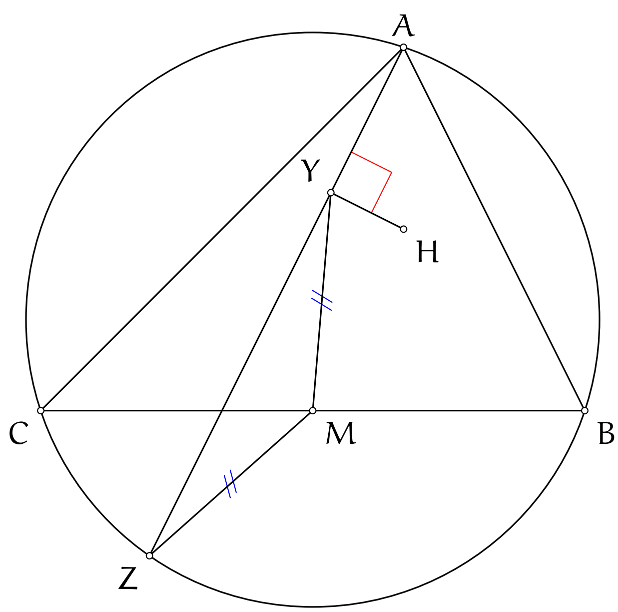
$$\overline{\left(\frac{dc+ab}{ad+bc}\right)} = \frac{\overline{d}\overline{c}+\overline{a}\overline{b}}{\overline{a}\overline{d}+\overline{b}\overline{c}} = \frac{\frac{1}{dc}+\frac{1}{ab}}{\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}} = \frac{dc+ab}{ad+bc} \cdot \frac{dcab}{dacb}$$

La fraction est donc réelle et le point H appartient donc à la droite de Steiner.

7.2.2 Exercices

Exercice 1. *Soit* ABC *un triangle,* H *son orthocentre et* M *le milieu du segment* $[BC]$. *Une droite passant par* A *recoupe le cercle circonscrit au triangle* ABC *en un point* Z. *Soit* Y *le projeté orthogonal du point* H *sur le segment* $[AZ]$. *Montrer que* $MY = MZ$.

Solution de l'exercice 1



La plupart des points sont sur un même cercle et on a même un point variable sur un cercle, les nombres complexes semblent très prometteurs.
On note en minuscule l'affixe des lettres notées en majuscules. On fixe le cercle circonscrit au triangle ABC comme le cercle unité.
Le point Y est le projeté orthogonal du point H sur le segment $[AZ]$, ce que l'on peut calculer facilement comme

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2}(a + z + h - az\overline{h}) \\ &= \tfrac{1}{2}(a + z + a + b + c - az\overline{(a + b + c)}) \\ &= \tfrac{1}{2}(2a + b + c - az\overline{(b + c)}) \end{aligned}$$

On peut donc calculer :

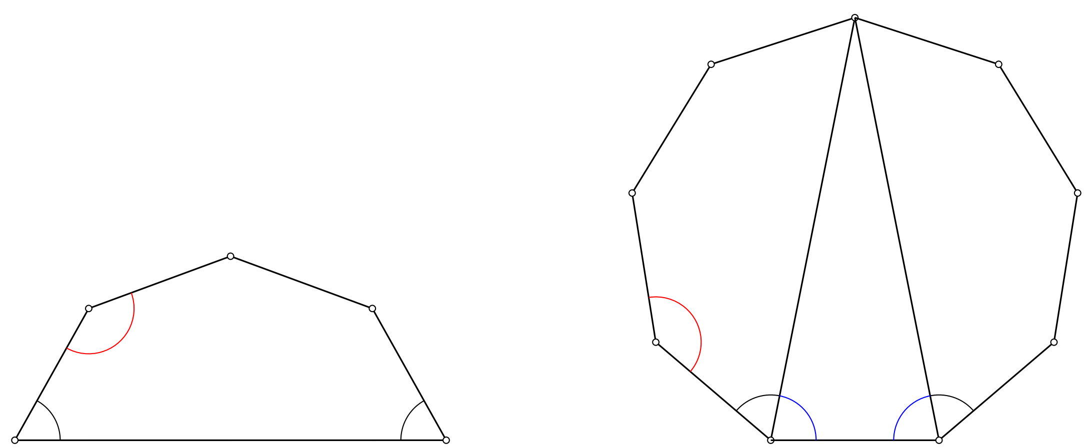
$$\begin{aligned} |m - y| &= \left|\tfrac{b+c}{2} - \tfrac{1}{2}\left(2a + b + c - az\overline{(b + c)}\right)\right| \\ &= \tfrac{1}{2}| - 2a + az\overline{(b + c)}| \\ &= \tfrac{|a|}{2}| - 2 + z\overline{(b + c)}| \\ &= \left|-1 + z\overline{\tfrac{b+c}{2}}\right| \\ &= |z| \cdot \left|-\overline{z} + \overline{\tfrac{b+c}{2}}\right| \\ &= \left|-z + \tfrac{b+c}{2}\right| \\ &= |m - z| \end{aligned}$$

ce donne bien le résultat voulu.

Exercice 2. *(Cyberspace Mathematical Competition 2020 P6) Déterminer tous les entiers $n \geqslant 2$ satisfaisant la propriété suivante : Si un n-gone $\mathcal{P}$ convexe possède $n-1$ côtés de même longueur et $n-1$ angles de même mesure, alors le polygone $\mathcal{P}$ est un polygone régulier.*

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On commence par tester des petits cas : pour $n = 3$, la propriété est fausse (il suffit de prendre un triangle isocèle non équilatéral). Pour $n = 4$, c'est plus subtile. Quitte à renuméroter les sommets, on peut noter ce quadrilatère $ABCD$ avec $\widehat{BAC} = \widehat{BCD}$ et $AB = AD = DB$. Le triangle ADB est isocèle donc $\widehat{DAC} = \widehat{DCA}$ donc $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$ et le triangle ABC est isocèle en B. Donc tous les côtés sont de même longueur. Mais alors le quadrilatère est un losange à trois angles égaux, c'est donc un carré.
On peut alors penser deux choses : la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 4$ ou la propriété est vraie seulement pour les entiers pairs.
On examine alors le cas $n = 5$, où l'on peut se convaincre que la propriété n'est satisfaite que par les entiers pairs.

Passons à la preuve. Tout d'abord, construisons poour n impair un $n-$gone satisfaisant la propriété. Pour cela, on procède comme dans la figure ci-dessous :



Si $n = 2k+1$, on commence par construire un $k-$gone avec $k-2$ angles de mesure α, avec $\frac{k-2}{k-1} \cdot 180° < \alpha < \frac{k-1}{k} \cdot 180°$ (en rouge) et deux angles de mesure β à la base, avec β tel que $(k-2) \cdot \alpha + 2\beta = (k-2) \cdot 180°$ (en noir).

On place alors deux copies de ce $k-$gone de part et d'autre d'un triangle isocèle dont les angles à la base sont $\alpha - \beta$ (en bleu). On obtient alors un $n-$ gone dont au moins $n-1$ angles sont égaux et $n-1$ côtés sont égaux. Il reste à vérifier que le dernier angle ne vaut pas α. Mais cela est vrai puisqu'on a choisi $\alpha > \frac{k-2}{k} \cdot 180°$. Les angles ne sont donc pas tous égaux et notre construction fonctionne.

On montre désormais que la propriété est vérifiée pour le cas pair.
L'énoncé parle de polygones réguliers, ce qui est bien adapté aux nombres complexes. Soit $\mathcal{P}$ un polygone ayant $n-1$ côtés égaux et $n-1$ angles égaux. Notons $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les affixes des sommets du polygone. On peut supposer que la longueur des $n-1$ côtés égaux vaut 1 et on note

θ l'angle apparaissant $n-1$ fois. On note r la longueur du dernier côté et $\phi = (n-2)\pi - (n-1)\theta$ la mesure de l'angle manquant.
Quitte à renuméroter, on peut supposer que ϕ est l'angle formé par les points d'affixe z_{n-1}, z_n et z_1. On note alors j l'indice tel que $|z_{j+1} - z_j| = r$.
Ainsi, pour tout entier $k \neq j, j+1$, $z_{k+1} - z_k = e^{i\theta}(z_k - z_{k-1})$ et éventuellement $z_{j+1} - z_j = re^{i\theta}(z_j - z_{j-1})$.
On s'aperçoit alors que les bonnes quantités à considérer ne sont pas les affixes des sommets mais plutôt les affixes $z_{k+1} - z_k$ (correspondant aux affixes des vecteurs portés par les côtés).
On pose donc $x_k = z_{k+1} - z_k$. On obtient une relation importante qui est $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.
De plus, on peut fixer $x_1 = 1$ et $x_2 = x = e^{i\theta}$. On alors si $k \leqslant k-1$, $x_k = e^{i\theta} x_{k-1} = x_2^{k-1} = x^{k-1}$.
On a ensuite $x_j = rx^{j-1}$ et $x_{j+1} = \frac{1}{r} x_j = x^j$.
La relation devient

$$\begin{array}{lcl} 0 & = & 1 + x + x^2 + \ldots + rx^{j-1} + x^j + \ldots + x^{n-1} \\ (1-r)x^{j-1} & = & 1 + x + \ldots + x^{n-1} \\ (1-r)x^{j-1} & = & \frac{x^n - 1}{x-1} \\ (1-r) & = & \frac{x^n-1}{x^{j-1}(x-1)} \end{array}$$

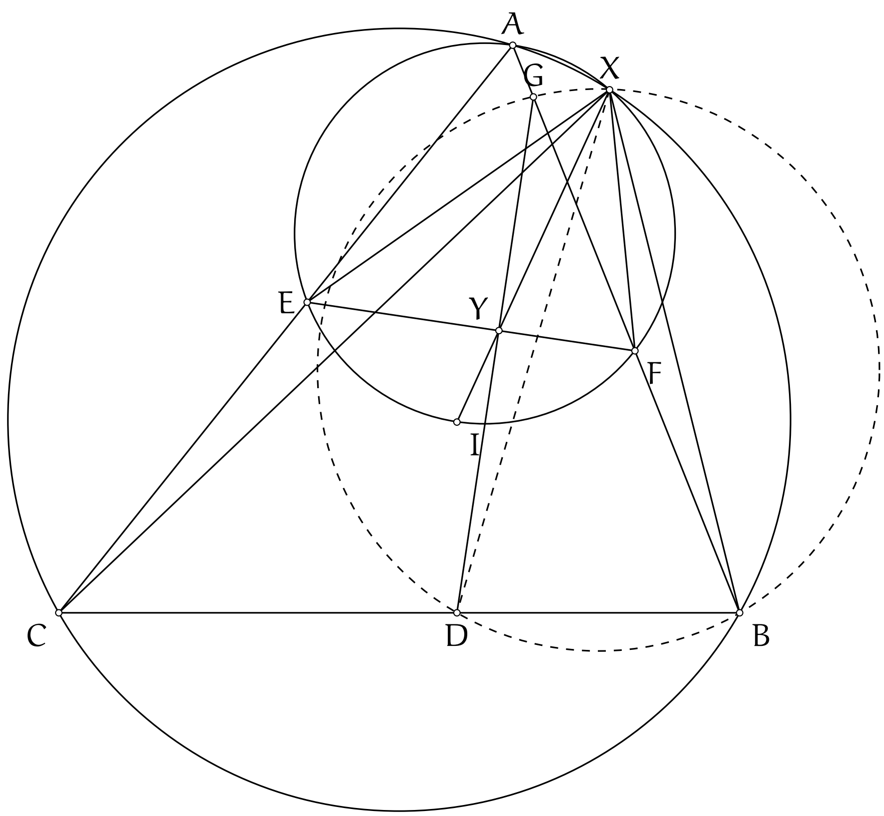
signifiant que le membre de gauche est réel, donc égal à son conjugué. En utilisant que x est de module 1 :

$$\frac{x^n - 1}{x^{j-1}(x-1)} = \overline{\left(\frac{x^n - 1}{x^{j-1}(x-1)}\right)} = x^{2j-n-1} \frac{x^n - 1}{x^{j-1}(x-1)}$$

Si $x^n = 1$, alors $r = 1$ et tous les côtés sont égaux et θ est une racine $n-$ème de l'unité et on déduit que $\theta = \frac{2i\pi}{n}$ donc $\mathcal{P}$ est régulier. Si on suppose que $x^n \neq 1$, on obtient que $x^{2j-n-1} = 1$. Or $x = e^{i\theta}$. Ainsi, $(2j-n-1)\theta$ est un mutliple de 2π. On dispose de p un entier tel que $\theta = 2\pi \frac{p}{2j-n-1}$ (le dénominateur est non nul car n est pair). Mais alors $|\theta| \geqslant 2\pi \frac{1}{|2j-n-1|} \geqslant 2\pi \frac{1}{n-1}$. Ceci contredit l'hypothèse selon laquelle $\mathcal{P}$ est convexe.

Exercice 3. *(Olympiade Francophone de Mathématiques 2020) Soit* ABC *un triangle aux angles aigus tel que* $AB < AC$*. Soit* D, E *et* F *les points de contact respectifs du cercle inscrit au triangle* ABC *avec les côtés* $[BC], [CA]$ *et* $[AB]$*. La droite perpendiculaire au semgent* $[EF]$ *passant par le point* D *recoupe le segment* $[AB]$ *en un point* G*. Le cercle circonscrit au triangle* AEF *recoupe le cercle circonscrit au triangle* ABC *au point* X*. Montrer que les points* X, G, D *et* B *sont cocycliques.*

Solution de l'exercice 3



Soit I le centre du cercle inscrit. Les points A, E, I et F sont cocycliques puisque $\widehat{IEA} = \widehat{IFA} = 90°$. Une première remarque frappante est que les droites (IX), (EF) et (GD) semblent concourrantes. Admettons dans un premier temps ce résultat, en l'absence d'une idée de preuve, et essayons de poursuivre. On notera Y le point de concours.

Puisque $IE = IF$, le point I est le milieu de l'arc EF. Ainsi,

$$\widehat{IXF} = \widehat{IXE} = \frac{1}{2}\widehat{EAF} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{DGF}$$

Donc les points G, X, F et Y sont cocycliques. Puisuqe $\widehat{FYG} = 90°$, on a aussi $\widehat{GXF} = 90°$.
On peut alors conclure :

$$\widehat{GXB} = \widehat{AXB} - \widehat{AXF} + \widehat{GXF} = 180° - \widehat{ACB} - (180° - \widehat{AEF}) + 90° = \widehat{AEF} - \widehat{ACB} + 90° = 180° - \frac{1}{2}\widehat{CAB} - \widehat{ACB}$$

Or

$$90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC} - \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} + \widehat{ABC} = \widehat{CDG}$$

Les points X, G, D et B sont donc cocycliques.

Il suffit donc de démontrer que le point Y d'intersection des droites (EF) et (DG) appartient à la droite (IX). Puisque le point X est défini comme le centre d'une similitude, on peut calculer son affixe. On a vu qu(avec le triangle ABC comme référence, les affixes des points D, E et F n'avaiet pas une expression très simple. On peut donc ruser et choisir comme triangle de référence un autre triangle : le triangle DEF. Les points A, B et C sont définis comme intersection des tangentes, on peut donc calculer leurs affixes dans ce nouveau référentiel.

On fixe donc pour cercle unité le cercle inscrit au triangle ABC. Par définition,

$$b = \frac{2df}{d+f}$$

$$c = \frac{2ed}{e+d}$$

X est le centre de la similitude envoyant F sur B et E sur C donc

$$x = \frac{eb - fc}{e + b - f - c} = (e+d)(f+d)\frac{\frac{2def}{d+f} - \frac{2def}{e+d}}{(e-f)(e+d)(f+d) + 2df(e+d) - 2ed(d+f)}$$

C'est-à-dire

$$x = \frac{2def(e-f)}{(e-f)[(e+d)(f+d) - 2d^2]} = \frac{2def}{ef + df + de - d^2}$$

On a aussi, puisque Y est le point d'intersection des droites (EF) et (DG) :

$$y = \frac{1}{2}(e + d + f - ef\overline{d})$$

Pour conclure, il faut montrer que (en notant que l'affixe du point I est nulle) :

$$\frac{x-0}{\overline{x}-0} = \frac{y-0}{\overline{y}-0}$$

On calcule de ce pas $\overline{y}$ et $\overline{x}$ avant de calculer $\overline{x}y - x\overline{y}$.

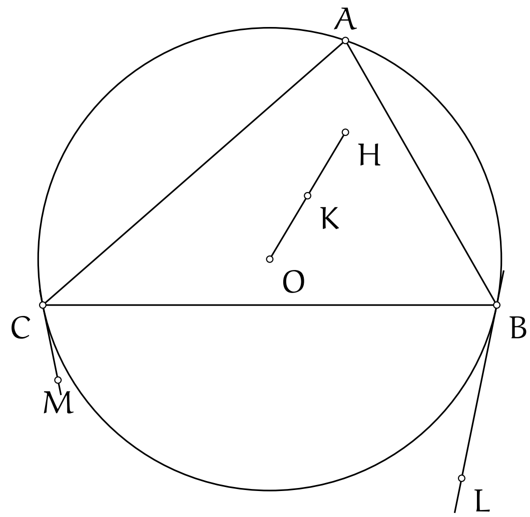
$$\overline{y} = \frac{1}{2def}(df + ef + ed - d^2)$$

On reconnaît alors que $\overline{y} = \frac{1}{x}$! On n'a donc pas besoin de calculer $\overline{x}$: la quantité $y\overline{x}$ est réelle donc égale à son conjuguée. Ainsi $\overline{x}y - x\overline{y} = 0$ donc les points I, Y et X sont alignés, on a donc terminé !

Remarque : Une fois qu'on a remarqué que le point X est le centre de la similitude envoyant F sur B et E sur C, on peut conclure avec des arguments de géométrie élémentaire sans avoir besoin de prouver que les droites $(IX), (EF)$ et (DG) sont concourrantes. Mais on peut ne pas le voir si l'on reste bloqué par le fait que les trois droites sont concourrantes et si on cherche à tout prix à démontrer ce résultat, qui est en fait plus difficile à prouver que le problème original.

Exercice 4. *(G2 Balkan MO 2018) Soit* ABC *un triangle et* Γ *son cercle circonscrit. Soit* O *le centre de* Γ *et* H *l'orthocentre du triangle* ABC*. Soit* K *le milieu du segment* $[OH]$*. La tangente en* B *au cercle* Γ *coupe la médiatrice du segment* $[AC]$ *en un point* L*. La tangente en* C *au cercle* Γ *coupe la médiatrice du segment* $[AB]$ *en un point* M*. Montrer que les droites* (AK) *et* (LM) *sont perpendiculaires.*

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>



Il faut reconnaître que les points ne semblent pas avoir beaucoup de rapport les uns avec les autres. Le chemin analytique est donc rapidement tentant. Tout est construit autour d'un cercle, les points O et H sont centraux, on va donc essayer avec les nombres complexes. La condition de perpendicularité s'exprime bien en nombres complexes. La difficulté principale sera donc d'avoir l'affixe des points M et L.
Comme d'habitude, on fixe Γ comme le cerlce unité et on note en minuscule l'affixe d'un point noté en majuscule.
La condition de tangence se traduit par $\frac{b-\ell}{\overline{b-\ell}} = -\frac{b-o}{\overline{b-o}} = -\frac{b}{\overline{b}}$ soit $2b = l + b^2\overline{\ell}$.
Mais le point L est sur la médiatrice du segment $[AC]$, ce qui se traduit par $\frac{\ell-\frac{a+c}{2}}{\overline{\ell-\frac{a+c}{2}}} = -\frac{a-c}{\overline{a-c}} = ac$.
On obtient une deuxième équation $\ell = ac\overline{\ell}$. On déduit $\ell = \frac{2abc}{ac+b^2}$.
De même on trouve $m = \frac{2abc}{ab+c^2}$.
La propriété à démontrer se traduit par montrer que $\frac{\ell-m}{\overline{\ell-m}} = -\frac{a-k}{\overline{a-k}}$.
Or d'une part,

$$-\frac{a-k}{\overline{a-k}} = -\frac{a-h/2}{\overline{a}-\overline{h}/2} = abc\frac{b+c-a}{bc-ab-ac}$$

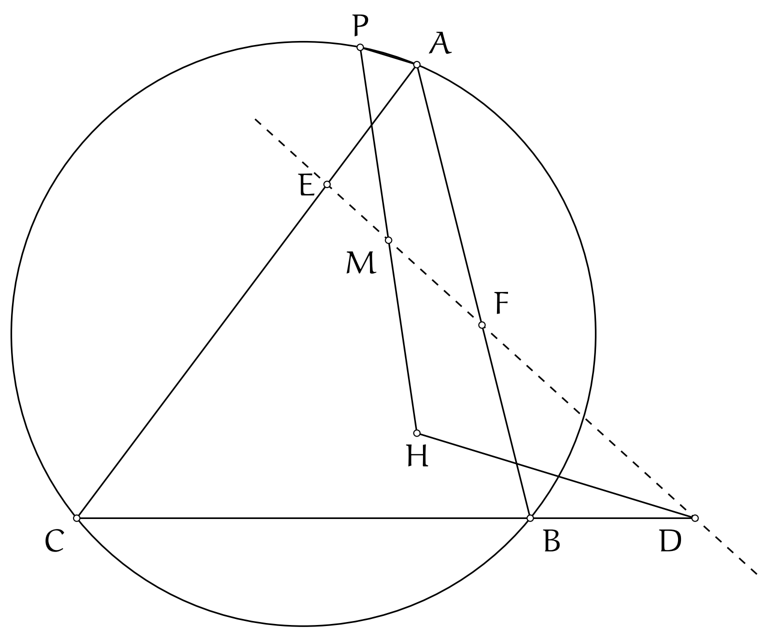
D'autre part, $\ell - m = 2abc(\frac{1}{ac+b^2} - \frac{1}{ab+c^2}) = \frac{2abc}{(ab+c^2)(ac+b^2)}(b-c)(b+c-a)$
et (en utilisant que $\overline{\ell} = \frac{\ell}{ac}$)

$$\overline{\ell} - \overline{m} = \frac{2b}{ac+b^2} - \frac{2c}{ab+c^2} = \frac{2}{(ac+b^2)(ab+c^2)}(b-c)(ab+ac-bc)$$

Finalement, $\frac{\ell-m}{\overline{\ell-m}} = abc\frac{b+c-a}{ab+ac-bc}$
On a bien $\frac{\ell-m}{\overline{\ell-m}} = -\frac{a-k}{\overline{a-k}}$ donc l'exercice est terminé. Ici les complexes se sont avérés redoutablement efficaces !

Exercice 5. *(Taiwan TST 2019 Round 1 Quiz 2 P1) Soit* ABC *un triangle,* H *sont orthocentre et* P *un point appartenant au cercle circonscrit au triangle* ABC*. Soit* M *le milieu du segment* $[HP]$*. On définit les points* D, E *et* F *sur les segments* $[BC], [CA]$ *et* $[AB]$ *respectivement tels que les droites* (AP) *et* (HD) *sont parallèles, les droites* (BP) *et* (HE) *sont parallèles et les droites* (CP) *et* (HF) *sont parallèles. Montrer que les points* D, E, F *et* M *sont alignés.*

Solution de l'exercice 5



Comme toujours, on notera en minuscule l'affixe d'un point noté en majuscule.

L'affixe du point M est $m = \frac{h+p}{2}$. On détermine l'affixe du point D. Celui-ci est aligné avec les points B et C donc

$$\frac{d-b}{\overline{d}-\overline{b}} = \frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}} = -bc$$

soit $d + bc\overline{d} = b + c$ et $\overline{d} = \overline{b} + \overline{c} - d\overline{b}\overline{c}$.
Les droites (AP) et (HD) sont parallèles donc

$$\frac{h-d}{\overline{h}-\overline{d}} = \frac{a-p}{\overline{a}-\overline{p}} = -ap$$

donc $d + ap\overline{d} = h + ap\overline{h}$.
On résoud alors le système en d et $\overline{d}$ pour trouver

$$d(1 - ap\overline{b}\overline{c}) = h + ap\overline{h} - ap\overline{b} - ap\overline{c} = h + ap(\overline{h} - \overline{b} - \overline{c} = h + ap\overline{a} = h + p$$

Ainsi

$$d = \frac{bc(h+p)}{bc - ap}$$

De même on trouve

$$e = \frac{ac(h+p)}{ac-bp}$$

$$f = \frac{ab(h+p)}{ab-cp}$$

Il reste à vérifier que les points D, E, F et M sont alignés. Pour cela, on va utiliser la formule avec le déterminant (bien pratique ici). Il faut vérifier que :

$$0 = \begin{vmatrix} d & \overline{d} & 1 \\ e & \overline{e} & 1 \\ f & \overline{f} & 1 \end{vmatrix}$$

On pose $d' = \frac{d}{h+p}$ (on définit de même e' et f'). Il suffit de vérifier que

$$0 = \begin{vmatrix} d' & \overline{d'} & 1 \\ e' & \overline{e'} & 1 \\ f' & \overline{f'} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{bc}{bc-ap} & -\frac{ap}{bc-ap} & 1 \\ \frac{ac}{ac-bp} & -\frac{ac}{ac-bp} & 1 \\ \frac{ab}{ab-cp} & -\frac{cp}{ab-cp} & 1 \end{vmatrix}$$

Mais la colonne de droite est égale à la somme des deux autres colonnes, donc c'est une combinaison linéaire des deux autres colonnes. Le déterminant est donc nul et les points D, E et F sont alignés.

Pour montrer que les points D, E et M sont alignés, il suffit de vérifier

$$0 = \begin{vmatrix} d & \overline{d} & 1 \\ e & \overline{e} & 1 \\ m & \overline{m} & 1 \end{vmatrix}$$

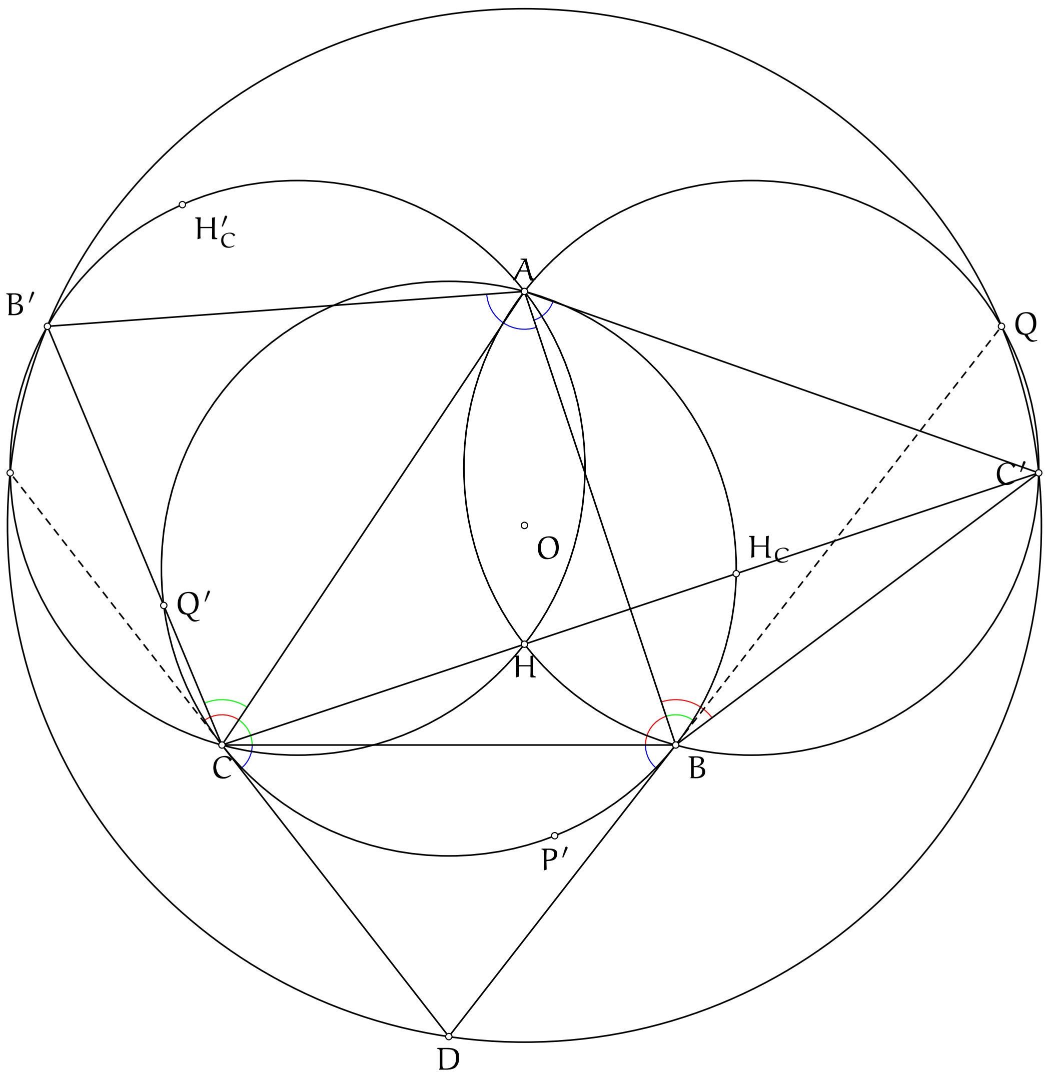
On utilise les nombres d', e' et $m' = \frac{1}{2}$, il suffit de vérifier

$$0 = \begin{vmatrix} d' & \overline{d'} & 1 \\ e' & \overline{e'} & 1 \\ m' & \overline{m'} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{bc}{bc-ap} & -\frac{ap}{bc-ap} & 1 \\ \frac{ac}{ac-bp} & -\frac{ac}{ac-bp} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

Une fois de plus, la dernière colonne est la somme des deux autres colonnes, le déterminant est donc nul. Les points D, E et M sont alignés et cela conclut l'exercice.

Exercice 6. *(ELMO 2016 P2) Soit* ABC *un triangle et* Γ *son cercle circonscrit. Soit* D *le point d'intersection des tangentes au cercle* Γ *en les points* B *et* C. *Soit* B' *le symétrique du point* B *par rapport à la droite* (AC) *et soit* C' *le symétrique du point* C *par rapport à la droite* (AB). *Soit* O *le centre du cercle circonscrit au triangle* $DB'C'$. *Montrer que les droites* (AO) *et* (BC) *sont perpendiculaires.*

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On commence par tracer une bonne figure, cela va être important ici.



Soit P le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle $AB'C$ avec le cercle circonscrit au triangle $DB'C'$. Soit Q la seconde intersection du cercle circonscrit au triangle ABC' avec le cercle circonscrit au triangle $DB'C'$.

L'observation clée est que les points D, B et P sont alignés, de même que les points D, C et Q.

Supposons acquis ce résultat. Cela signifie que $\widehat{ABQ} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{ACP} = \widehat{ABC}$. Puisque le problème nous suggère des symétries par rapport aux côtés $[AB]$ et $[AC]$, nous allons considérer P' le symétrique du point P par rapport au côté $[AC]$ et Q' le symétrique du point Q par rapport au côté $[AB]$. Ces deux points figurent tous les deux sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Par une chasse aux angles on trouve :

$$\widehat{P'CB} = \widehat{P'CA} - \widehat{BCA} = \widehat{PCA} - \widehat{BCA} = \widehat{ABC} - \widehat{ACB}$$

$$\widehat{CBQ'} = \widehat{ABC} - \widehat{Q'BA} = \widehat{ABC} - \widehat{QBA} = \widehat{ABC} - \widehat{ACB}$$

donc les droites (CP') et (BQ') sont parallèles et le quadrilatère $Q'CP'B$ est un trapèze isocèle. On déduit $B'P = BP' = CQ' = C'Q$ donc le quadrilatère $B'PC'Q$ est aussi un trapèze isocèle.

Désormais, il suffit de montrer que la droite (AH) (avec H l'orthocentre du triangle ABC) est la médiatrice commune des segments $[B'Q]$ et $[CP']$. Cela signifierait en effet que le point O, également sur la médiatrice commune, est sur la droite (AH).

Puisque $\widehat{AQB} = \widehat{AC'B} = \widehat{ACB} = \widehat{ABQ}$, le triangle AQB est isocèle en A donc $AQ = AB = AB'$ donc A est sur la médiatrice du segment $[QB']$. De même A est sur la médiatrice du segment $[PC']$.

Soit à présent H_C le symétrique du point H par rapport au côté $[AB]$ et soit H_C' le symétrique de H_C par rapport au côté $[AC]$. On sait que $HC' = H_CC = H_CC'$, il reste donc à montrer que le quadrilatère $HCPH_C'$ est un trapèze isocèle, ce qui donnera $HC' = HC'C = HP$ et montrera que H est sur la médiatrice du segment $[C'P]$. Ce résultat s'obtient, une fois de plus, par chasse aux angles puisque :

$$\widehat{PCH_C'} = \widehat{ABC} - \widehat{ACH} = \widehat{CAH} = \widehat{CPH}$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer le résultat acquis, à savoir que les points P, C et D sont alignés, ainsi que les points Q, B et D. Notons que si c'est le cas, $\widehat{DB'C'} = \widehat{DQC'} = \widehat{BQC'} = \widehat{BAC'} = \widehat{ABC}$ et idem pour $\widehat{DC'B'}$. Il suffit donc, réciproquement, de montrer que les triangles $B'C'D$ et BCD sont semblables.
Si on n'a pas d'idées, étant donné qu'il ne nous reste pas grand chose à prouver et que les points sont assez simples ici, on peut finir en analytique. Les nombres complexes semblent le meilleur moyen de gérer les définitions des différents points.
En effet, on sait déjà que $d = \frac{2}{\overline{b}+\overline{c}}$. Si x est l'affixe du pied de la hauteur issue du sommet C, on sait que $x = \frac{1}{2}(a + b + c - ab\overline{c})$, ce qui donne directement que $c' = a + b - ab\overline{c}$. De même, $b' = a + c - a\overline{b}c$.

Il suffit alors de montrer que $\frac{d-c}{c-b} = \frac{d-b'}{c'-b'}$.

D'une part, $\frac{c-b}{c'-b'} = \frac{c-b}{b-c-a(b\overline{c}-c\overline{b})} = \frac{bc}{ab+ac-bc}$

D'autre part $(b+c)(d-c) = bc - c^2 = c(c-b)$

et $(b+c)(d-b') = 2bc-(a+c)(b+c)+a\overline{b}c^2+ac = bc-ab-c^2+a\overline{b}c^2 = (c-b)(-c+a\overline{b}(c+b))$ et on a bien

$$\frac{c}{-c + a\overline{b}(c+b)} = \frac{bc}{ab + ac - bc}$$

ce qui conclut.
Il est possible de traiter ce problème totalement en complexes sans trop de douleur, mais c'est tout de même moins efficace.

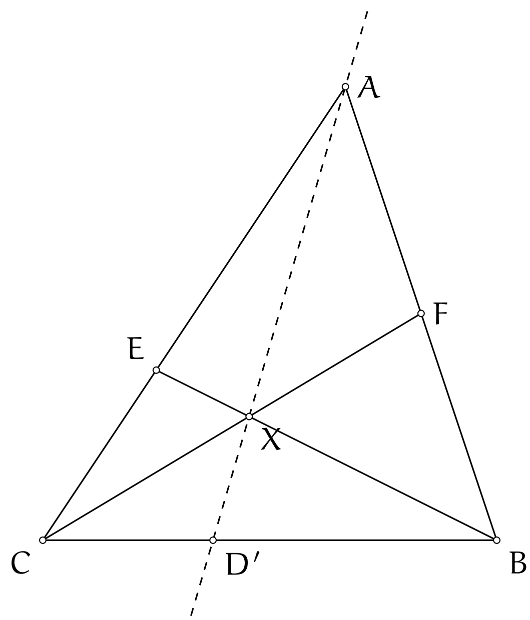
7.3 Les coordonnées barycentriques

7.3.1 Exercices du cours

Exercice 1. *Démontrer le théorème de Céva : soit* ABC *un triangle et soient* D, E *et* F *des points appartenant aux côtés respectifs* $[BC]$, $[CA]$ *et* $[AB]$. *Alors les droites* (AD), (BE) *et* (CF) *sont concourrantes si et seulement si*

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$$

Solution de l'exercice 1



Soit X le point d'intersection des droites (CF) et (BE) et soit D' le point d'intersection des droites (AX) et (BC). Il suffit de montrer que $\frac{BD'}{CD'} = \frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF}$. Puisque les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourrantes si et seulement si $D' = D$, on aura le résultat.
On choisit ABC comme triangle de référence et on note $(e, 0, 1-e)$ et $(f, 1-f, 0)$ les coordonnées respectives des points E et F. On détermine les coordonnées du point X, notées (x, y, z).
Le point X appartient à la droite (BE) donc

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ e & 0 & 1-e \\ x & y & z \end{vmatrix} = (1-e)x - ze$$

et il appartient à la droite (CF) donc

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ f & 1-f & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = yf - x(1-f)$$

et ainsi, en combinant les deux équations, on peut écrire les coordonnées du point X comme $\left(1, \frac{1-f}{f}, \frac{1-e}{e}\right)$. On en déduit les coordonnées du point D', de la forme $(0, y, z)$ puisqu'il appartient au segment $[BC]$.

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1-f}{f} & \frac{1-e}{e} \\ 0 & y & z \end{vmatrix} = z\frac{1-f}{f} - y\frac{1-e}{e}$$

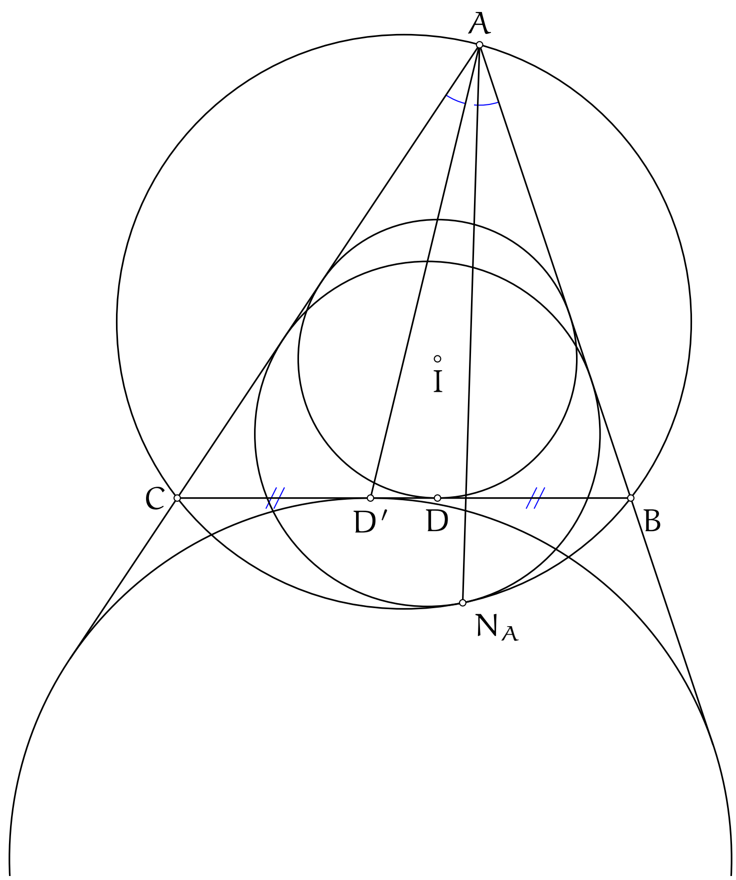
et les coordonnées du point D' sont $\left(0, \frac{1-f}{f}, \frac{1-e}{e}\right)$. On obtient, grâce à ces coordonnées, que

$$\frac{BD'}{CD'} = \frac{\frac{1-e}{e}}{\frac{1-f}{f}} = \frac{1-e}{e} \cdot \frac{f}{1-f} = \frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF}$$

ce qui donne le résultat désiré.

Exercice 2. *Calculer les coordonnées du point de Gergonne et de Nagel du triangle de référence (c'est-à-dire les points d'intersection des droites relaiant les sommets aux points de contact des cercles inscrits et exinscrits aux côtés opposés). En déduire les coordonnées du point d'intersection des droites reliant les sommets aux points de contact des cercles mixtilinéaires avec le cercle circonscrit.*

Solution de l'exercice 2



Le point de Gergonne est le point d'intersection des droites reliant les sommets aux points de contact du cercle inscrit avec les côtés opposés. On applique la transformation de Ravi et on note $x = \frac{c+b-a}{2}, y = \frac{a+c-b}{2}$ et $z = \frac{a+b-c}{2}$. Notons D, E, F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Alors les coordonnées des points D, E et F sont respectivement $(0, z, y)$, $(z, 0, x)$ et $(y, x, 0)$. Soit G le point d'intersection des droites (CF) et (BE) et notons (u, v, w) les coordonnées du point G.
Alors les coordonnées vérifient les deux équations suivantes, du fait de son alignement avec les points E et B d'une part et les points C et F d'autre part.

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & x \\ u & v & w \end{vmatrix} = xu - zw$$

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ y & x & 0 \\ u & v & w \end{vmatrix} = yv - xu$$

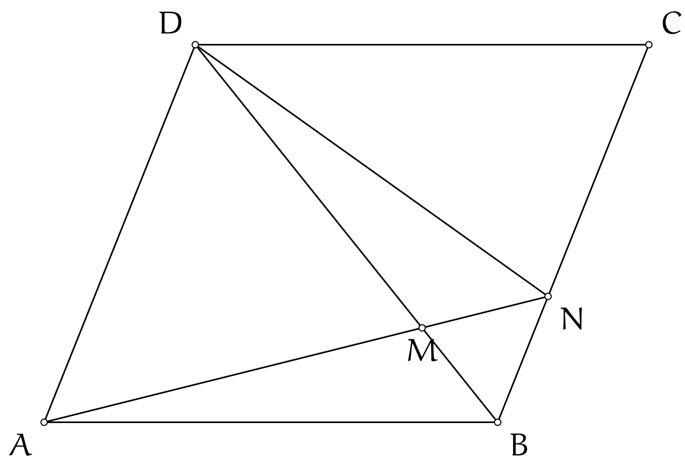
On déduit que les coordonnées du point G sont (yz, zx, xy).

Pour les coordonnées du point de Nagel, c'est beaucoup plus simple. Il s'agit du point d'intersection des droites reliant les sommets aux pointx des cerclex exinscrits avec le côté opposé. Notons D' le point de contact du cercle A-exinscrit avec le côté $[BC]$ et définissons E' et F' de la même façon respectivement pour les sommets B et C. Notons G' le point de concours des droites $(AD'), (BE')$ et (CF'). Puisque $CD' = BD'$, les coordonnées du point D' sont $(0, y, z)$. Les coordonnées du point E' sont de la même façon $(x, 0, z)$ et les coordonnées du point F' sont $(x, y, 0)$.
On déduit alors que les coordonnées du point G' sont (x, y, z).

Notons ω_A le cercle A-mixtilinéaire et N_A le point de contact du cercle ω_A et du cercle circonscrit au triangle ABC. On définit de même les points N_B et N_C. On note K le point de concours des droites $(AN_A), (BN_B)$ et (CN_C).
L'involution de centre A, de rayon $\sqrt{AB \cdot AC}$ et d'axe de symétrie la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ envoie le cercle circonscrit au triangle ABC sur la droite (BC) et le cercle ω_A sur un cercle tangent aux trois côtés du triangle ABC. Le cercle ω_A est intérieurement tangent au cercle circonscrit au triangle ABC, son image est donc située de l'autre côtée du segment $[BC]$ que le point A. L'image du cercle ω_A est donc le cercle A-exinscrit. L'image du point N_A est donc le point D'. Les droites (AD') et (AN_A) sont donc conjuguées isogonales par rapport aux droites (AC) et (AB). En conclusion, les points G' et K sont conjugués isogonaux dans le triangle ABC. Les coordonnées du point K sont donc $\left(\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z}\right)$.

Exercice 3. *(Coupe Animath d'automne 2020) Soit* ABCD *un parallélogramme d'aire* 1 *et soit* M *le point du segment* [BD] *tel que* MD = 3MB*. Soit* N *le point d'intersection des droites* (AM) *et* (BC)*. Quelle est l'aire du triangle* MND.

Solution de l'exercice 3



Le problème évoque des aires de triangles et peu de points, on peut donc espérer le tuer en barycentrique.
On choisit le triangle ABD comme triangle de référence. Les coordonnées des points A, B et D sont respectivement $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Puisque le point M appartient au segment [BD], ses coordonnées sont de la forme $(0, x, 1 - x)$. Puisque $MD = 3MB$, on déduit que $\frac{MB}{DB} = \frac{1}{4}$ et donc les coordonnées du point M sont $(0, 3/4, 1/4)$ ou encore $(0, 3, 1)$.

Le point C peut être défini comme le point d'intersection de la médiane issue du sommet A dans le triangle ABD et de la parallèle à la droite (AD) passant par le sommet B. Ceci correspond au calcul de la partie 5.2.3, les coordonnées du point C sont donc $(-1, 1, 1)$.

On en déduit les coordonnées du point N. Le point N appartient à la droite (AM), ses coordonnées sont donc de la forme $(t, 3, 1)$. Le point N appartient à la droite (BC) donc le réel t vérifie :

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ t & 3 & 1 \end{vmatrix} = t + 1$$

donc les coorodnnées du point N sont $(-1, 3, 1)$.

L'aire du triangle ABD correspond à la moitié de l'aire du parallélogramme ABCD, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$. On peut en déduire l'aire du triangle MND (en homogénéisant les coordonnées de chaque point) :

$$\text{Aire}(MND) = \text{Aire}(ABD) \cdot \begin{vmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

et l'aire du triangle MND vaut $\frac{1}{8}$.

Exercice 4. *Donner l'équation du cercle inscrit du triangle de référence.*

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On a déjà calculé les coordonnées des points de contacts D, E et F du cercle inscrit avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ dans l'exercice 2. On conserve les mêmes notations et on les utilise pour calculer les paramètres du cercle inscrit. Puisque le point D de coordonnées $(0, z, y)$ appartient au cercle :

$$-a^2yz + (vz + wy)(y + z) = 0$$

et comme $y + z = a$, on déduit $vz + wy = ayz$. En injectant les coordonnées des points E et F, on obtient le système

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & + & vz & + & wy & = & ayz \\ uz & + & 0 & + & wx & = & bzx \\ uy & + & vx & + & 0 & = & cxy \end{array}$$

qui a pour solutions (x^2, y^2, z^2).

Exercice 5. *Montrer que les points* O, H *et* G *sont alignés sur la droite d'Euler, en utilisant d'abord les coordonnées barycentriques sous forme trigonométrique, puis en utilisant les coordonnées avec les notations de Conway. Quelles coordonnées sont plus pratiques ?*

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Il suffit à chaque fois de calculer le déterminant des coordonnées des trois points et de voir qu'il fait 0.

Avec les coordonnées sous forme trigonométrique (avec les notations $\alpha = \widehat{BAC}, \beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin 2\alpha & \sin 2\beta & \sin 2\gamma \\ \tan\alpha & \tan\beta & \tan\gamma \end{vmatrix}$$

Pour montrer que ce déterminant est nul, on peut bien sûr utiliser le calcul brutal avec les formules de duplication. L'intérêt de cet exercice est de montrer que même pour un résultat aussi simple que l'alignement des points G, O et H, les coordonnées sous forme trigonométrique échouent à nous satisfaire. Toutefois, pour la curiosité du lecteur, on présente une solution un peu moins brutale et astucieuse.

On pose $A = \tan\alpha, B = \tan\beta$ et $C = \tan\gamma$ et on réécrit tout selon A, B et C. En particulier, $\sin 2\alpha = \frac{2A}{1+A^2}$. On va tirer parti, dans notre calcul, de l'identité $A + B + C = ABC$. On notera $K = ABC = A + B + C$. Le déterminant se réécrit (on supprime déjà le facteur 2 en commun à la deuxième ligne) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{A}{1+A^2} & \frac{B}{1+B^2} & \frac{C}{1+C^2} \\ A & B & C \end{vmatrix} = C\frac{B}{1+B^2} - B\frac{C}{1+C^2} + B\frac{A}{1+A^2} - A\frac{B}{1+B^2} + A\frac{C}{1+C^2} - C\frac{A}{1+A^2}$$

On met tout au même dénominateur. Le numérateur s'écrit

$$\begin{aligned}
& BC(C^2-B^2)(1+A^2)+CA(A^2-C^2)(1+B^2)+AB(B^2-A^2)(1+C^2)\\
= \ & BC(C^2-B^2)+KA(C^2-B^2)+CA(A^2-C^2)+KB(A^2-C^2)+\\
& +AB(B^2-A^2)+KC(B^2-A^2)\\
= \ & BC(C^2-B^2+KB-KC)+CA(A^2-C^2+KC-KA)+AB(B^2-A^2+KA-KC)\\
= \ & BC(C-B)(C+B-K)+CA(A-C)(A+C-K)+AB(B-A)(B+A-K)\\
= \ & -BCA(C-B)-CAB(A-C)-ABC(B-A)\\
= \ & 0
\end{aligned}$$

et le déterminant est donc bien nul.

Avec les formules de Conway, le déterminant est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ S_{BC} & S_{CA} & S_{AB} \\ a^2S_A & b^2S_B & c^2S_C \end{vmatrix}$$

On remarque alors, en notant de haut en bas les lignes L_1, L et L_3, que $L_3 = \frac{1}{S^2}L_2 + \frac{1}{S^2}L_3$, la première ligne est donc combinaison linéaire des deux autres, le déterminant est bien nul.
On vous laisse décider quelle version des coordonnées des points O et H est la plus pratique.

Exercice 6. *Vérifier que les milieux des côtés du triangle* ABC *appartiennent au cercle passant par les pieds des hauteurs.*

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On commence par établir l'équation du cercle passant par les pieds des hauteurs. Soient u, v et w des paramètres tels que l'équation soit de la forme

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux+vy+wz)(x+y+z) = 0$$

En injectant les coordonénes des pieds des hauteurs, qui sont $(0, S_C, S_B)$, $(S_C, 0, S_A)$ et $(S_B, S_A, 0)$, on obtient

$$-a^2S_{BC} + (vS_C + wS_B)(S_C + S_B) = 0$$
$$-b^2S_{AC} + (uS_C + wS_A)(S_C + S_A) = 0$$
$$-c^2S_{AB} + (uS_B + vS_A)(S_A + S_B) = 0$$

Avec $S_C + S_B = a^2$ et les relations identiques pour b et c, on obtient le système suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & + & vS_C & + & wS_B & = & S_CS_B \\
uS_C & + & 0 & + & wS_A & = & S_CS_A \\
uS_B & + & vS_A & + & 0 & = & S_AS_B
\end{array}$$

qui a pour solution $(u, v, w) = (S_A/2, S_B/2, S_C/2)$.
Il reste à injecter les coordonnées des milieux des côtés du triangle. On n'injecte que les coordonnées $(1, 1, 0)$, les autres donnant des résultats symétriques. Alors

$$-c^2 \cdot 1 \cdot 1 + \left(\frac{S_A}{2} + \frac{S_B}{2}\right)(1+1+0) = -c^2 + c^2 = 0$$

donc les milieux appartiennent au cercle passant par les pieds des hauteurs.

Exercice 7. *Soit* ABC *un triangle non plat,* I_A, I_B, I_C *les centres des cercles exinscrits respectivement des sommets* A, B *et* C*. Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle* $I_A I_B I_C$ *n'appartient pas au cercle circonscrit au triangle* ABC*.*

Solution de l'exercice 7 L'exercice ne semble pas très intéressant, mais c'est un bon exercice de manipulation des coordonnées barycentriques.

Soyons malin. Si on prend comme triangle de référence le triangle ABC, alors il faudra déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle $I_A I_B I_C$, ce qui risque d'être un peu long. En revanche, si on prend $I_A I_B I_C$ comme triangle de référence, on a juste à calculer l'équation du cercle circonscrit au trinagle ABC et injecter les coordonnées du centre du cercle $(I_A I_B I_C)$ dans cette équation (et espérer que ce soit pas trop moche). D'ailleurs, que représente le triangle ABC pour le triangle $I_A I_B I_C$? Il s'agit du triangle orthique ! On doit donc calculer l'équation du cercle d'Euler du triangle $I_A I_B I_C$. Un jeu d'enfant.
En prenant le triangle $I_A I_B I_C$ comme triangle de référence (les notations a, b et c se rapportent donc aux côtés de ce triangle et non aux côtés du triangle ABC), les coordonnées des points I_A, I_B et I_C sont respectivement $(1,0,0), (0,1,0)$ et $(0,0,1)$. Alors les coordonnées des points A, B et C sont respectivement $(0, S_C, S_B)$, $(S_C, 0, S_A)$ et $(S_B, S_A, 0)$. Ici, a, b, c représentent les longueurs du triangle de référence. Soient u, v et w des réels tels que l'équation du cercle (ABC) soit

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$$

On injecte dans cette équation successivement A, B et C pour obtenir le système

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & + & vS_C & + & wS_B & = & S_C S_B \\ uS_C & + & 0 & + & wS_A & = & S_C S_A \\ uS_B & + & vS_A & + & 0 & = & S_A S_B \end{array}$$

qui a pour solution $(u, v, w) = (S_A/2, S_B/2, S_C/2)$.
On injecte les coordonnées du point O dans cette équation de cercle :

$$(a^2S_A^2 + b^2S_B^2 + c^2S_C^2)(a^2S_A + b^2S_B + c^2S_C) = 2a^2b^2c^2(S_{BC} + S_{AB} + S_{CA})$$

On utilise alors les quelques formules que l'on connaît sur Conway : $a^2S_A + b^2S_B + c^2S_C = 2S^2 = 2(S_{BC} + S_{AB} + S_{CA})$ avec S le double de l'aire du triangle ABC.
On sait aussi que $a^2S_A + b^2S_B - c^2S_C = S_{AB}$ donc

$$a^2S_A^2 + b^2S_B^2 + c^2S_C^2 = a^2b^2c^2 - S_A S_B S_C$$

On déduit que $S_A S_B S_C = 0$, signifiant que le triangle $I_A I_B I_C$ est rectangle. Mais alors le triangle orthique ABC est plat, ce qui est exclu. Ceci donne le résultat.

Exercice 8. *Calculer les coordonnées du point d'intersection de la bissectrice issue du sommet* B *avec la médiatrice du segment* $[AC]$ *et vérifier que le point d'intersection est bien sur le cercle circonscrit au triangle* ABC *(redémontrer donc en barycentrique l'existence du pôle Sud).*

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Soit S le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ et de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et soient (x, y, z) ses coordonnées. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Le point S appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ donc ses coordonnées sont de la forme (t, b, c).
Les coordonnées du vecteur
$overrightarrowBC$ sont $(0, 1, -1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MS}$ sont $(x, y - 1/2, z - 1/2)$.
Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement

$$0 = a^2\left(z - \frac{1}{2} - y + \frac{1}{2}\right) - b^2x + c^2x$$

ou encore $0 = a^2(z - y) + x(c^2 - b^2)$. Cette équation est homogène, on peut donc injecter les coordonnées (t, b, c), ce qui donne $0 = a^2(c - b) + t(c - b)(c + b)$ et donc $t = -\frac{a^2}{b+c}$. Les coordonnées du point S sont donc $(-a^2, b(b + c), c(b + c))$.
On vérifie alors que le point S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC en injectant ses coordonnées dans l'équation de cercle :

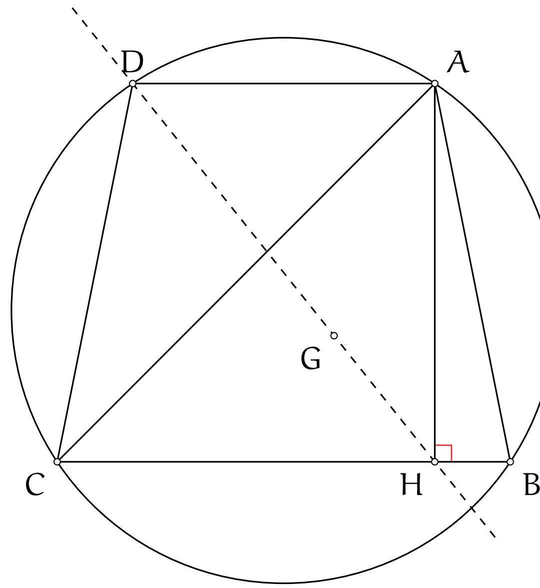
$$-a^2bc(b + c)^2 + b^2a^2c(b + c) + c^2a^2b(b + c) = a^2bc(b + c)(-(b + c) + b + c) = 0$$

ce qui achève l'existence du pôle Sud.

7.3.2 Exercices

Exercice 1. *Soit* $ABCD$ *un trapèze isocèle dont les bases sont* (AD) *et* (BC)*. Soit* H *le projeté orthogonal du sommet* A *sur le côté* $[BC]$*. Montrer que le centre gravité du triangle* ABC *appartient à la droite* (DH)*.*

Solution de l'exercice 1



Le triangle de référence est tout indiqué : choisir ABC permet d'avoir gratuitement les coordonnées du point G et du point H. Il faut calculer les coordonnées du point D. Le trapèze est isocèle donc les points A, B, C et D sont cocycliques. Le point D est donc défini comme le point d'intersection de la droite parallèle à la droite (BC) passant par le point A avec le cercle circonscrit au triangle ABC. Calculons ces coordonnées (également calculées dans le cours).
Le point D est aligné avec $P_{B,C}$ et A, avec $P_{B,C}$ le point à l'infini porté par a droite (BC), de coordonnées $(0, 1, -1)$. Ainsi, les coordonnées du point D sont de la forme $(t, 1, -1)$. Le point D appartient au cercle circonscrit au triangle ABC donc

$$-a^2 \cdot 1 \cdot (-1) - b^2 \cdot (-1) \cdot t - c^2 \cdot 1 \cdot t = 0$$

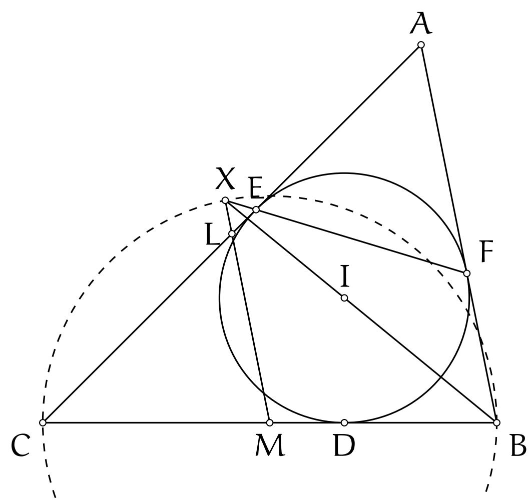
et $t = -\frac{a^2}{b^2-c^2}$ et les coordonnées du point D s'écrivent $(a^2, c^2 - b^2, b^2 - c^2)$. Il reste à vérifier l'alignement des points G, H, et D. Or

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & S_C & S_B \\ a^2 & c^2 - b^2 & b^2 - c^2 \end{vmatrix} &= S_C(b^2 - c^2) - S_B(c^2 - b^2) + a^2(S_B - S_C) \\
&= (b^2 - c^2)(S_C + S_B) + a^2(c^2 - b^2) \\
&= (b^2 - c^2)a^2 + a^2(c^2 - b^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 2. *Soit* ABC *un triangle,* I *le centre de son cercle inscrit et soient* D, E *et* F *les points de contact du cercle inscrit avec les côtés* $[BC]$, $[CA]$ *et* $[AB]$ *respectivement. Soient* M, L *et* K *les milieux des côtés* $[BC]$, $[CA]$ *et* $[AB]$. *Montrer que les droites* (BI), (EF) *et* (ML) *se coupent sur le cercle de diamètre* $[BC]$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>



On note X le point d'intersection des droites (EF) et (BI) et (x, y, z) ses coordonnées. Le Point X appartient à la droite (BI) donc ses coordonnée ssont de la forme (a, t, c). Les coordonnées des points E et F sont respectivement $(a + b - c, 0, b + c - a)$ et $(a + c - b, b + c - a, 0)$. Ainsi t vérifie :

$$0 = \begin{vmatrix} a & t & c \\ a+b-c & 0 & b+c-a \\ a+c-b & b+c-a & 0 \end{vmatrix} = t(b+c-a)(a+c-b)+(b+c-a)\left(c(a+b-c)-a(b+c-a)\right)$$

Ainsi $t = c - a$. Les coordonnées du point X sont donc $(a, a - c, c)$.
On vérifie désormais que le point X appartient à la droite (LM). Les points L et M ont pour coordonnées $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$. On doit donc calculer

$$\begin{vmatrix} a & c-a & c \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a + (c - (c - a)) = 0$$

donc les points X, L et M sont alignés. Il reste à montrer que le point X appartient au cercle de diamètre $[BC]$. On calcule pour cela son équation de cercle, qui est de la forme

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$$

Les points B et C appartiennent à ce cercle donc $v = w = 0$. Ce cercle passe également par le pied de la hauteur issue du sommet B, de coordonnées $(S_C, 0, S_A)$. On injecte ces coordonnées dans l'équation de cercle pour trouver

$$-b^2S_CS_A + uS_C(S_C + S_A) = 0$$

donc $u = S_A$. L'équation de cercle est donc

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + S_A x(x+y+z) = 0$$

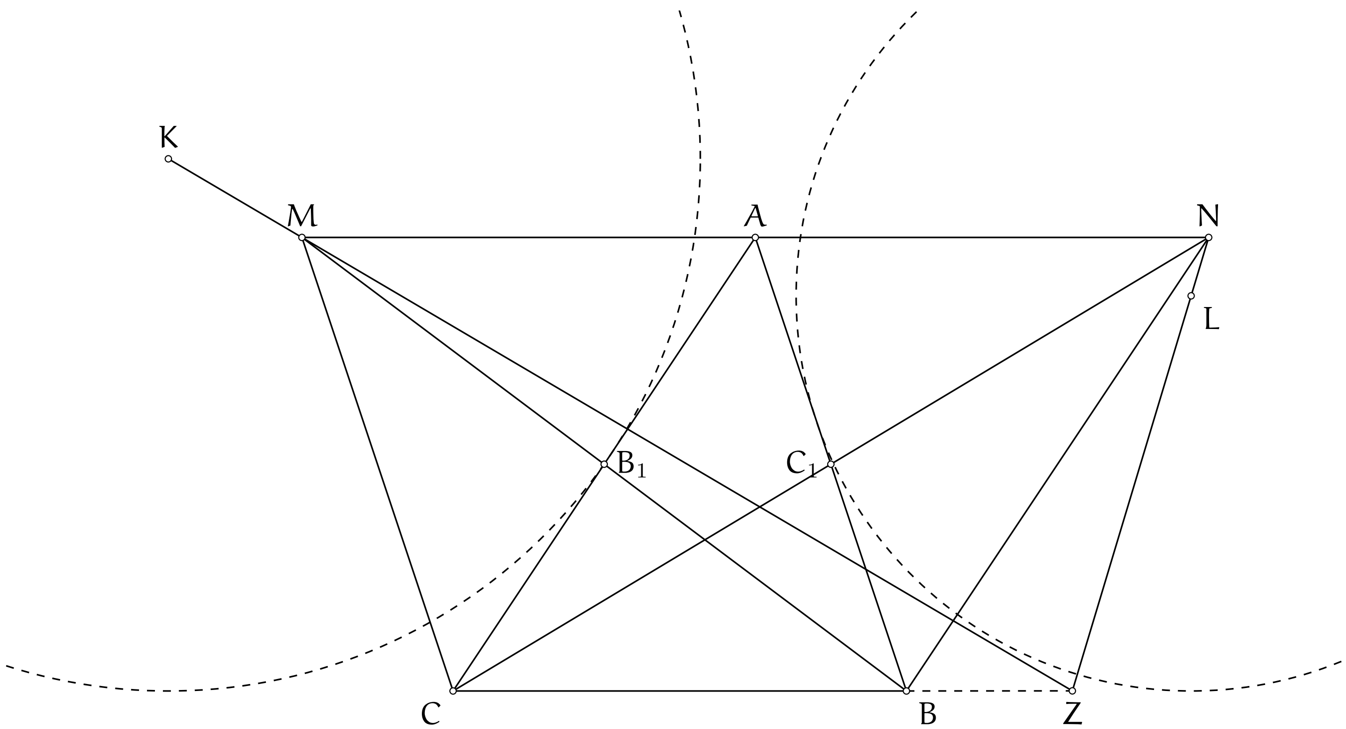
On injecte donc les coordonnées du point X dans cette équation et on vérifie que cela vaut 0 :

$$-a^2(c-a)c - b^2ac - c^2(c-a)a + S_A a(a+c-a+c) = ac(-a(c-a) - b^2 - c(c-a) + 2S_A) = 0$$

donc le point X appartient au cercle de diamètre $[BC]$.

Exercice 3. *(Belarus TST 2016 P2) Soit ABC un triangle. Soient K et L les centres des cercles $B-$ et $C-$exinscrits respectivement. Soient B_1 et C_1 les milieux des côtés $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Soient M et N les symétriques respectifs des points B et C par rapports aux points B_1 et C_1. Montrer que les droites (KM) et (LN) se coupent sur la droite (BC).*

Solution de l'exercice 3



On dispose déjà des coordonnées barycentriques des points K et L, qui sont respectivement $(a, -b, c)$ et $(a, b, -c)$.
Le point M est tel que le quadrilatère $ABCM$ est un parallèlogramme, il est donc le point d'intersection de la parallèle à la droite (BC) passant par le point A et de la parallèle à la droite (AB) passant par le point C.
Puisqu'il appartient à la première parallèle, il est aligné avec les points A et $P_{B,C}$ avec $P_{B,C}$ le point à l'infini porté par la droite (BC), qui a pour coordonnées $(0, 1, -1)$. Ses coordonnées sont donc de la forme $(t, 1, -1)$. Il appartient à la droite $(CP_{A,B})$ donc ses coordonnées sont de la forme $(-1, 1, t')$. Ainsi, les coordonnées du point M sont $(-1, 1, -1)$, ou encore $(1, -1, 1)$. De même les coordonnées du point N sont $(1, 1, -1)$.

Soit Z le point d'intersection des droites (KM) et (BC) et soient (x, y, z) ses coordonnées. Puisque le point Z est sur la droite (BC), $x = 0$. Puisqu'il appartient à la droite (KM), on a

$$0 = \begin{vmatrix} a & -b & c \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & y & z \end{vmatrix} = cy + bz - az - ay$$

Les coordonnées du point Z sont donc $(0, a - b, c - a)$.

Soit Z' le point d'intersection des droites (NL) et (BC) et soit $(0, y, z)$ ses coordonnées. Puisqu'il est aligné avec les points N et L :

$$0 = \begin{vmatrix} a & b & -c \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & y & z \end{vmatrix} = -cy - bz + az + ay$$

et les coordonnées du point Z' sont également $(0, a-b, c-a)$. Ainsi $Z = Z'$, ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 4. *(G1 ELMO 2014) Soit* ABC *un triangle et* K *son point de Lemoine, c'est-à-dire le point d'intersection des symmédianes. Soit* A_1 *le point de la droite* (BC) *tel que les droites* $(AB), (AC), (A_1K)$ *et* (BC) *forment un quadrilatère cyclique. On définit les points* B_1 *et* C_1 *de manière simillaire. Montrer que les points* A_1, B_1 *et* C_1 *sont alignés.*

<u>Solution de l'exercice 4</u> On n'a pas d'idée de comment construire une figure exacte et le point K n'est bien connu qu'en barycentrique. On se précipite donc vers cette méthode qui ne semble pas trop douloureuse. On se contente de calculer les coordonnées du point A_1. Comme d'habitude, le triangle de référence est le triangle ABC. On note D et E les points d'intersection de la droite (A_1K) avec les segments $[AB]$ et $[AC]$. Le point D a pour coordonnées $(t, 1-t, 0)$ et on cherche à déterminer t. On note également $(s, 0, 1-s)$ les coordonnées du point E. Le cercle circonscrit au triangle DBC a pour équation

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + ux(x+y+z) = 0$$

puisqu'il passe par les points B et C. Puisque le point D appartient à ce cercle, $-c^2t(1-t)+ut = 0$ donc $u = c^2(1-t)$. Puisque le point E appartient aussi à ce cercle, on a

$$-b^2s(1-s) + c^2(1-t)s = 0$$

soit $1-s = \frac{c^2}{b^2}(1-t)$ et $s = \frac{b^2-c^2(1-t)}{b^2}$.
Puisque les points D, E et K sont alignés, sachant que le point K a pour coordonnées (a^2, b^2, c^2),

$$0 = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ t & 1-t & 0 \\ s & 0 & 1-s \end{vmatrix} = -s(1-t)c^2 + (1-s)(a^2(1-t) - tb^2)$$

soit, en simplifiant par $1-t$ et en utilisant les expressions de $1-s$ et de s :

$$0 = -sc^2 + \frac{c^2}{b^2}(a^2(1-t) - tb^2) = \frac{c^2}{b^2}(-b^2 + c^2(1-t) + a^2(1-t) - tb^2)$$

et $t = \frac{2S_B}{a^2+b^2+c^2}$. Finalement, le point D a pour coordonnées $(S_B, b^2, 0)$. Le point E a pour coordonnées $(S_C, 0, c^2)$.
On peut désormais calculer les coordonnées du point A_1, qui sont de la forme $(0, y, z)$ puisqu'il appartient à la droite (BC). On a

$$0 = \begin{vmatrix} S_B & b^2 & 0 \\ S_C & 0 & c^2 \\ 0 & y & z \end{vmatrix} = -yc^2S_B - zb^2S_C$$

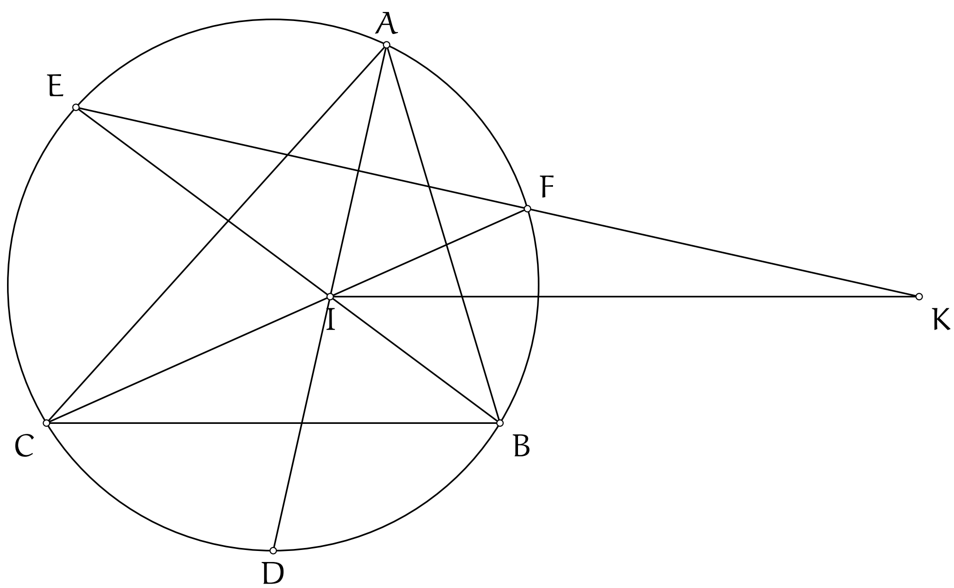
donc les coordonnées du point A_1 sont $(0, -b^2S_C, c^2S_B)$. On obtient de même les coordonnées des points B_1 et C_1. Il nous reste donc à vérifier que

$$\begin{vmatrix} 0 & -b^2S_C & c^2S_B \\ a^2S_C & 0 & -c^2S_A \\ -a^2S_B & b^2S_A & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui est vrai puisque le déterminant vaut $a^2b^2c^2S_AS_BS_C - a^2b^2c^2S_AS_BS_C$. Les points sont donc bien alignés.

Exercice 5. *(G4 BMO 2015) Soit* ABC *un triangle et soit* I *le centre de son cercle inscrit. Soient* D, E *et* F *les points d'intersection respectifs des droites* $(AI), (BI)$ *et* (CI) *avec le cercle circonscrit au triangle* ABC*. La droite parallèle à la droite* (BC) *passant par le point* I *coupe la droite* (EF) *au point* K*. On définit les points* L *et* M *de manière similaire. Montrer que les points* K, L *et* M *sont alignés.*

Solution de l'exercice 5



Le problème est centré autour d'un triangle de référence et fait intervenir des points d'intersection de droites. On peut donc vouloir l'aborder en nombres complexes ou en barycentrique. Cependant, comme les droites ne concernent pas toutes des points du cercle unité, on va privilégier la méthode barycentrique.
On va calculer les coordonnées du points K. Mais tout d'abord, on calcule les coordonnées des points D, E et F. Le point D appartient à la droite (AI), donc ses coordonnées sont de la forme (t, b, c), avec t un réel à déterminer. Comme le point D appartient au cercle circonscrit au triangle ABC, on a

$$a^2bc + b^2ct + c^2bt = 0$$

soit $t = -\frac{a^2}{b+c}$. Finalement, on trouve $D : (-a^2, b^2 + bc, c^2 + bc)$, $E : (a^2 + ac, -b^2, c^2 + ac)$ et $F : (a^2 + ab, b^2 + ab, -c^2)$.
On détermine désormais les coordonnées du point K, notée (x, y, z). Le point K appartient à la droite (EF) donc

$$0 = \begin{vmatrix} a^2 + ac & -b^2 & c^2 + ac \\ a^2 + ab & b^2 + ab & -c^2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = a(a + b + c)\,(yc(a + c) + zb(a + b) - bcx)$$

ce qui donne pour équation $bcx = yc(a + c) + zb(a + b)$.
Le point K appartient aussi à la droite parallèle au côté $[BC]$ passant par le point I, donc le point K est aligné avec le point I et le point $P_{(B,C)}$, le point à l'infini dans la direction de la droite (BC), de coordonnées $(0, -1, 1)$. Ceci se réécrit

$$0 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = x(b+c) - a(y+z)$$

En posant $x = 1$ dans chacune des deux équations, on obtient un système de deux équations à deux inconnus. On trouve alors $y = -\frac{b^2}{a(c-b)}$ et $z = \frac{c^2}{a(c-b)}$. Les coordonnées du point K sont donc $K : (a(c-b), -b^2, c^2)$. De même, on trouve $L : (a^2, b(a-c), c^2)$ et $M : (-a^2, b^2, c(b-a))$.
Il reste à montrer que les points sont alignés, c'est-à-dire que :

$$0 = \begin{vmatrix} a(c-b) & -b^2 & c^2 \\ a^2 & b(a-c) & -c^2 \\ -a^2 & b^2 & c(b-a) \end{vmatrix}$$

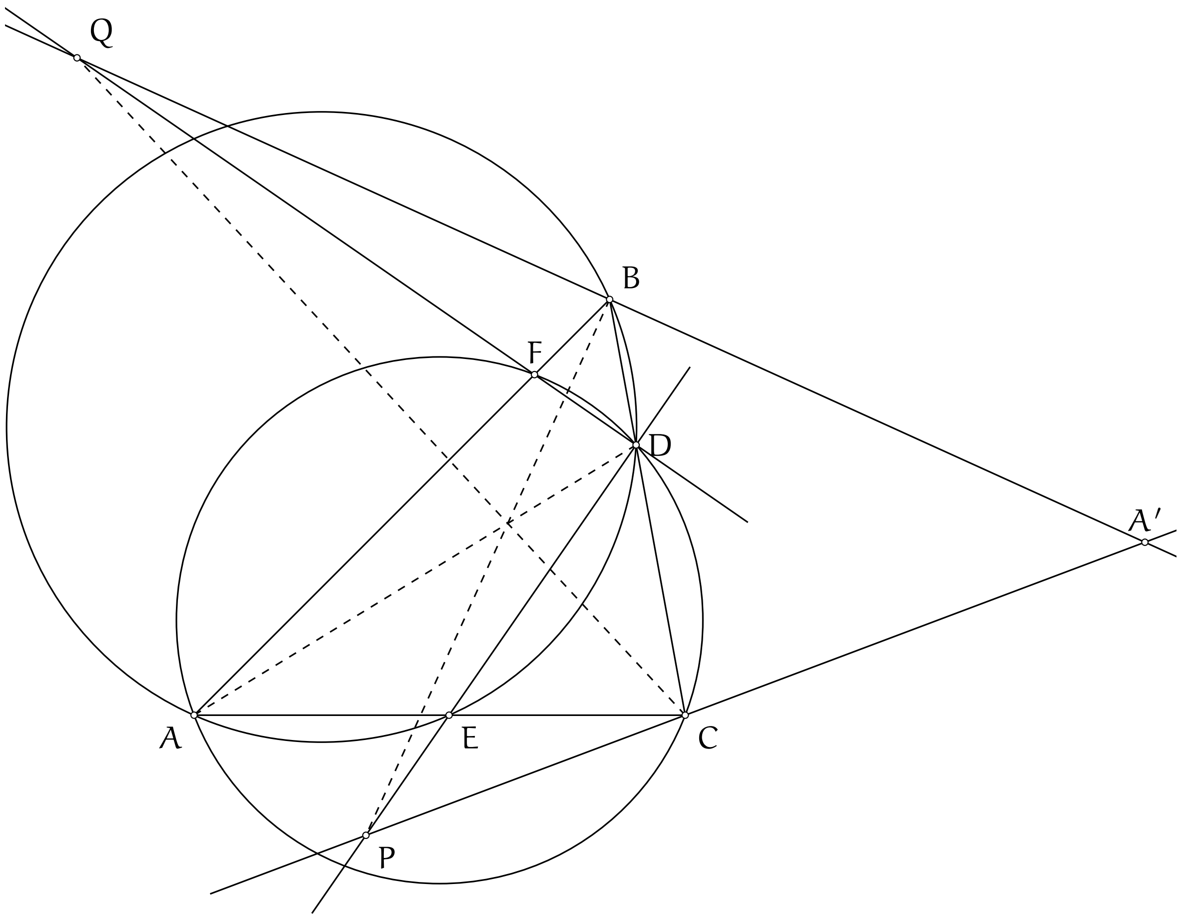
Pour cela, on peut commencer factoriser la première colonne par a, la deuxième par b et la troisième par c, de telle sorte qu'il suffit de montrer que

$$0 = \begin{vmatrix} (c-b) & -b & c \\ a & (a-c) & -c \\ -a & b & (b-a) \end{vmatrix}$$

On note alors L_1, L_2 et L_3 les lignes (en commençant par le haut).
On remarque que $L_1 = -\frac{b}{a}L_2 - \frac{c}{a}L_3$. La première ligne est combinaison linéaire des deux autres, le déterminant est donc nul et les points K, L et M sont alignés.

Exercice 6. *(RMM 2016 P1) Soit* ABC *un triangle et soit* A' *le symétrique du point* A *par rapport au segment* $[BC]$*. Soit* D *un point du segment* $[BC]$ *différent des points* B *et* C*. Le cercle circonscrit au triangle* ABD *recoupe le segment* $[AC]$ *en un point* E*. Le cercle circonscrit au triangle* ACD *recoupe le segment* $[AB]$ *en un point* F*. Les droites* $(A'C)$ *et* (DE) *se coupent en un point* P *et les droites* $(A'B)$ *et* (DF) *se coupent en un point* Q*. Montrer que les droites* $(AD), (BP)$ *et* (CQ) *sont concourrantes ou parallèles.*

Solution de l'exercice 6



Des cercles qui passent par les sommets du triangle ABC, des droites dans tous les sens, on est bien dans une configuration tentante en coordonnées barycentriques.
On choisit naturellement ABC comme triangle de référence et on pose $(0, d, 1-d)$ les coordonnées du point D.
Le cercle circonscrit au triangle ABD passe par les sommets A et B donc son équation est de la forme

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + wz(x+y+z) = 0$$

Le point D appartient à ce cercle donc $-a^2d(1-d) + w(1-d) = 0$ ou encore $w = a^2d$.
Le point E a ses coordonnées de la forme $(e, 0, 1-e)$. Il appartient au même cercle donc $0 = -b^2e(1-e) + a^2d(1-e)$ et $e = \frac{a^2}{b^2}d$. Les coordonnées du point E sont donc $(a^2d, 0, b^2 - a^2d)$.

Les calculs pour le point F sont complétement symétriques, si bien que les coordonnées du point F sont $(a^2(1-d), c^2-a^2(1-d), 0)$.
Avant d'avoir les coordonnées des points P et Q, on va devoir calculer les coordonnées du point A'.
Le point A' appartient à la hauteur issue du sommet A donc ses coordonnées sont de la forme (t, S_C, S_B) avec t un paramètre réel. On utilise ensuite la formule des aires : les aires orientées des triangles ABC et $A'BC$ sont opposées. On homogénéise les coordonnées du point A' en divisant par la somme et alors :

$$-1 = \begin{vmatrix} \frac{t}{a^2+t} & \frac{S_C}{a^2+t} & \frac{S_B}{a^2+t} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{t}{a^2+t}$$

donc $t = -\frac{a^2}{2}$. Les coordonnées du point A' sont donc $\left(-\frac{a^2}{2}, S_C, S_B\right)$.

On peut désormais calculer les coordonnées du point P. Celui-ci appartient à la cévienne $(A'C)$, ses coordonnées sont donc de la forme $\left(-\frac{a^2}{2}, S_C, t\right)$ avec t un paramètre réel. Les points P, D et E sont alignés donc

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & d & 1-d \\ a^2d & 0 & b^2-a^2d \\ -\frac{a^2}{2} & S_C & t \end{vmatrix} = -\frac{a^2}{2}d(b^2-a^2d) + S_C a^2 d(1-d) - ta^2d^2$$

On simplifie par a^2d pour trouver que $t = \frac{a^2-c^2}{2d} + d\frac{c^2-b^2}{2d}$. Les coordonnées du point P sont donc $(-da^2, d(a^2+b^2-c^2), a^2-c^2+d(c^2-b^2))$. Les calculs symétriques donnent que les coordonnées du point Q sont $(-(1-d)a^2, a^2-b^2+(1-d)(b^2-c^2), (1-d)(a^2+c^2-b^2))$. Heureusement qu'il n'y a pas de coordonnées supplémentaires à calculer, les expressions deviennt longues. On conclut désormais dans le cas où les droites (BP) et (CQ) se coupent (le cas parallèle se traite de la même façon).

Soit X le point d'intersection et (x, y, z) ses coordonnées. Le point X appartient à la droite (BP) donc ses coordonnées sont de la forme $(-da^2, t, a^2-c^2+d(c^2-b^2))$. Il appartient à la droite (CQ) donc ses coordonnées sont de la forme $(-(1-d)a^2, a^2-b^2+(1-d)(b^2-c^2), t')$. En utilisant que la première coordonnée est multiple de $-a^2$, on déduit que les coordonnées du point X sont $(-a^2, \frac{a^2-b^2}{1-d}+(b^2-c^2), \frac{a^2-c^2}{d}+(c^2-b^2))$. Il reste alors à vérifier que le point X appartient à la droite (AD). Or

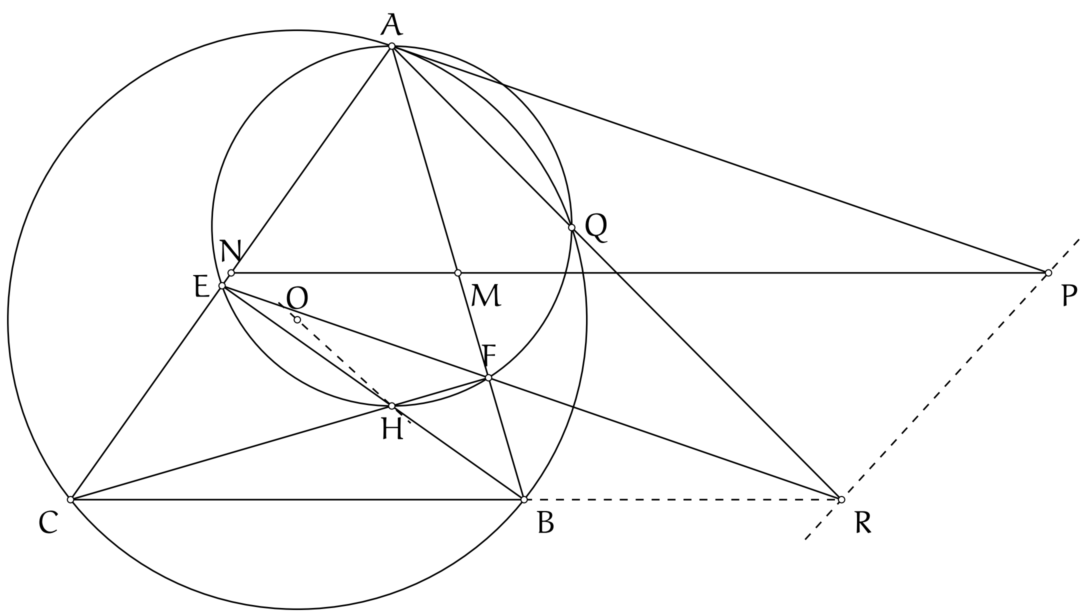
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 1-d \\ -a^2 & \frac{a^2-b^2}{1-d}+(b^2-c^2) & \frac{a^2-c^2}{d}+(c^2-b^2) \end{vmatrix} = a^2-c^2+d(c^2-b^2))-(a^2-b^2+(1-d)(b^2-c^2)) = 0$$

ce qui conclut l'exercice.

7.4 Exercices

Exercice 1. *(USA TSTST 2017 P1) Soit* ABC *un triangle tel que* $AB \neq AC$ *et* $\widehat{BAC} \neq 90°$. *Soient* M *et* N *les milieux des segment* $[AB]$ *et* $[AC]$. *Soient* E *et* F *les pieds respectifs des hauteurs issues des sommets* B *et* C. *Soit* O *le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC *et soit* H *l'orthocentre du triangle* ABC. *La tangente au cercle circonscrit au triangle* ABC *en* A *coupe la droite* (MN) *en un point* P. *Soit* Q *le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles* ABC *et* AEF. *Les droites* (EF) *et* (AQ) *se coupent au point* R. *Montrer que les droites* (OH) *et* (PR) *sont perpendiculaires.*

Solution de l'exercice 1



Une première remarque est que les points B, C et R semblent alignés. On peut le démontrer soit en utilisant un lemme sur le point de Miquel, soit en remarquant que les points B, C, E et F sont cocycliques et donc les axes radicaux des cercles circonscrits aux triangles ABC, AEF et BCE sont concourants.

On a donc supprimé le point Q de la figure. Pour la suite, étant donné que tous les points sont des points particuliers et que la figure est centrée autour d'un triangle de référence, on peut tenter de résoudre le problème en complexe ou en barycentrique. Il se trouve que les deux méthodes fonctionnent sans trop d'anicroche. On présente ici la méthode barycentrique, qui est la moins douloureuse :
On fixe ABC comme triangle de référence. On dispose alors des coordonnées suivantes : N : $(1,0,1)$, M : $(1,1,0)$, E : $(S_C, 0, S_A)$ et F : $(S_B, S_A, 0)$. Soient (x,y,z) les coordonnées du point R. Le point R appartient à la droite (BC) donc $x = 0$. Il est aligné avec les points E et F donc

$$0 = \begin{vmatrix} S_C & 0 & S_A \\ S_B & S_A & 0 \\ 0 & y & z \end{vmatrix} = yS_AS_B + zS_AS_C$$

Les coordonnées du point R sont donc $(0, S_C, -S_B)$. Pour montrer que les droites (PR) et (OH) sont perpendiculaires, on aura besoin du vecteur $\overrightarrow{PR}$, donc homogénéise dès maintenant. Les coordonnées homogènes du point R sont $\left(0, \frac{S_C}{b^2-c^2}, -\frac{S_B}{b^2-c^2}\right)$.

Le point P, dont on note (x, y, z) les coordonnées, appartient à la tangente au cercle circonscrit au triangle ABC, on a donc $b^2z + c^2y = 0$. Il est aligné avec les points M et N donc

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = x - y - z$$

Ceci nous donne une deuxième équation. Si on fixe $x = 1$, la première équation nous donne $z = -\frac{c^2}{b^2}y$ et la deuxième nous donné $y + z = 1 = y\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)$ donc $y = \frac{b^2}{b^2 - c^2}$. Les coordonnées du point P sont donc $(b^2 - c^2, b^2, -c^2)$ ou encore, après homogénéisation, $\left(\frac{1}{2}, \frac{b^2}{2(b^2-c^2)}, -\frac{c^2}{2(b^2-c^2)}\right)$. Le vecteur $\overrightarrow{PR}$ a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, -\frac{a^2-c^2}{2(b^2-c^2)}, \frac{a^2-b^2}{2(b^2-c^2)}\right)$. On peut se débrasser des fractions et considérer le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(b^2 - c^2, c^2 - a^2, b^2 - a^2)$, colinéaire au vecteur $\vec{PR}$. On doit vérifier que ce vecteur est orthogonal au vecteur $\vec{OH}$. Pas question de calculer ses coordonnées. On sait qu'en complexes, le point H a pour affixe $a + b + c$. Cela se traduit en termes de vecteurs par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. On calcule alors

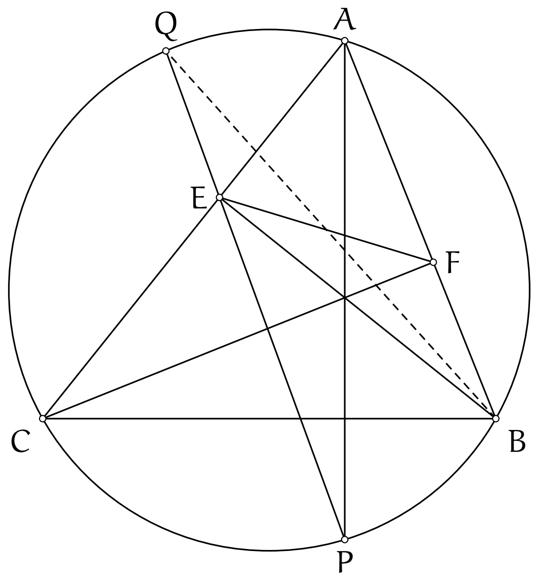
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{u} &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot ((b^2 - c^2)\overrightarrow{OA} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{OB} + (a^2 - b^2)\overrightarrow{OC}) \\
&= a^2((c^2 - a^2) + (a^2 - b^2)) + b^2((b^2 - c^2) + (a^2 - b^2)) + c^2((c^2 - a^2) + (b^2 - c^2)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qui conclut le problème.

On remarque que vouloir se jeter dans une solution analytique nous a fait manquer la solution en une ligne : la droite (PR) est l'axe radical du cercle circonscrit au triangle ABC et de son cercle d'Euler, elle est donc perpendiculaire à la droite d'Euler.

Exercice 2. *(G1 ELMO 2019) Soit* ABC *un triangle,* E *et* F *les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets* B *et* C*. Soit* P *le point d'intersection de la hauteur issue du sommet* A *avec le cercle circonscrit au triangle* ABC*. La droite* (PE) *recoupe le cercle circonscrit au triangle* ABC *en un point* Q*. Montrer que la droite* (BQ) *coupe le segment* $[EF]$ *en son milieu.*

Solution de l'exercice 2   On commence par tracer une figure



Cet exercice peut se faire tout aussi bien "à la régulière", mais il est intéressant de constater qu'il y a peu de points, que tout est centré autour d'un triangle et que la plupart des points sont bien connus. On peut essayer avec les nombres complexes ou avec les coordonnées barycentriques. On présente ici la méthode barycentrique et on vous laisse essayer la méthode complexe pour que vous vous fassiez une idée de si c'est une méthode raisonnable ou pas.

Il va falloir ruser pour la méthode barycentrique. En effet, il est très douloureux de calculer les coordonnées du point Q comme second point d'intersection d'une droite qui n'est pas une cévienne avec le cercle circonscrit. On va donc procéder dans le sens inverse : on calcule les coordonnées du point Q' comme point d'intersection du cercle circonscrit au triangle ABC et de la droite passant par le sommet B et le milieu du segment $[EF]$. Puis on montrera que les points P, E et Q' sont alignés, donnant que $Q = Q'$ et donc le résultat.

On fixe comme triangle de référence le triangle ABC. Le point P appartient à la droite (AD), où le point D est le pied de la hauteur issue du sommet A. Le point P a ses coordonnées de la forme (t, S_C, S_B). Puisqu'il appartient au cercle circonscrit au triangle ABC, on

$$-a^2S_BS_C - t(b^2S_B + c^2S_C) = 0$$

soit $t = -\dfrac{a^2S_BS_C}{b^2S_B + c^2S_C}$.

On calcule les coordonnées du milieu du segment $[EF]$. Pour cela, on utilise le fait que les triangles AEF et ABC sont semblables donc que les milieux des segments $[EF]$ et $[BC]$ apprtiennent à deux droites conjuguées isogonales. Ainsi, le milieu du segment $[EF]$ est sur la symmédiane du triangle ABC issu du sommet A. Ses coordonnées sont de la forme (s, b^2, c^2). Puisqu'il est aligné avec les points E et F on a

$$0 = \begin{vmatrix} S_C & 0 & S_A \\ S_B & S_A & 0 \\ s & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = -sS_A^2 + b^2S_BS_A + c^2S_CS_A$$

Les coordonnées du milieu du segment $[EF]$ sont donc $(b^2S_B + c^2S_C, b^2S_A, c^2S_A)$. On déduit les coordonnées du point Q'. Celui-ci appartient à la droite passant par le milieu du segment $[EF]$ et le point B donc ses coordonnées sont de la forme $(b^2S_B + c^2S_C, r, c^2S_A)$. Il appartient également au cercle circonscrit au triangle ABC donc

$$-a^2c^2S_Ar - b^2c^2S_A(b^2S_b + c^2S_C) - c^2r(b^2S_B + c^2S_C) = 0$$

soit $r = -\dfrac{b^2S_A(b^2S_B + c^2S_C)}{2S^2}$ avec $S^2 = \frac{1}{2}(a^2S_A + b^2S_B + c^2S_C)$.

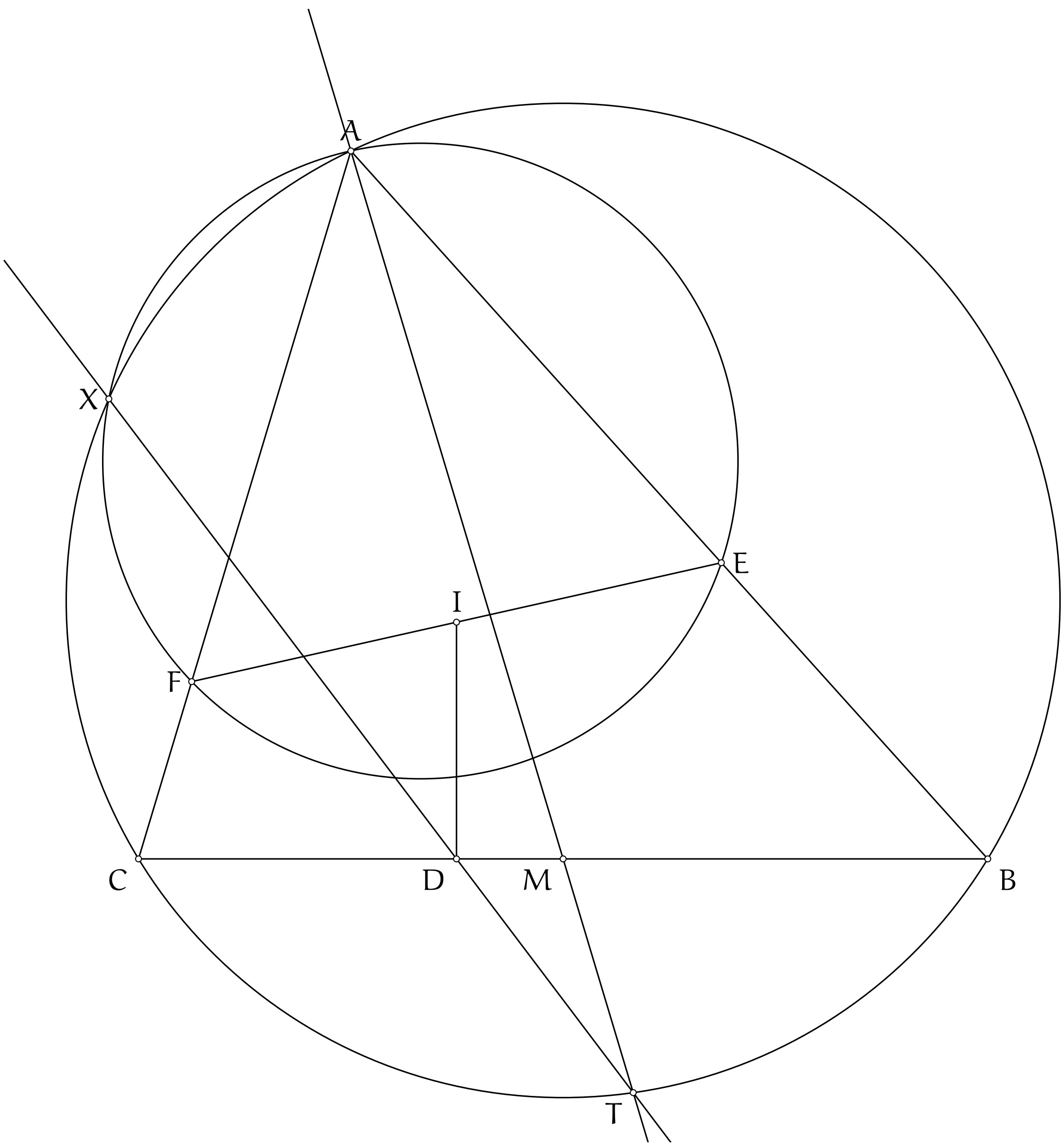
Il reste à démontrer que les points Q', P et E sont alignés. Or en développant selon la dernière ligne on a :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b^2S_B + c^2S_C & r & c^2S_A \\ S_C & 0 & S_A \\ t & S_C & S_B \end{vmatrix} &= (b^2S_B + c^2S_C)S_CS_A + t(S_CS_B - rS_A) - c^2S_CS_A \\ &= b^S_AS_BS_C + \tfrac{b^2S_B+c^2S_C}{2S^2}b^2S_A\left(S_CS_B + \tfrac{a^2S_AS_BS_C}{b^2S_B+c^2S_C}\right) \\ &= b^2S_AS_BS_C\left(1 - \tfrac{b^2S_B+c^2S_C}{2S^2}\left(1 + \tfrac{a^2S_A}{b^2S_B+c^2S_C}\right)\right) \\ &= b^2S_AS_BS_C\left(1 - \tfrac{b^2S_B+c^2S_C}{2S^2} \cdot \tfrac{2S^2}{b^2S_B+c^2S_C}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 3. *(G2 IMO 2016) Soit* ABC *un triangle,* I *le centre de son cercle inscrit et* Γ *sont cercle circonscrit. Soit* M *le milieu du segment* $[BC]$*. Soit* D *le projeté orthogonal du point* I *sur le segment* $[BC]$*. La perpendiculaire à la droite* (AI) *passant par le point* I *coupe le segment* $[AB]$ *en un point* E *et le segment* $[AC]$ *en un point* F*. Soit* X *le second point d'intersection des cercles circonscrits aux traingles* ABC *et* AEF*. Montrer que les droites* (XD) *et* (AM) *se coupent sur le cercle* Γ*.*

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>



On peut vouloir tenter une approche avec les nombres complexes, mais pour avoir essayé, tout est calculable mais la fin de l'exercice consiste à faire des calculs un peu tros gros pour être raisonnables.
Nous allons plutôt noter T le point d'intersection de la médiane issue du sommet A et du cercle Γ et D' le point d'intersection des droites (XT) et (BC).

Nous savons que le point D vérifie $\frac{DB}{DC} = \frac{r}{\tan \beta/2} \cdot \frac{\tan \gamma/2}{r} = \frac{\tan \gamma/2}{\tan \beta/2}$ avec r le rayon du cercle inscrit du triangle ABC et β et γ les angles en B et C.
Il suffit donc de montrer que le point D' vérifie lui aussi $\frac{D'B}{D'C} = \frac{\tan \gamma/2}{\tan \beta/2}$.

Comment calculer le rapport $\frac{D'B}{D'C}$. La loi des sinus dans les triangles CXB et CTB semble une bonne option. On a :

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{XD'\frac{\sin \widehat{D'XB}}{\sin \widehat{XBC}}}{XD'\frac{\sin \widehat{D'XC}}{\sin \widehat{BCX}}} = \frac{\sin \widehat{D'XB}}{\sin \widehat{D'XC}} \cdot \frac{\sin \widehat{BCX}}{\sin \widehat{XBC}} = \frac{\sin \widehat{TCB}}{\sin \widehat{TBC}} \cdot \frac{XB}{XC} = \frac{TB}{TC} \cdot \frac{XB}{XC}$$

Cette petite gymnastique nous donne de la même façon

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{TB}{TC}$$

et donc $\frac{TB}{TC} = \frac{AC}{AB}$. On trouve ainsi

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{XB}{XC}$$

On doit donc désormais calculer $\frac{XB}{XC}$. Or on sait que le point X est par définition le centre de la similitude envoyant E sur B et F sur C. On a donc

$$\frac{XB}{XC} = \frac{EB}{FC}$$

On s'est débarassé du point X, preuve que l'on avance. On calcule désormais $\frac{EB}{FC}$. Notons que $\widehat{EIB} = \widehat{AIB} - 90° = 90° - \alpha/2 - \beta/2 = \gamma/2$. De même, $\widehat{FIC} = \beta/2$. Ainsi, d'après la loi des sinus dans les triangles IEB et IFC :

$$\frac{EB}{FC} = \frac{IE \cdot \frac{\sin \widehat{EIB}}{\sin \beta/2}}{IF \cdot \frac{\sin \widehat{FIC}}{\sin \gamma/2}} = \frac{\sin^2 \gamma/2}{\sin^2 \beta/2}$$

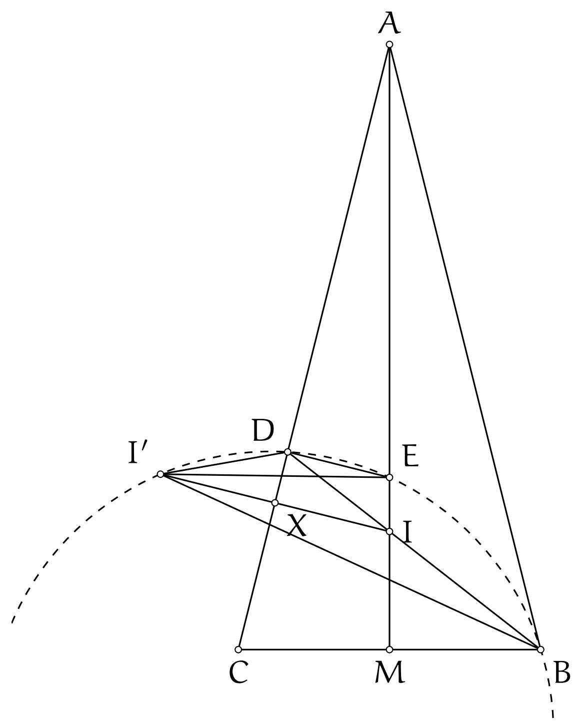
On a donc

$$\begin{aligned} \frac{AC}{AB} \cdot \frac{EB}{FC} &= \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin^2 \gamma/2}{\sin^2 \beta/2} \\ &= \frac{\sin \gamma/2}{2\cos \gamma/2} \cdot \frac{2\cos \beta/2}{\sin \beta/2} \\ &= \frac{\tan \gamma/2}{\tan \beta/2} \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 4. *(IMOSL 2016 G4) Soit* ABC *un triangle isocèle au point* A. *Soit* I *le centre de son cercle inscrit. La droite* (BI) *recoupe la droite* (AC) *au point* D *et la droite perpendiculaire à la droite* (AC) *passant par* D *coupe la droite* (AI) *au point* E. *Montrer que le symétrique du point* I *par rapport à la droite* (AC) *appartient au cercle circonscrit au triangle* BDE.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>



On note I' le symétrique du point I par rapport à la droite (AC).
On commence par effecteur des remarques d'ordre géométriques.
Tout d'abord, puisque les droites (DE) et $(I'I)$ sont parallèles, $\widehat{I'DE} = 180° - \widehat{DI'I} = \widehat{I'IB}$. Si les points I', D, E et B sont cocycliques, on a de plus $\widehat{I'IB} = \widehat{I'BD} = \widehat{I'ED}$ donc les triangles $I'DE$ et $I'IB$ sont semblables. Réciproquement, il suffit de montrer que ces triangles sont semblables pour résoudre l'exercice.
Puisqu'on a déjà $\widehat{I'DE} = \widehat{I'IB}$, il suffit d'avoir $\frac{I'D}{DE} = \frac{I'I}{IB}$. Il y a peu de points et il s'agit de calculer des longueurs, on peut tenter de faire du length/trigo bashing. Il n'y a qu'un degré de liberté, on s'attend donc à tout exprimer en fonction d'un paramètre.

On pose X le milieu du segment $[I'I]$ et M le milieu du segment $[BC]$. Les triangles XIA et MCA sont semblables donc

$$\frac{I'I}{IB} = \frac{2IX}{IB} = 2\frac{AI\frac{MC}{AC}}{IB}$$

D'après le théorème de la bissectrice, $\frac{AI}{AC} = \frac{IM}{MC} = \tan\beta/2$, avec $\beta = \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$. On a trouvé notre paramètre, il sujet de l'angle β. Par ailleurs, $\frac{MC}{IB} = \frac{MB}{IB} = \cos\beta/2$. Ainsi

$$\frac{I'I}{IB} = 2\tan\beta/2 \cdot \cos\beta/2 = 2\sin\beta/2$$

D'autre part, toujours par le théorème de la bissectrice :

$$\frac{I'D}{DE} = \frac{ID}{DE} = \frac{IB \cdot \frac{AD}{AB}}{DE} = \frac{IB}{AB} \cdot \frac{AD}{DE}$$

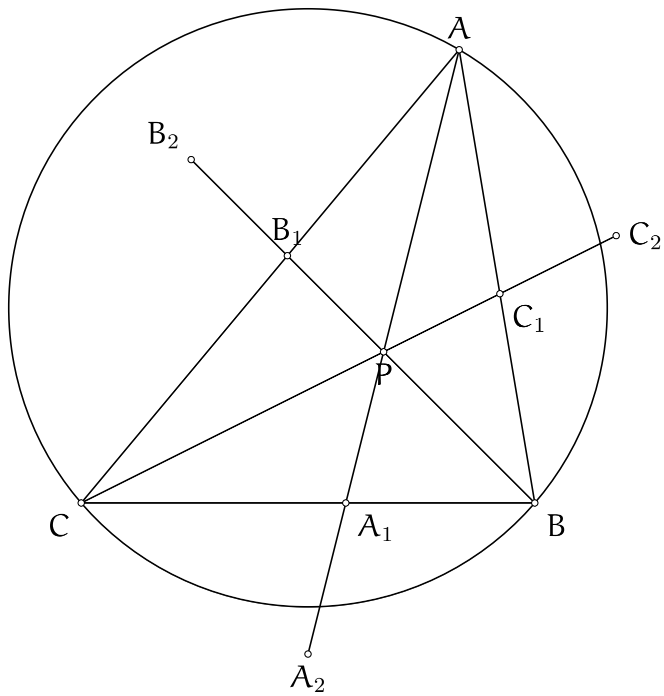
Les triangles ADE et AMC sont semblables donc $\frac{AD}{DE} = \frac{AM}{MC}$. On a donc

$$\frac{I'D}{DE} = \frac{IB}{AB} \cdot \frac{AM}{MC} = \frac{IB}{MB} \cdot \frac{AM}{AB} = \frac{1}{\cos \beta/2} \cdot \sin \beta$$

Puisque l'on a bien $2 \sin \beta/2 = \frac{1}{\cos \beta/2} \cdot \sin \beta$, on a bien l'égalité désirée, donc les points I', D, E et B sont cocycliques.

Exercice 5. *(G4 IMO 2019) Soit* ABC *un triangle et soit* P *un point situé à l'intérieur du triangle* ABC. *Soit* A_1 *le point d'intersection des droites* (AP) *et* (BC) *et soit* A_2 *le symétrique du point* P *par rapport au point* A_1. *Les points* B_1, B_2, C_1 *et* C_2 *sont définis de manière similaire. Démontrer que l'un au moins des trois segments* $[PA_2], [PB_2]$ *et* $[PC_2]$ *a un point commun avec le cercle circonscrit au triangle* ABC.

Solution de l'exercice 5



L'énoncé se reformule de la façon suivante : il faut démontrer que l'un des trois points A_2, B_2 et C_2 se situe en dehors du cercle circonscrit au triangle ABC. Cette forme incite à utiliser la géométrie analytique.

Mais quel système choisir ? On peut essyaer les coordonnées complexes, puisque le point varie dans le plan. Après calcul de l'affixe du point A_2, on se rend compte que démontrer que l'un des complexes a_2, b_2 et c_2 est de module supérieur à 1 risque d'être douloureux.

On peut donc essayer les coordonnées barycentriques ! En choisissant le triangle ABC comme triangle de référence, la condition se réécrit alors de la façon suivante : l'un des points A_2, B_2 et C_2 a ses coordonnées qui vérifient

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy > 0$$

Soient (u, v, w) les coordonnées du point P. Notons que puisque le point P est à l'intérieur du triangle ABC, on peut supposer que les coordonnées du point P sont toutes strictement positives.
Le point A_1 appartient à la droite (AP) donc ses coordonnées sont de la forme (t, v, w) et il appartient à la droite (BC) donc sa première coordonnée est nulle. Les coordonnées du point A_1 sont donc $(0, v, w)$. On calcule désormais les coordonnées du point A_2. Celui-ci appartient à la droite (AP) donc ses coordonnées sont de la forme (t, v, w). Il vérifier également $\overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{A_1P}$, ou encore

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA_2})$$

où O est un point quelconque. On peut réécrire cela comme

$$\overrightarrow{OA_2} = 2\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OP}$$

En utilisant que les coordonnées homogènes (x, y, z) d'un point X correspondent au triplet de somme 1 satisfaisant $\overrightarrow{OX} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, on réécrit cela comme

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{OA_2} & = & -\frac{u}{u+v+w}\overrightarrow{OA} + \left(2\frac{v}{v+w} - \frac{v}{u+v+w}\right)\overrightarrow{OB} + \left(2\frac{w}{v+w} - \frac{w}{u+v+w}\right)\overrightarrow{OC} \\ & = & -\frac{u}{u+v+w}\overrightarrow{OA} + \frac{v(2u+v+w)}{(v+w)(u+v+w)}\overrightarrow{OB} + \frac{w(2u+v+w)}{(v+w)(u+v+w)}\overrightarrow{OC} \end{array}$$

Les coordonnées du point A_2 sont donc

$$\left(-\frac{u}{u+v+w}, \frac{v(2u+v+w)}{(v+w)(u+v+w)}, \frac{w(2u+v+w)}{(v+w)(u+v+w)}\right)$$

ou encore

$$(-u(v+w), v(2u+v+w), w(2u+v+w))$$

Si on suppose désormais que le point A_2 est à l'intérieur du cercle circonscrit au triangle ABC, on a, en injectant ces coordonnées dans l'équation de cercle et en simplifiant par $2u+v+w$ qui est strictement positif :

$$-a^2vw(2u+v+w) + b^2wu(v+w) + c^2uv(v+w) < 0$$

Si on suppose par l'absurde que de même les points B_2 et C_2 sont situés à l'intérieur du triangle ABC, on obtient de même :

$$a^2vw(u+w) - b^2wu(u+2v+w) + c^2uv(u+w) < 0$$

$$a^2vw(u+v) + b^2wu(u+v) - c^2(u+v+2w) < 0$$

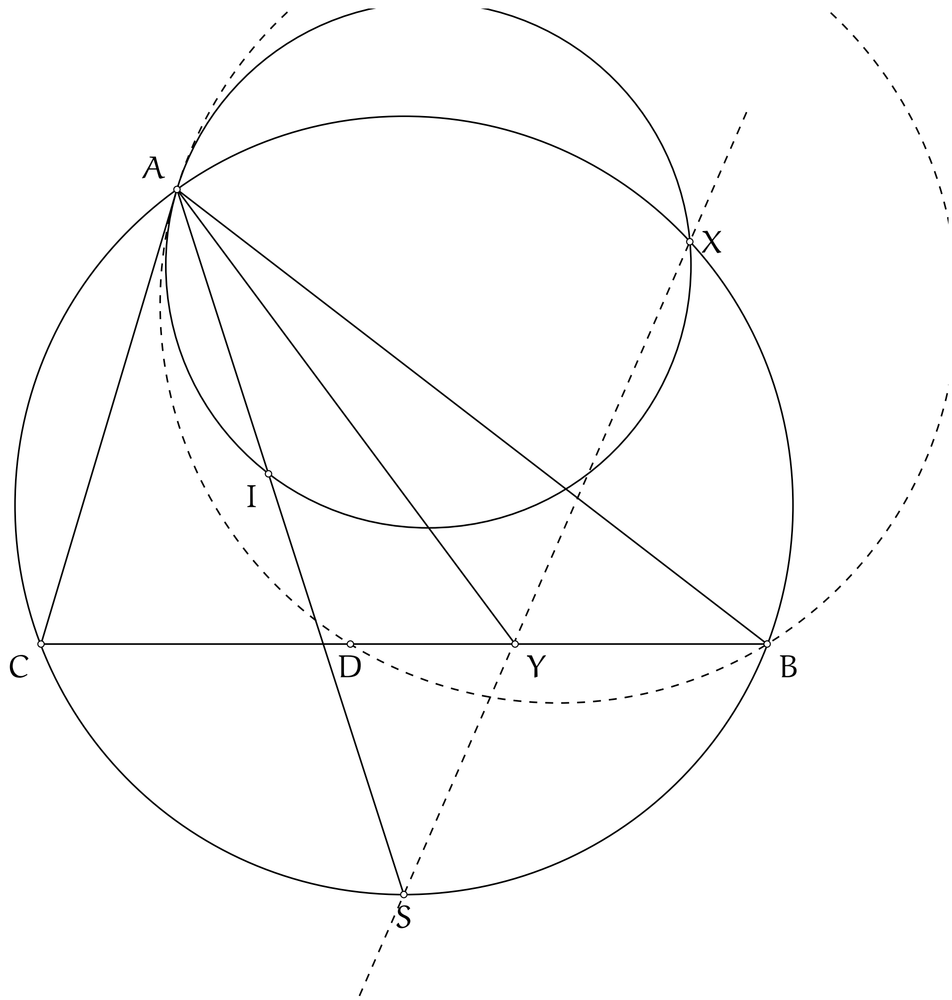
En sommant ces trois équations, on a :

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & a^2vw(-(2u+v+w) + u + w + u + v) \\ & + & b^2wu(v + w - (u+2v+w) + u + w) \\ & + & c^2uv(v + w + w + u - (u+v+2w)) \\ & < & 0 \end{array}$$

ce qui est absurde, et conclut l'exercice.

Exercice 6. *(EGMO 2019 P3) Soit* ABC *un triangle tel que* $\widehat{CAB} > \widehat{ABC}$*. Soit* I *le centre de son cercle inscrit. Soit* D *un point du segment* $[BC]$ *tel que* $\widehat{CAD} = \widehat{CBA}$*. Soit* ω *le cercle tangent au segment* $[AC]$ *au point* A *et passant par le point* I*. Soit* X *le second point d'intersection du cercle* ω *avec le cercle circonscrit au triangle* ABC*. Montrer que les bissectrices des angles* $\widehat{DAB}$ *et* $\widehat{CXB}$ *se coupent sur le segment* $[BC]$*.*

Solution de l'exercice 6



Comme toujours, on commence par effectuer quelques remarques d'ordre géométrie. Tout d'abord, la condition d'angle sur le point D se traduit par le fait que le cercle circonscrit au triangle ABD est tangent à la droite (AC) au point A.

De plus, la bissectrice de l'angle $\widehat{CXB}$ s'identifie comme la droite (XS), où le point S est le pôle Sud du sommet A dans le triangle ABC. Si on note Y le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$ dans le triangle ADB, il faut montrer que les points S, Y et X sont alignés.

Nous allons démontrer ce résultat en coordonnées barycentriques. Voyons que cela convient bien : il y a beaucoup de céviennes et les cercles présents passent par les sommets du triangle de référence. Le cercle ω peut paraître difficile à saisir, mais l'hypothèse de tangence à la droite (AC) rend son équation calculable. A partir de là, on peut être confiant sur le fait que le calcul du point X comme point d'intersection de deux cercles ne sera pas trop douloureux.
On choisit donc ABC comme triangle de référence. Le point I a pour coordonnées (a, b, c). D'après notre interprétation du point D et la puissance d'un point par rapport à un cercle,

$AC^2 = CD \cdot CB$ donc $\frac{DC}{CB} = \frac{AC^2}{CB^2} = \frac{b^2}{a^2}$. Les coordonnées du point D sont donc $(0, b^2, a^2 - b^2)$.
On détermine désormais les coordonnées du point Y, le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$ dans le triangle ABD. Avec le théorème de la bissectrice, et puisque les triangles CAD et CBA sont semblables, $\frac{YD}{YB} = \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{CB} = \frac{b}{a}$. Ainsi,

$$\frac{YB}{BC} = \frac{YB}{YB + YD} \cdot \frac{DB}{BC} = \frac{1}{1 + \frac{b}{a}} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{a - b}{a}$$

Les coordonnées du point Y sont donc $(0, b, a - b)$.
Par ailleurs, on rappelle que les coordonnées du pôle Sud S sont $(-a^2, b(b+c), c(b+c))$. Il reste à déterminer les coordonnées du point X.

Pour cela, on détermine l'équation du cercle ω. Son équation est de la forme

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$$

Puisque le point A appartient au cercle ω, $u = 0$. On rappelle que les paramètres v et w correspondent aux puissance des points B et C par rapport au cercle ω. Puisque la droite (AC) est tangente au cercle ω au point A, la puissance du point C par rapport au cercle ω vaut $AC^2 = b^2$. On a ainsi $w = b^2$.
On injecte alors les coordonénes du point I dans l'équation pour avoir v :

$$-abc(a + b + c) + (vb + b^2c)(a + b + c) = 0$$

donc $v = c(a - b)$.
L'équation du cercle ω est donc

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (c(a - b)y + b^2z)(x + y + z) = 0$$

On calcule enfin les coordonnées du point X, notées (x, y, z). Puisque le point X appartient au cercle ω et au cercle circonscrit au triangle ABC :

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy = -a^2yz - b^2zx - c^2xy + (c(a - b)y + b^2z)(x + y + z)$$

soit

$$c(a - b)y + b^2z = 0$$

et les coordonnées du point X sont de la forme $(x, b^2, c(b - a))$.
On réinjecte ces coordonnées dans l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC pour avoir x :

$$-x(b^2c(b - a) + c^2b^2) - a^2b^2c(b - a) = 0$$

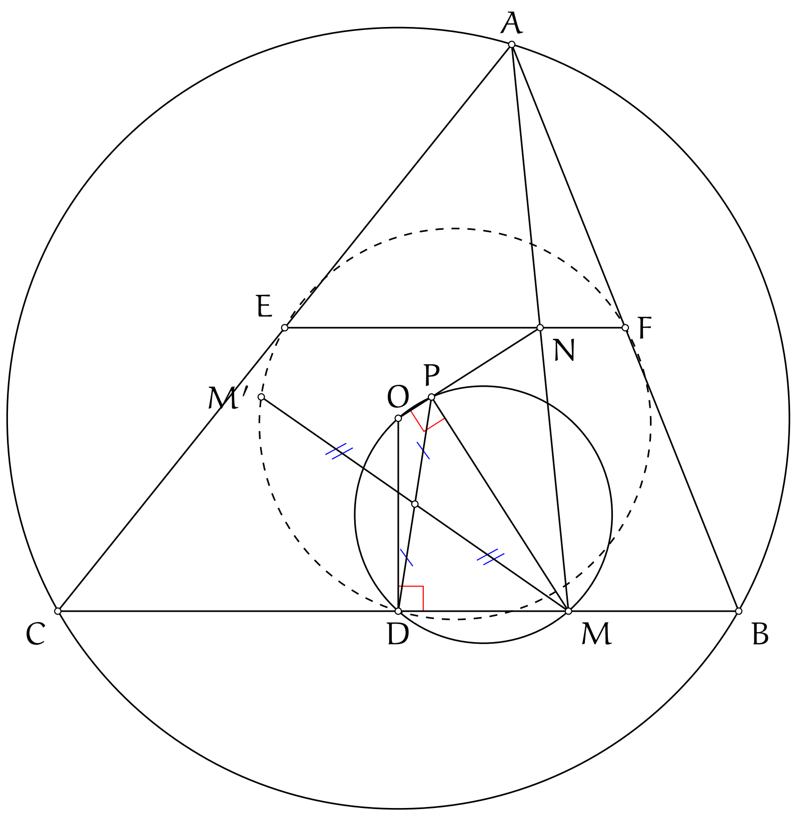
soit $x = \frac{a^2(a-b)}{b+c-a}$. On vérifie désormais l'alignement des points S, Y et X :

$$\begin{vmatrix} \frac{a^2(a-b)}{b+c-a} & b^2 & c(b-a) \\ -a^2 & b(b+c) & c(b+c) \\ 0 & b & a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b^2(b+c-a) & c(b-a)(b+c-a) \\ -1 & b(b+c) & c(b+c) \\ 0 & b & a-b \end{vmatrix}$$
$$\begin{aligned} &= (a-b)[(a-b)b(b+c) - bc(b+c)] \\ &\quad +b^2(a-b)(b+c-a) + bc(a-b)(b+c-a) \\ &= -abc(a-b) + (a-b)^2 b(b+c) + b^2(a-b)(b+c-a) \\ &= (a-b)[-abc + (a-b)b(b+c) + b^2(b+c-a)] \\ &= (a-b)[ab^2 - b^2c + b^2c - b^2a] \end{aligned}$$

Le déterminant est nul donc les points S, X et Y sont alignés.

Exercice 7. *(Balkan MO 2017 G4) Soit* ABC *un triangle aux angles aigus et soit* O *le centre de son cercle circonscrit. On note respectivement* D, E *et* F *les milieux des segment* $[BC], [CA]$ *et* $[AB]$*. Soit* M *un point distinct du point* D *sur le segment* $[BC]$*. Soit* N *le point d'intersection des droites* (EF) *et* (AM)*. La droite* (ON) *recoupe le cercle circonscrit au triangle* ODM *au point* P*. Montrer que le symétrique du point* M *par rapport à la droite* (DP) *appartient au cercle d'Euler du triangle* ABC*.*

Solution de l'exercice 7



Un point variable (sur une droite certe), une définition par symétrie et surtout le cercle d'Euler, dont le centre est d'affixe $\frac{a+b+c}{2}$. Tout cela nous invite à considérer les coordonnées complexes. Cela dit, il y a le cercle circonscrit au triangle ODM qui permet de définir le point P qui n'est pas très "complexe-friendly".
Mais ne peut-on pas contourner ? En effet, puisque le point D est le milieu du segment $[BC]$, l'angle $\widehat{ODM}$ est droit. Il en est donc de même pour l'angle $\widehat{OPM}$. On a obtenu une nouvelle définition du point P comme le projeté orthogonal du point M sur le segment $[ON]$, qui n'est pas une corde du cercle unité mais comme O a pour affixe 0, on devrait pouvoir s'en sortir.

C'est parti. On fixe naturellement le cercle circonscrit au triangle ABC comme le cercle unité et on note, comme d'habitude, en minuscule l'affixe d'un point noté en majuscule.
Puisque le point N est sur la droite (EF), le point N est le milieu du segment $[AM]$. Ainsi, $n = \frac{a+m}{2}$.
Puisque le point P appartient à la droite (ON), on a

$$\frac{p-0}{\bar{p}-0} = \frac{n-0}{\bar{n}-0}$$

donc $p = \bar{p}\frac{n}{\bar{n}}$.
Puisque les droites (PM) et (ON) sont perpendiculaires, on a

$$\frac{p-m}{\bar{p}-\bar{m}} = -\frac{n-0}{\bar{n}-0}$$

soit $p + \bar{p}\frac{n}{\bar{n}} = m + \bar{m}\frac{n}{\bar{n}}$. On obtient

$$p = \frac{n\bar{m} + m\bar{n}}{2\bar{n}}$$

Le point M' est défini de telle sorte que le quadrilatère $PMDM'$ est un parallélogramme, ce qui s'écrit $m' + m = p + d$ ou encore

$$m' = \frac{n\bar{m} + m\bar{n}}{2\bar{n}} + \frac{b+c}{2} - m = \frac{n\bar{m} - m\bar{n}}{2\bar{n}} + \frac{b+c}{2}$$

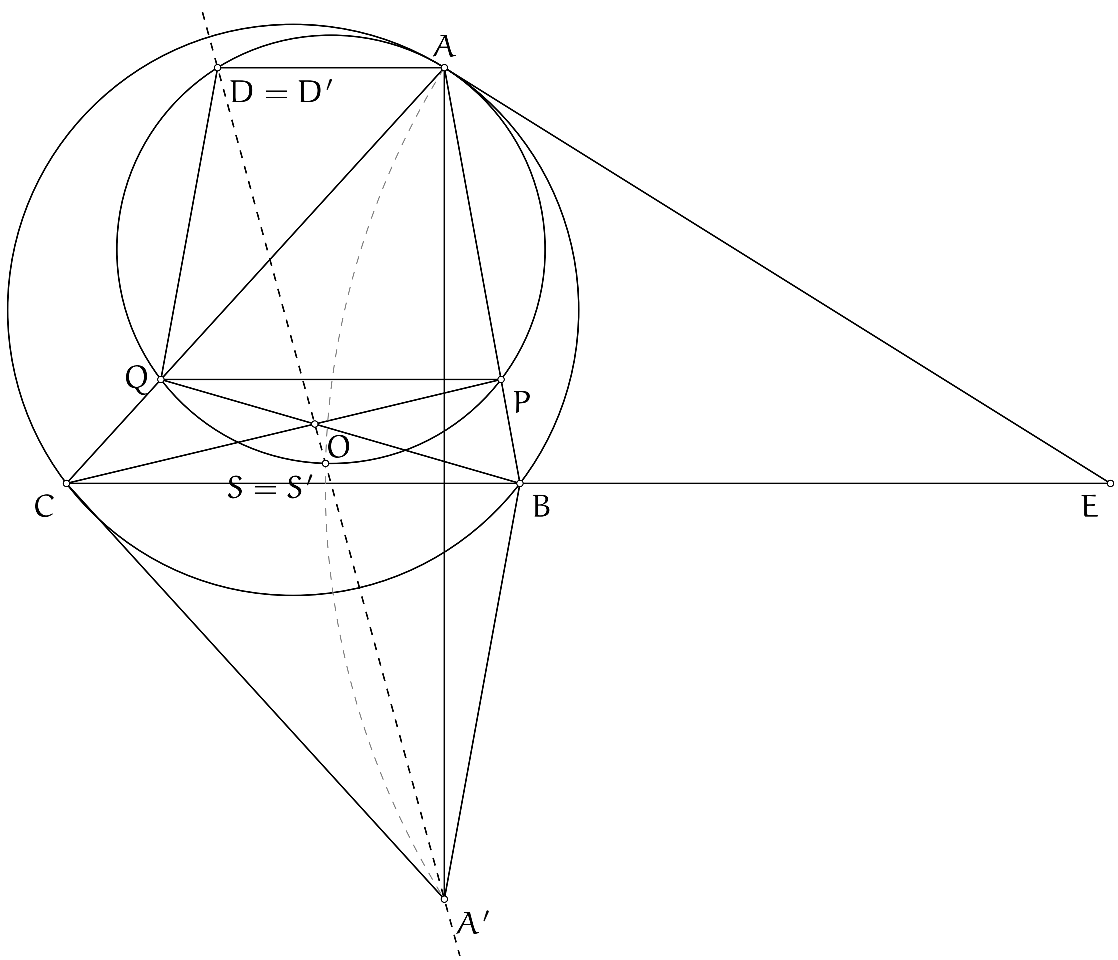
Il suffit désormais de calculer la distance du point M' au point d'affixe $\frac{a+b+c}{2}$, correspondant au centre du cercle d'Euler.

$$\left|m' - \frac{a+b+c}{2}\right| = \left|\frac{n\overline{m} - m\overline{n}}{2\overline{n}} - \frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{n}{\overline{n}}\overline{m} - 2n\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{n}{\overline{n}}\right| \cdot |\overline{m} - 2\overline{n}| = \frac{1}{2}|\overline{m} - \overline{m} - \overline{a}| = \frac{1}{2}$$

ce qui nous donne la conclusion désirée.

Exercice 8. *(Mathraining Concours 11 P6) Soit* ABC *un triangle et* Ω *sont cercle circonscrit. On considère un cercle* ω *tangent intérieurement au cercle* Ω *au point* A*. On note* P *et* Q *les points d'intersection (distincts du point* A*) du cercle* ω *avec les côtés* $[AB]$ *et* $[AC]$ *respectivement. On note également* O *le point d'intersection des droites* (BQ) *et* (CP)*. Soit* A' *le symétrique du point* A *par rapport à la droite* (BC) *et on note* S *le point d'intersection de la droite* (OA') *avec le cercle* ω *tel que le point* S *appartient à l'arc* PQ *ne contenant pas le point* A*. Montrer que le cercle circonscrit au triangle* BSC *est tangent au cercle* ω*.*

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>



Ce problème rassemble plusieurs techniques. Tout d'abord, le résultat à montrer se traduit plus simplement : si les cercles sont effectivement tangents, alors les tangentes au cercle ω aux points A et S se coupent sur la droite (BC) puisque les axes radicaux des cercles Ω, ω et du cercle circonscrit au triangle BSC sont concourants. On introduit donc E le point d'intersection de la tangente au cercle Ω au point A avec la droite (BC). Il suffit donc de montrer que la droite (ES) est tangente au cercle ω au point S, c'est-à-dire que $EA = ES = EA'$. Dans la suite, on supposera que $AB < AC$.

Etant donné que les cercles Ω et ω sont tangents au point A, le point A est le centre d'une homothétie qui envoie les points P et Q sur les points B et C respectivement, la droite (PQ) est parallèle à la droite (BC). Enfin, le point O appartient à la médiane issue du sommet A dans le triangle ABC, on peut s'en convaincre avec le théorème de Ceva par exemple.

Lorsque l'on introduit un point d'intersection d'une droite avec un cercle, il est toujours bon de regarder le second point d'intersection de cette droite avec ce cercle. Ainsi, soit D le second point d'intersection de la droite $(A'O)$ avec le cercle ω.
La droite (AD) semble parallèle à la droite (BC), nous allons démontrer ce résultat en barycentrique. En effet, on a un triangle de référence, un seul degré de liberté qui est la position du point P sur le segment [AB] et la plupart des points semblent accessibles. On va montrer que le point D' d'intersection de la parallèle à la droite (BC) passant par le point A avec le cercle ω est aligné avec les points O et A'.

On pose donc $A : (1,0,0), B : (0,1,0), C : (0,0,1)$ et $P : (t, 1-t, 0)$. Notons déjà que si $t = 0$, les points P et B sont confondus et il n'y a rien à montrer, de même que si $t = 1$. Puisque la droite (PQ) est parallèle à la droite (BC), on a aussi $Q : (t, 0, 1-t)$. On peut donc calculer l'équation du cercle ω, qui, puisqu'il passe par le point A, a la forme

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (vy + wz)(x + y + z) = 0$$

Puisque le point P appartient au cercle ω, on a $-c^2t(1-t) + v(1-t) \cdot 1 = 0$ donc $v = c^2t$ et de même, $w = b^2t$.

Le point D' appartient à la droite parallèle à la droite (BC) passant par le point A. Rappelons comment déterminer ses coordonnées (x, y, z). On peut reformuler l'hypothèse comme suit : le point D est aligné avec les points A et $P_{B,C}$ le point à l'infini porté par la droite (BC). Ce point a des coordonnées de la forme $(0, y', z')$ puisqu'il est sur la droite (BC) et la somme de ses coordonnées vaut 0 donc il a pour coordonnées $(0, 1, -1)$. Ainsi :

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = z + y$$

donc $z + y = 0$.
Le point D appartient également au cercle ω donc

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (c^2ty + b^2tz)(x + y + z) = 0$$

et en remplaçant z par $-y$ et en simplifiant par y :

$$a^2y + x(1-t)(b^2 - c^2) = 0$$

et finalement les coordonnées du point D' sont $(a^2, (1-t)(c^2 - b^2), (1-t)(b^2 - c^2))$.

On calcule désormais les coordonnées du point O. On rappelle qu'il appartient à la médiane issue du sommet A, il a donc des coordonnées de la forme $(s, 1, 1)$. Puisqu'il appartient à la droite (CP) :

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & 1-t & 0 \\ s & 1 & 1 \end{vmatrix} = t - s(1-t)$$

On peut donc écrire les coordonnées du point O comme $(t, 1-t, 1-t)$.
Il reste à calculer les coordonnées du point A'. Puisqu'il appartient à la hauteur issue du sommet A, il a des coordonnées de la forme (s, S_c, S_B). Puisque les aires orientées des triangles ABC et $A'BC$ sont opposées, on doit avoir

$$-1 = \frac{\text{aire}(A'BC)}{\text{aire}(ABC)} = \begin{vmatrix} \frac{s}{s+a^2} & \frac{S_C}{s+a^2} & \frac{S_B}{s+a^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{s}{s+a^2}$$

puisqu'on travaille avec des coordonnées homogénéisées pour calculer les aires.
On déduit donc que $s = -\frac{a^2}{2}$. Pour montrer que les points A', O et D sont alignés, il suffit donc de vérifier que

$$\begin{vmatrix} -\frac{a^2}{2} & S_C & S_B \\ t & 1-t & 1-t \\ a^2 & (1-t)(c^2-b^2) & (1-t)(b^2-c^2) \end{vmatrix} = 0$$

Mais cela est vraie puisque, en notant L_1, L_2 et L_3 les trois lignes, on a $L_3 = -2(1-t)L_1 + a^2L_2$. La troisième ligne est combinaison linéaire des deux premières, le déterminant est donc nul et les points O, D' et A' sont alignés. Ainsi, $D = D'$ et les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Mais nous n'avons pas encore terminé le problème. Il faut encore montrer que $ES = EA = EA'$. Mais on se doute bien que ce que l'on vient de démontrer va nous servir.
On pose S' le second point d'intersection du cercle de centre E de rayon EA avec le cercle ω. Nous allons démontrer par chasse aux angles que les points D, S et A' sont alignés et donc que $S' = S$, ce qui donnera le résultat.
Puisque les points A, S' et A' appartiennent au cercle de centre E, on a

$$\widehat{A'S'A} = 180° - \frac{1}{2}\widehat{AEA'} = 180° - \widehat{AEB} = \widehat{EBA} + \widehat{BAE} = 2\widehat{BCA} + \widehat{BAC}$$

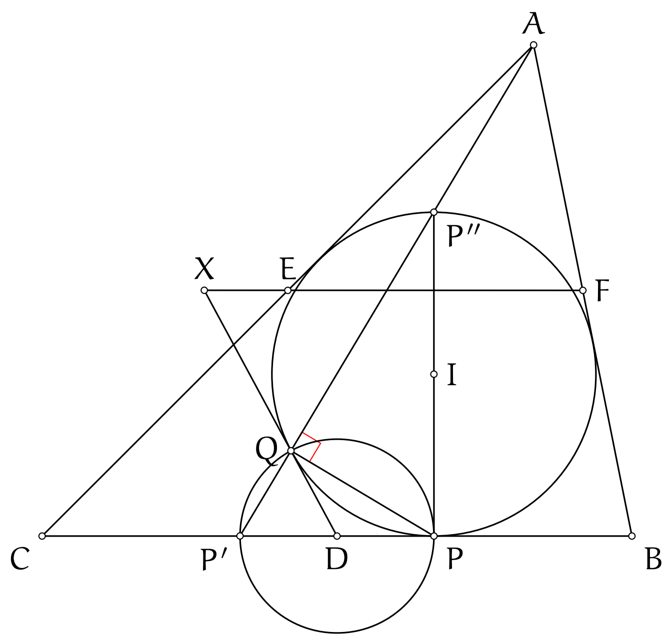
Par ailleurs, en utilisant le fait que le quadrilatère $DAPQ$ est un trapèze isocèle :

$$\widehat{DS'A} = \widehat{DPA} = \widehat{QPA} - \widehat{DPQ} = \widehat{QPA} - \widehat{PQA} = \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = 180° - \widehat{AS'A'}$$

On obtient que les points A', S' et D sont alignés donc $S' = S$ et le résultat est démontré.

Exercice 9. *(China TST 2017 P5) Soit* ABC *un triangle non isocèle. Soient,* D, E *et* F *les milieux respectifs des segments* $[BC], [CA]$ *et* $[AB]$*. La tangente (autre que la droite* (BC)*) au cerlce inscrit du triangle* ABC *issue du sommet* D *coupe la droite* (EF) *au point* X*. On définit les points* Y *et* Z *de la même façon. Montrer que les points* X, Y *et* Z *sont alignés.*

Solution de l'exercice 9



Les points X, Y et Z sont construits de manière symétrique, cela prête donc à une utilisation des coordonnées barycentriques. On va se concentrer sur le calcul des coordonnées du point X.

Tout d'abord, il paraît inconcevable de calculer le point X à partir de sa définition actuelle, il va falloir commencer par quelques observations d'ordre géométrique.

On note P le point de contact du cercle inscrit avec le côté $[BC]$ et P' le point de contact du cercle $A-$exinscrit. On note Q le point de contact de la tangente au cercle inscrit issue du point D. On a $DQ = DP = DP'$. Le segment $[PP']$ est donc un diamètre du cercle circonscrit au triangle $P'PQ$ et $\widehat{P'QP} = 90°$.

D'autre part, on note P'' le point du cercle inscrit tel que le segment PP'' en est un diamètre. Il est classique que les points A, P' et P'' sont alignés (effectuer une homothétie de centre A pour s'en convaincre). D'autre part, puisque le segment $[PP'']$ est un dimaètre, $\widehat{PQP''} = 90°$. Ainsi, $\widehat{P'QP''} = 180°$ donc les points P', Q et P'' sont alignés. Donc les points P', Q et A sont alignés. On peut calculer de façon plus sûre les coordonénes du point Q. On pourra alors en déduire les coordonnées du point X.

En adoptant les notations de la transformation de Ravi, les coordonnées du point P' sont $(0, y, z)$ donc les coordonnées du point Q sont de la forme (t, y, z). Par ailleurs, le vecteur $\overrightarrow{DQ}$ a pour coordonnées $\left(\frac{2t}{2(t+a)}, \frac{c-b-t}{2(t+a)}, \frac{b-c-t}{2(t+a)}\right)$. Le paramètre t vérifie notamment que $DQ^2 = DP^2 = \frac{a}{2} - y = \frac{b-c}{2}$. Ainsi, avec la formule de la distance,

$$4(t+a)^2 \cdot DQ^2 = -a^2(c-b-t)(b-c-t) - b^2 \cdot 2t(b-c-t) - c^2 \cdot 2t(c-b-t)$$

soit après développement et regroupement des termes (en utilisant $DQ = \frac{b-c}{2}$)

$$0 = t^2[b^2 + c^2 + 2bc - a^2] - 2t(b-c)^2(a+b+c)$$

Puisuqe t est non nulle (cette solution correspond au point P'), on obtient

$$t = \frac{(b-c)^2(a+b+c)}{S_A + bc}$$

On déduit les coordonnées du point X, notées (u, v, w). Le point X est aligné avec les points E et F donc

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ u & v & w \end{vmatrix} = u - v - w$$

On pose $u = 1$, alors $w = 1 - v$. Le point X est aligné avec les poits Q et D donc :

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ t & y & z \\ 1 & v & w \end{vmatrix} = t(v-w) + (z-y) = t(2v-1) + b - c$$

donc $v = \dfrac{c-b}{2t} + \dfrac{1}{2}$ et les coordonnées du point X s'écrivent $\left(2, 1 - \frac{S_A+bc}{(a+b+c)(b-c)}, 1 + \frac{S_A+bc}{(a+b+c)(b-c)}\right)$. Or

$$\begin{aligned} 1 - \tfrac{S_A+bc}{(a+b+c)(b-c)} &= \tfrac{1}{(a+b+c)(b-c)}[(a+b+c)(b-c) - S_A - bc] \\ &= \tfrac{1}{2(a+b+c)(b-c)}[a^2 + b^2 - 3c^2 + 2ab - 2ac - 2bc] \\ &= \tfrac{1}{2(a+b+c)(b-c)}[(a+b-c)^2 - 4c^2] \\ &= \tfrac{1}{2(a+b+c)(b-c)}[(a+b+c)(a+b-3c)] \\ &= \tfrac{a+b-3c}{2(b-c)} \end{aligned}$$

De même $1 + \frac{S_A+bc}{(a+b+c)(b-c)} = \frac{3b-c-a}{2(b-c)}$. Les coordonnées du point X sont donc $\left(2, \frac{a+b-3c}{2(b-c)}, \frac{3b-c-a}{2(b-c)}\right)$, ou encore $(4(b-c), b+a-3c, 3b-c-a)$.
On obtient de même les coordonnées des points Y et Z.

$$Y : (3c - b - a, 4(c-a), b + c - 3a)$$

$$Z : (a + c - 3b, 3a - b - c, 4(a-b))$$

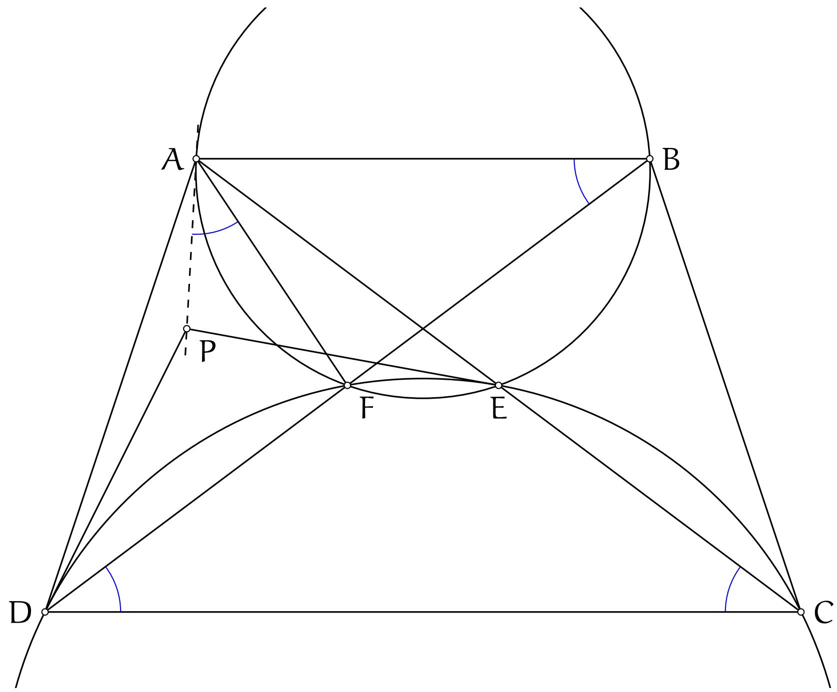
Il reste à calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 4(b-c) & b+a-3c & 3b-c-a \\ 3c-b-a & 4(c-a) & b+c-3a \\ a+c-3b & 3a-b-c & 4(a-b) \end{vmatrix}$$

Mais on voit que la somme des trois lignes vaut 0. Ainsi, la dernière ligne est combinaison linéaire des deux autres, le déterminant est donc nul et les points X, Y et Z sont alignés.

Exercice 10. *(RMM 2019 P2) Soit* $ABCD$ *un trapèze isocèle (avec* (AB) *et* (CD) *parallèles). Soit* E *le milieu du segment* $[AC]$*. Soit* ω *le cercle circonscrit au triangle* ABE *et soit* Ω *le cercle circonscrit au triangle* CDE*. Soit* P *le point d'intersection des tangentes aux cercles* ω *et* Ω *respectivement en les points* A *et* D*. Montrer que la droite* (PE) *est tangente au cercle* Ω*.*

Solution de l'exercice 10



Une première chose est que la figure présente une symétrie par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$, puisque le trapèze est isocèle. Il ne faut donc pas hésiter à prolonger cette symétrie en introduisant le point F, milieu du segment $[BD]$. Ce point appartient aux cercles ω et Ω.

Une deuxième chose est qu'il est raisonnable de redéfinir P comme le point d'intersection des tangentes au cercle Ω en les points D et E et de montrer que la droite (AP) est tangente au cercle ω en A. En effet, le point P définit ainsi fournit plus de relations d'angles.
Pour que la droite (AP) soit tangente au cercle ω, il faut $\widehat{PAE} = \widehat{ABE}$, ou une autre égalité convenable serait $\widehat{PAF} = \widehat{ABF} = \widehat{FDB} = \widehat{ECD}$.

C'est à cet instant qu'on peut se décider à utiliser les nombres complexes. Avec des birapports complexes, on peut en effet déterminer une égalité d'angle. Avec la redéfinition du point P, on a envie de choisir le cercle Ω comme cercle unité, car l'affixe du point P se déduit de celle des points D et E. On a supprimé le cercle ω de la figure, et on peut obtenir les affixes des différents point de façon aisée. Puisque pour déterminer des angles, on va calculer des rapports d'affixes, on va choisir des angles qui impliquent un maximum les points du cercle unité. On se met donc en quête de montrer que $\widehat{PAF} = \widehat{DCE}$.

On note avec une minuscule l'affixe d'un point noté en majuscule.
L'affixe du point P est donc $\frac{2ed}{e+d}$. L'affixe du point A vaut $2e - c$. Les droites (EF) et (CD) sont parallèles si et seulement si

$$\frac{f-e}{\overline{f}-\overline{e}} = \frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}$$

soit $f = \frac{cd}{e}$.

L'angle $\widehat{PAF}$ est donné par l'argument de la quantité :

$$\frac{p-a}{f-a} = \frac{\frac{2ed}{e+d} - (2e-c)}{\frac{cd}{e} - (2e-c)} = \frac{2ed - (e+d)(2e-c)}{cd - 2e^2 + ce} \cdot \frac{e}{e+d} = \frac{e}{e+d}$$

dont la quantitié conjuguée est $\frac{d}{e+d}$.
D'autre part l'angle $\widehat{DCE}$ est donné par l'argument de la fraction :

$$\frac{e-c}{d-c}$$

dont le conjugué est

$$\frac{e-c}{d-c} \cdot \frac{d}{e}$$

Pour montrer que les deux angles sont égaux, il suffit de montrer que

$$\frac{p-a}{f-a} \cdot \frac{d-c}{e-c} = \frac{e}{e+d} \cdot \frac{d-c}{e-c}$$

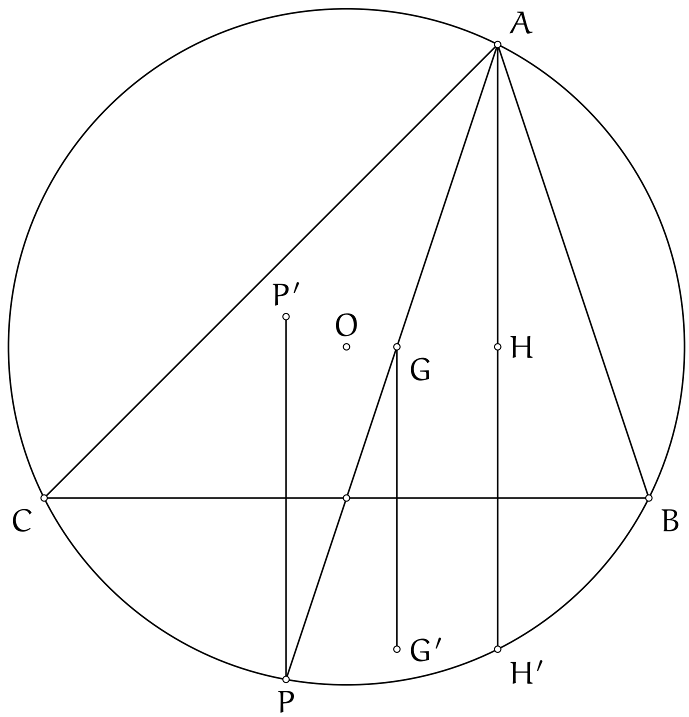
est réel. Or sa quantité conjuguée est

$$\overline{\left(\frac{e}{e+d} \cdot \frac{d-c}{e-c}\right)} = \frac{d}{e+d}\frac{d-c}{e-c} \cdot \frac{e}{d} = \frac{e}{e+d} \cdot \frac{d-c}{e-c}$$

donc la fraction est réelle et on a l'égalité d'angle désirée.

Exercice 11. *(EGMO 2015 P6) Soit* ABC *un triangle tel que* $AB \neq AC$ *et soient* H *son orthocentre et* G *son centre de gravité. La droite* (AG) *recoupe le cercle circonscrit au triangle* ABC *au point* P*. Soit* P' *le symétrique du point* P *par rapport au côté* $[BC]$*. Montrer que* $GP' = HG$ *si et seulement si* $\widehat{BAC} = 60°$.

Solution de l'exercice 11



Le résultat à démontrer impose un degré -1 de liberté (le choix des points A, B et C n'est plus que de degré 2), il s'agit donc d'un bon problème à travailler en analytique. La méthode complaxe est tout indiquée puisque des points sont définis par symétrie.

En revanche, le résultat à démontrer est une égalité de longueur, ce qui n'est pas très adapté aux nombres complexes (les égalités de modules se traduisent rarement par des bonnes équations). On doit donc avancer un peu pour déterminer une assertion équivalente à $GP' = GH$.

La définition du point P' nous indique le chemin à suivre : appliquer une symétrie par rapport au côté BC. On sait que le symétrique H' de l'orthocentre H appartient au cercle circonscrit, et on sait à quel point les points du cercle unité sont précieux dans les calculs. On rajoute G' le symétrique du point G par rapport au côté BC. La condition $P'G = GH$ dévient $PG' = G'H$. Etant donné que les points P et H' appartiennent au cercle circonscrit au triangle ABC, cette condition se réécrit comme "les droites (OG') et (PH') sont perpendiculaires". Et ça, on sait faire en complexe.

On fixe sans surprise le cercle circonscrit au triangle ABC comme le cercle unité. Puisque les droites (AH') et (BC) sont perpendiculaires et que ces 4 points appartiennent au cercle unité, $ah' = -bc$ donc $h' = -bc\overline{a}$.

Le projeté du point G sur le segment $[BC]$ a pour affixe $\frac{1}{2}(b + c + g - bc\overline{g})$ donc le symétrique du point G par rapport au segment $[BC]$ a pour affixe $g' = b + c - bc\overline{g} = \frac{2}{3}(b + c) - \frac{1}{3}bc\overline{a}$.
Les droites (AP) et (BC) se coupe au point d'affixe $\frac{b+c}{2}$ donc

$$\frac{ap(b + c) - bc(a + p)}{ap - bc} = \frac{b + c}{2}$$

donc $p = bc\frac{2a-b-c}{ab+ac-2bc}$.

La condition de perpendicularité se réécrit (en utilisant que les points H' et P sont sur le cercle unité) :

$$\frac{g'}{\overline{g'}} = \frac{g'-0}{\overline{g'}-0} = -\frac{h'-p}{\overline{h'}-\overline{p}} = h'p$$

ou encore $g' = \overline{g'}h'p$.

Maintenant, réfléchissons à la propriété $\widehat{BAC} = 60°$. Comment le calcul peut-il la faire apparaître ? D'après le théorème de l'angle au centre, cela signifie que $\widehat{COB} = 120°$. Comme on n'a pas choisi l'ordre de B et C sur le cercle, on ne peut pas en déduire que $\frac{b}{c}$ est d'argument $\frac{2\pi}{3}$. Il pourrait être d'argument $\frac{4\pi}{3}$ également. Cependant, dans tous les cas, le complexe $\frac{b}{c}$ est solution de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. C'est donc ce que l'on va chercher à démontrer : nous allons poser $j = \frac{b}{c}$ et montrer que j satisfait $j^2 + j + 1 = 0$ si et seulement si $g' = \overline{g'}h'p$.

L'équation $g' = \overline{g'}h'p$ se réécrit

$$2b + 2c - \frac{bc}{a} = -(2b + 2c - a)bc\overline{a}\frac{2a-b-c}{ab+ac-2bc}$$

$$\left(2(1+j)c - \frac{c^2j}{a}\right)(ac(1+j) - 2c^2j) = -((1+j)c - a)c^2j\overline{a}(2a - (1+j)c)$$

Chaque parenthèse est homogène, donc on peut poser $x = \frac{c}{a}$ pour ne plus avoir à traiter que 2 variables :

$$(2(1+j) - xj)((1+j) - 2xj) = (2(1+j)x - 1)j((1+j)x - 2)$$

$$2(1+j)^2 + 2x^2j^2 - 5(1+j)jx = 2x^2j(1+j)^2 - 5j(j+1)x + 2j$$

$$0 = 2x^j[(1+j)^2 - j] + 2[j - (1+j)^2]$$
$$0 = 2(x^2j - 1)(j^2 + j + 1)$$

Le cas $x^2j = 1$ implique $\frac{cb}{a^2} = 1$ c'est-à-dire que $a^2 = bc$ et que le triangle ABC est isocèle (cf la partie sur le calcul de l'affixe du pôle Sud) ce qui est exclu. On a donc l'équivalence entre $G'P = G'H'$ et $j^2 + j + 1 = 0$, ce qui est le résultat voulu.

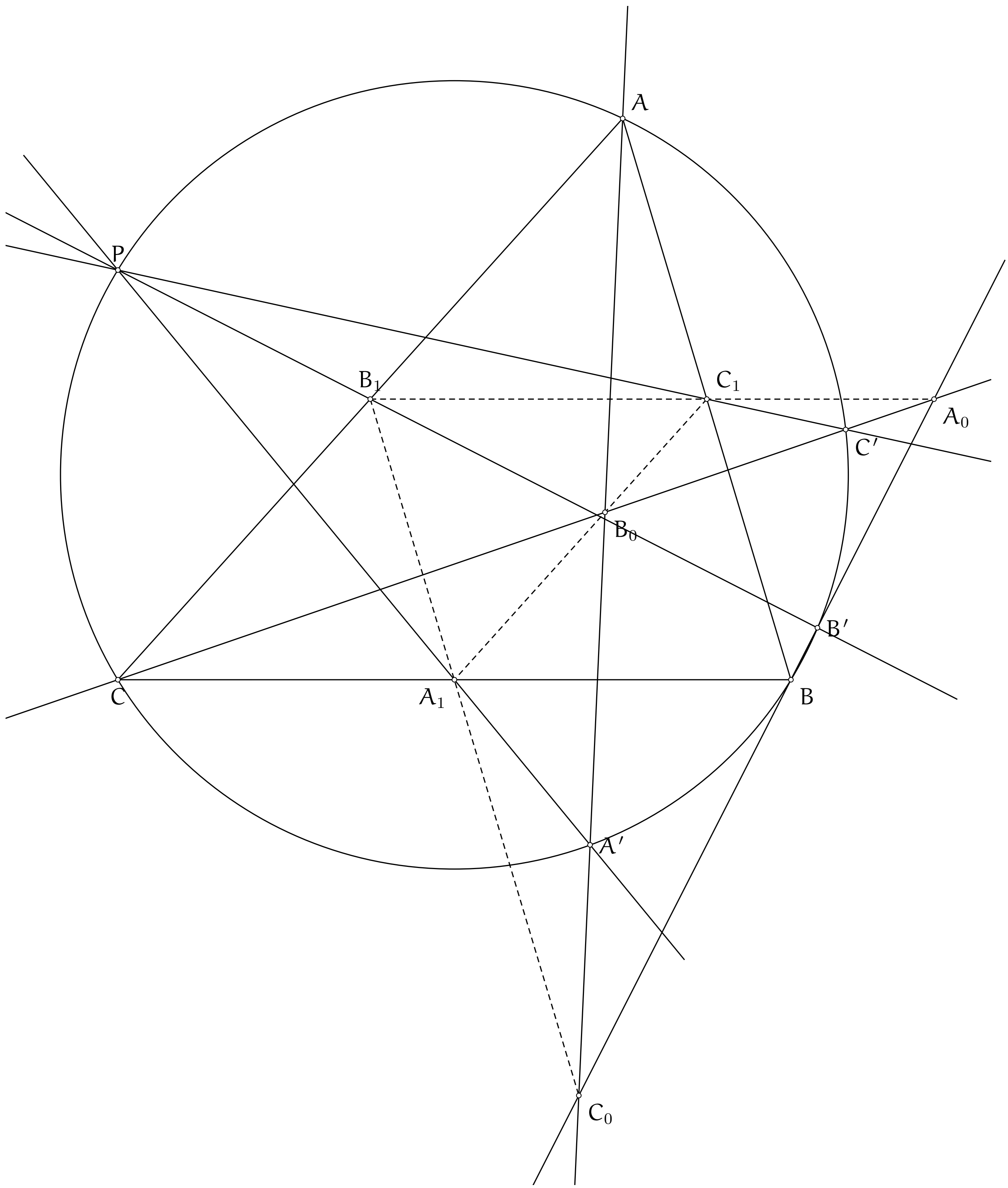
Exercice 12. *(G5 IMO 2007) Soit* ABC *un triangle fixé,* Γ *son cercle circonscrit et* P *un point appartenant au cercle* Γ. *Soient* A_1, B_1, C_1 *les milieux respectifs des segments* $[BC], [CA]$ *et* $[AB]$. *La droite* (PA_1) *recoupe le cercle* Γ *en un point* A'. *Les points* B' *et* C' *sont définis de façon similaire. On suppose les points* A, B, C, A', B' *et* C' *distincts. Les droites* $(AA'), (BB')$ *et* (CC') *forment un triangle. Montrer que l'aire de ce triangle ne dépend pas du point* P.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Voilà un exercice qui montre qu'il ne faut surtout pas se ruer sur la géométrie analytique.

Analysons un peu le problème. La majorité des points sont sur un même cercle, le reste des points est défini par une intersection de deux droites définies par des points appartenent au cercle et on a un degré de liberté sur le point P. Tout semble indiquer que ce problème est adapté aux nombres complexes. On a même une formule pour avoir une l'aire du triangle formé et montrer qu'elle ne dépendrait pas de l'affixe p du point P.
On commence les calculs, on calcule l'affixe a' de A'. Et là on se rend compte déjà que les calculs vont être peu sympathiques, puisque $a' = -\overline{p}\frac{2p-b-c}{\overline{2p-b-c}}$. Une personne courageuse ne se laissera pas intimidée par l'idée de calculer l'affixe du point d'intersection des droites (AA') et (BB') et ensuite calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_0 & \bar{a_0} & 1 \\ b_0 & \bar{b_0} & 1 \\ c_0 & \bar{c_0} & 1 \end{vmatrix}$$

avec a_0 l'affixe du point d'intersection des droites (BB') et (CC'), etc... Mais on peut prévoir la taille des dénominateurs à traiter et que cela va prendre du temps et plusieurs pages. Et je ne suis pas courageux. On regarde alors si on ne peut pas au moins commencer le problème "à la régulière". On trace alors une vraie et grande figure :



On note A_0 le point d'intersection des droites (CC') et (BB') et on définit de façon similaire les points B_0 et C_0.

Maintenant que l'on a une figure plus propre, on peut commencer à chercher des relations sur la figure. Comment utiliser que les droites (A_1A'), (B_1B') et (C_1C') se coupent toutes en le point P ? Comment utiliser que les points A_1, B_1 et C_1 sont des milieux de segments ?

Ce qui sautait déjà aux yeux quand on voulait attaquer le problème en complexes, c'est qu'il y a beaucoup de points sur une même cercle. Cela semble être un bon moment pour penser au théorème de Pascal, d'autant plus que tous les autres objets sont des droites. Le théorème de Pascal est censé nous donner un alignement. Au lieu de tester des hexagones au hasard, on regarde sur notre figure quel alignement on peut espérer. Les points B_1, C_1 et A_0 pourraient bien être alignés.
D'après le théorème de Pascal, on montre que c'est effectivement le cas en considérant l'hexagone inscrit $PC'CABB'$. On obtient des alignements similaires pour les points A_1, B_0 et C_1 et les points B_1, A_1 et C_0. Il semble qu'on ait bien exploité l'hypothèse que le point P est sur le cercle Γ et que les droites (A_1A'), (B_1B') et (C_1C') partent du point P.

Maintenant, on peut continuer à chercher le problème à la régulière, étant donné que l'on obtient de nombreuses droites parallèles, on peut tenter des égalités de rapports etc...Ou alors on peut commencer à se dire que les points A_0, B_0 et C_0 sont très bien définis par des intersections de droites et que par exemple, à B_0 fixé, on peut construire A_0 et C_0. Ainsi, on pourrait aborder le problème...en barycentrique ! C'est ce que l'on présente ici.

On a ramené le problème au problème suivant : étant donné un point B_0 variable sur la droite (A_1C_1), on définit A_0 comme le point d'intersection des droites (CB_0) et (B_1C_1) et C_0 comme le point d'intersection des droites (AA_0) et (B_1A_1). Du fait que B_0 est sur le segment $[A_1, C_1]$, ses coordonnées avec le triangle de référence ABC sont $(u, 1, 1-u)$. On va chercher à montrer que l'aire du triangle $A_0B_0C_0$ ne dépend pas de u.
On note (x, y, z) les coordonnées barycentriques du point A_0. Puisque A_0 est sur la droite (B_1C_1), on a

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y + x - z$$

et puisque A_0 est sur la droite (CB_0), on a aussi :

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ u & 1 & 1-u \\ x & y & z \end{vmatrix} = yu - x$$

ce qui nous donne pour coordonnées $(yu, y, yu-y)$ ou encore $(u, 1, u-1)$. On obtient de même les coordonnées du point C_0 : $(-u, 1, 1-u)$.
On peut désormais calculer l'aire du triangle $A_0B_0C_0$. On se contente de montrer qu'elle est indépendante de u. Il suffit pour cela de montrer que

$$\begin{vmatrix} \frac{u}{2u} & \frac{1}{2u} & \frac{u-1}{2u} \\ \frac{u}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1-u}{2} \\ \frac{-u}{2-2u} & \frac{1}{2-2u} & \frac{1-u}{2-2u} \end{vmatrix}$$

est indépendant de u (attention, quand on écrit l'aire d'un triangle sous forme de déterminant, à ne pas oublier d'homogénéiser les coordonnées des points). Mais en factorisant selon les lignes par le dénominateur commun, puis selon les colonnes, on trouve :

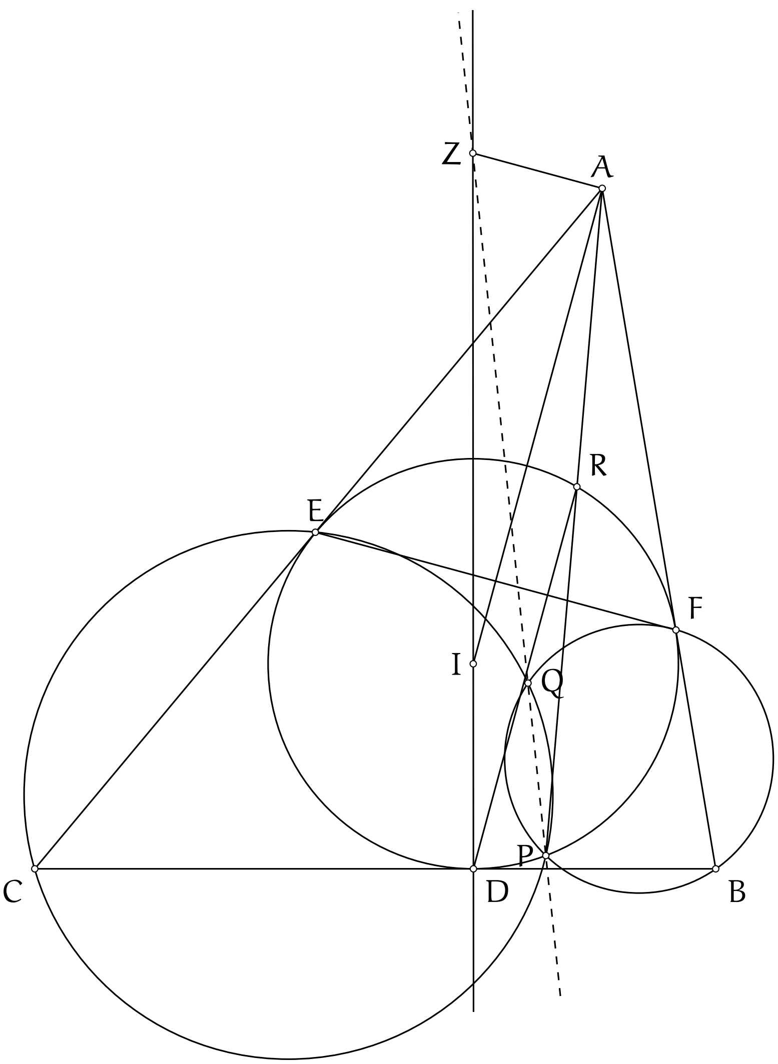
$$\begin{vmatrix} \frac{u}{2u} & \frac{1}{2u} & \frac{u-1}{2u} \\ \frac{u}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1-u}{2} \\ \frac{-u}{2-2u} & \frac{1}{2-2u} & \frac{1-u}{2-2u} \end{vmatrix} = \frac{1}{2u \cdot 2 \cdot (2-2u)} \begin{vmatrix} u & 1 & u-1 \\ u & 1 & 1-u \\ -u & 1 & 1-u \end{vmatrix} = \frac{u \cdot (1-u)}{2u \cdot 2 \cdot (2-2u)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Or $\frac{u \cdot (1-u)}{2u \cdot 2 \cdot (2-2u)} = \frac{1}{8}$ donc l'aire ne dépend pas de u. En calculant le déterminant, on obtient même que l'aire vaut la moitié du triangle ABC. Ceci achève le problème.

On retient donc qu'on a échappé à un problème dégueulas en complexes en cherchant d'abord à raisonner sur une figure exacte et avec des outils de géométrie euclidienne. C'est seulement une fois le problème réduit grâce à ces premières observations qu'il est devenu supportable pour une solution analytique et que le barycentrique est apparu plus sympathique. On y a d'ailleurs gagné beaucoup de temps et d'énergie !

Exercice 13. *(IMO 2019 P6) Soit* ABC *un triangle et* I *le centre de son cercle inscrit. Soient* D, E *et* F *les points de contact du cercles inscrit avec respectivement les côtés* $[BC], [CA]$ *et* $[AB]$*. Soit* ω *le cercle inscrit au triangle* ABC*. La perpendiculaire à la droite* (EF) *passant par le point* D *recoupe le cercle* ω *au point* R *et la droite* (AR) *recoupe le cercle* ω *au point* P*. Les cercles circonscrits aux triangles* PEC *et* PFB *se recoupent au point* Q*. Montrer que les droites* (DI) *et* (PQ) *recoupent la bissectrice extérieure de l'angle* $\widehat{ABC}$*.*

<u>*Solution de l'exercice 13*</u>



Il y a plusieurs cercles, donc les nombres complexes sont peu prometteurs (cependant, c'est possible). Si l'on désire tenter une méthode analytique, on peut donc tenter la méthode barycentrique. Examinons cette piste :

Le cercle prominent est le cercle inscrit au triangle ABC, on peut donc se convaincre qu'il est plus intéressant de choisir le triangle DEF comme triangle de référence.

Les cercles passent tous par au moins un sommet de ce triangle, on aura donc un paramètre nul dans nos équations de cercles. Le point P est défini comme le point d'intersection d'une droite et du cercle circonscrit au triangle de référence, ce qui peut être délicat et donner des expressions peu manipulables. Cependant, une fois que l'on a obtenu les coordonnées du point P, il n'est pas nécessaire d'obtenir les coordonnées du point Q, puisqu'il suffit de montrer que la point d'intersection de la droite (DI) et de la droite perpendiculaire à la droite (AI) passant par le point A appartient à l'axe radical des cercles circonscrits aux triangles PBF et PCE.
Le seule point délicat c'est que l'on risque d'avoir de mauvaises expressions du point P et donc de mauvaises équations de cercles. De plus, le point Z est défini à partir d'une droite perpendiculaire, ce qui promet en somme des calculs fastidieux. On ne peut pas en attendre moins d'un problème 6.

Essayons !

On choisit le triangle DEF comme triangle de référence, les notations a, b, c sont donc relatives à ce triangle et non au triangle ABC. On calcule les coordonnées des points A, B et C.
Le point A appartient à la tangente au cercle inscrit passant par le point F, donc ses coordonnées (x, y, z) vérifient $0 = a^2y + b^2x$. Il appartient à la tangente au cercle inscrit au point E donc $0 = a^2z + c^2x$. Ainsi, les coordonnées du point A sont $(-a^2, b^2, c^2)$. De même, les coordonnées du point B sont $(a^2, -b^2, c^2)$ et les coordonnées du point C sont $(a^2, b^2, -c^2)$.

Le point R appartient à la hauteur issue du sommet D, ses coordonnées sont donc de la forme (t, S_C, S_B). Il appartient au cercle circonscrit au triangle DEF donc t vérifie

$$0 = -a^2S_CS_B - t(b^2S_C + c^2S_B)$$

donc $t = -\frac{a^2S_CS_B}{b^2S_C+c^2S_B}$.
Les coordonnées du point R sont $(-a^2S_BS_C, S_C(b^2S_B + c^2S_C), S_B(b^2S_B + c^2S_C))$.
On cherche désormais les coordonnées du point P, défini comme le point d'intersection de la droite (AR) avec le cercle circonscrit au triangle DEF. On a dit qu'il fallait éviter de calculer le point d'intersection d'une droite qui n'est pas une cévienne avec un cercle, mais nous sommes dans un cas de force majeure. Soient (x, y, z) les coordonnées du point P, le point P est aligné avec les points R et A donc

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} -a^2 & b^2 & c^2 \\ -a^2S_BS_C & S_C(b^2S_B + c^2S_C) & S_B(b^2S_B + c^2S_C) \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= x(b^4S_B^2 - c^4S_C^2) + ya^2S_B(b^2S_B + c^2S_C - c^2S_C) - za^2S_C(b^2S_B + c^2S_C - b^2S_B) \\
&= x(b^4S_B^2 - c^4S_C^2) + a^2(yb^2S_B^2 - zc^2S_C^2) \\
&= b^2S_B^2(xb^2 + ya^2) - c^2S_C^2(xc^2 + za^2)
\end{aligned}$$

Puisque le point P appartient au cercle circonscrit au triangle DEF, il vérifie également

$$\begin{aligned}
0 &= -a^2yz - b^2zx - c^2xy \\
&= -z(a^2y + b^2x) - c^2xy \\
&= -y(za^2 + xc^2) - b^2zx
\end{aligned}$$

Ainsi, en reprenant la première équation on trouve :

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & b^2S_B^2(xb^2+ya^2)-c^2S_C^2(xc^2+za^2) \\ & = & -b^2S_B^2c^2\frac{xy}{z}+c^2S_C^2b^2\frac{zx}{y} \\ & = & -b^2c^2x\left(S_B^2\frac{y}{z}-S_C^2\frac{z}{y}\right) \end{array}$$

On a donc $(zS_C-yS_B)(zS_C+yS_B)=0$. Or on sait que la droite (AR) admet deux points d'intersection avec le cercle inscrit. Il est donc normal d'avoir deux possibilités pour les solutions de y et z. Or les coordonnées du point R vérifient $zS_C-yS_B=0$ donc les coordonnées du point P vérifient $zS_C+yS_B=0$. On cherche alors le réel x tel que les coordonnées du point P soient $(x,S_C,-S_B)$. On remplace ces coordonnées dans l'équation de cercle pour obtenir :

$$0=a^2S_CS_B+b^2S_Bx-xc^2S_C$$

donc les coordonnées du point P sont $(a^2S_CS_B,S_C(c^2S_C-b^2S_B),S_B(b^2S_B-c^2S_C))$.

On détermine désormais les équations des cercles circonscrits aux triangles PCE et PBF. On les note ω_1 et ω_2.
L'équation du cercle ω_1 est de la forme

$$0=-a^2yz-b^2zx-c^2xy+(u_1x+v_1y+w_1z)(x+y+z)$$

Le cercle ω_1 passe par le point E donc $v_1=0$. On rentre les coordonnées du point P dans l'équation de cercle, en n'oubliant pas qu'elle vérifient $-a^2yz-b^2zx-c^2xy=0$, ce qui donne :

$$0=0+(u_1a^2S_BS_C+w_1S_B(b^2S_B-c^2S_C)(a^2S_CS_B+S_C(c^2S_C-b^2S_B)+S_B(b^2S_B-c^2S_C))$$

donc

$$u_1a^2S_C=w_1(c^2S_C-b^2S_B)$$

on dispose donc d'un réel k tel que $u_1=k(c^2S_C-b^2S_B)$ et $w_1=ka^2S_C$. Pour déterminer la valeur du paramètre k on rentre les coordonnées du point C dans l'équation de cercle, ce qui donne :

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & a^2b^2c^2+c^2b^2a^2-c^2a^2b^2+2(u_1a^2-w_1c^2)S_C \\ & = & a^2b^2c^2+2kS_C(a^2(c^2S_C-b^2S_B)-a^2c^2S_C) \\ & = & a^2b^2(c^2-2kS_CS_B) \end{array}$$

donc $k=\frac{c^2}{2S_BS_C}$.

On obtient $u_1=\frac{c^2(c^2S_C-b^2S_B)}{2S_BS_C}$ et $w_1=\frac{a^2c^2}{2S_B}$.

De la même manière, en posant (u_2,v_2,w_2) les paramètres du cercle ω_2, on trouve $w_2=0$, $u_2=\frac{b^2(b^2S_B-c^2S_C)}{2S_BS_C}$ et $v_2=\frac{a^2b^2}{2S_C}$.

L'axe radical des cercles circonscrits aux triangles PEC et PFB a donc pour équation :

$$\frac{b^2S_B-c^2S_C}{S_BS_C}(c^2+b^2)x-\frac{a^2b^2}{S_C}y+\frac{a^2c^2}{S_B}z=0$$

ou encore

$$(b^2S_B-c^2S_C)(b^2+c^2)x-a^2b^2S_By+a^2c^2S_Cz=0$$

On détermine désormais les coordonnées du point Z, le point d'intersection des de la droite (DI) et de la perpendiculaire à la droite (AI) passant par le point A. Il suffira ensuite de vérifier que le point Z appartient bien à l'axe radical des cercles circonscrits aux triangles PFB et PEC.
Le point Z appartient à la cévienne (ID) et on sait que la coordonnées du point I, centre du cercle circonscrit au triangle de référence, sont (a^2S_A, b^2S_B, c^2S_C). Ainsi, les coordonnées du point Z sont de la forme (t, b^2S_B, c^2S_C). De plus les droites (AI) et (EF) sont perpendiculaires, mais on sait que les conditions de perpendicularité sont peu séduisantes pour le calcul. On va plutôt utiliser que les droites (ZA) et (EF) sont toutes les deux perepndiculaires à la droite (AI), elle sont donc parallèles ! Les points A, Z et $P_{E,F}$ sont donc alignés. Puisque les coordonnées du point $P_{E,F}$ sont $(0, 1, -1)$, on obtient

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -a^2 & b^2 & c^2 \\ t & b^2S_B & c^2S_C \end{vmatrix} = -a^2(b^2S_B + c^2S_C) + t(c^2 + b^2)$$

et les coordonnées du point Z sont $\left(\frac{a^2(b^2S_B+c^2S_C)}{b^2+c^2}, b^2S_B, c^2S_C\right)$. Il reste à vérifier que le point Z appartient à l'axe radical désiré. Or :

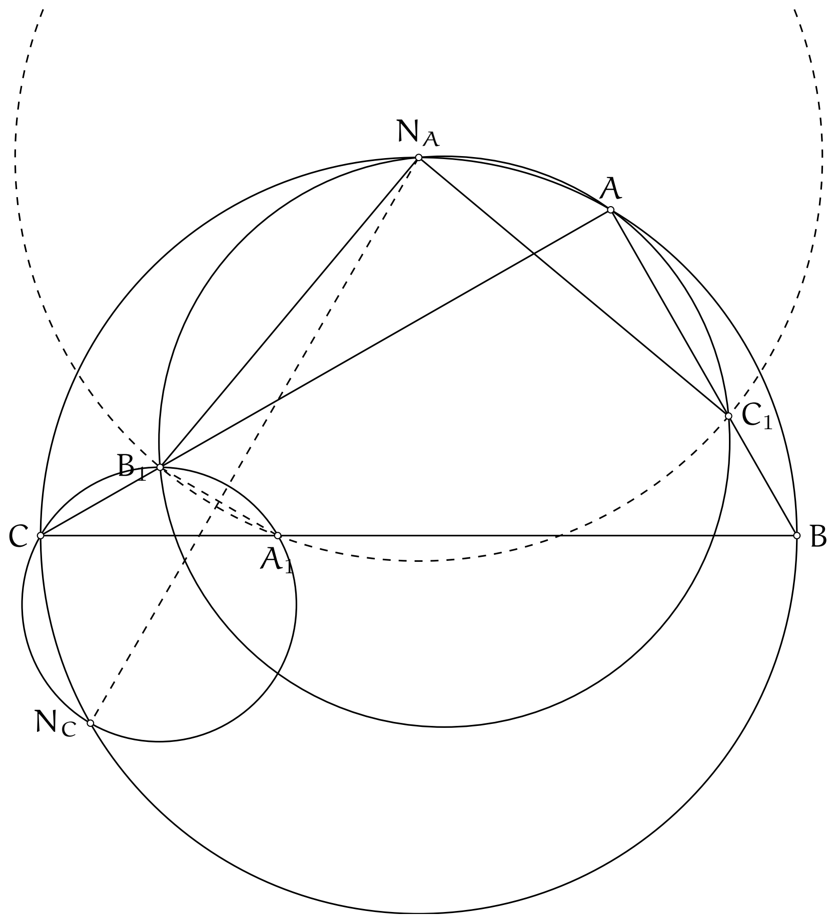
$$\begin{aligned} & (b^2S_B - c^2S_C)(b^2 + c^2) \cdot \tfrac{a^2(b^2S_B+c^2S_C)}{b^2+c^2} - a^2b^2S_Bb^2S_B + a^2c^2S_Cc^2S_C \\ = \; & a^2(b^4S_B^2 - c^4S_C^2) - a^2b^4S_B^2 + a^2c^4S_C^2 \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

ce qui signifie bien que le point Z appartient à la droite (PQ) et termine le problème.

Remarquons que même en employant la méthode analytique, ce problème nécessitait beaucoup d'idées et de technique, que ce soit pour simplifier les calculs ou même pour les mener à bien.

Exercice 14. *(IMO 2013 P3) Soit* ABC *un triangle. Le cercle exinscrit au triangle* ABC *opposé au sommet* A *est tangent au côté* BC *au point* A_1*. On définit de la même façon les points* A_1 *et* B_1*. On suppose que le centre du cercle circonscrit au triangle* $A_1B_1C_1$ *appartient au cercle circonscrit au triangle* ABC*. Montrer que le triangle* ABC *est rectangle.*

Solution de l'exercice 14

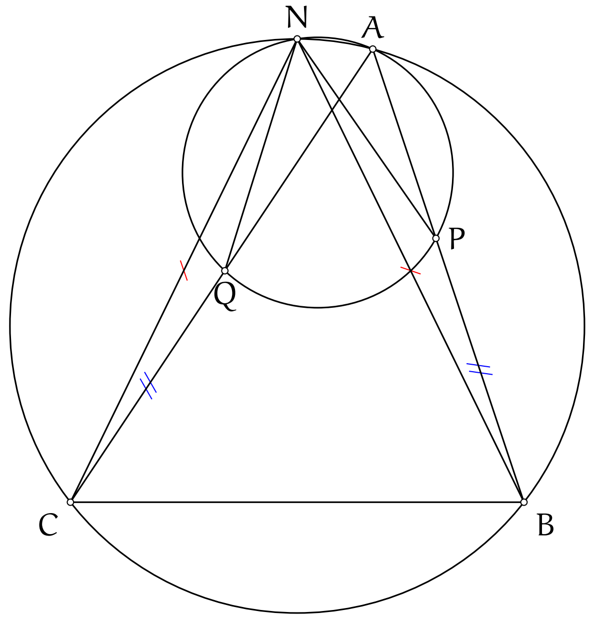


On commence par effectuer des remarques d'ordre géométrique. Les coordonnées complexes ou barycentriques ne privilégient pas de sommet, c'est donc géométriquement qu'il faut trouver une façon de privilégier l'un des trois sommets et déterminer le sommet en lequel le triangle sera rectangle.

L'hypothèse interpelle évidemment. Mais ne connaît-on pas déjà un point appartenant à la médiatrice du segment $[B_1C_1]$ et au cercle circonscrit au triangle ABC ? Nous allons utiliser en effet le lemme suivant (et surtout sa réciproque) :

Lemme 1. *Soit* ABC *un triangle et* N *le pôle Nord du sommet* A*. Un cercle passant par les points* A *et* N *coupe le segment* $[AB]$ *au point* P *et le segment* $[AC]$ *au point* Q*. Alors* $PB = QC$*.*

Réciproquement, si ABC *est un triangle et que* P *et* Q *sont situés sur les côtés* $[AB]$ *et* $[AC]$ *de telle sorte que* $PB = QC$*, alors le point* N *est le centre de la similitude envoyant les points* P *et* Q *sur les points* B *et* C *et on a alors* $NP = NQ$*.*



Démonstration.

Pour le premier résultat, on note que le point N est le centre de la similitude envoyant les points P et Q sur les points B et C par hypothèse. Ainsi les triangles NPB et NQC sont semblables et puisque $NB = NC$, ils sont isométriques et $PB = QC$.

Pour le deuxième résultat, on remonte la preuve précédente : soit N' le centre de la similitude envoyant les points P et Q sur les sommets B et C. Alors N' est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et APQ. Il vérifie que les triangles $N'PB$ et $N'QC$ sont semblables. Puisque $PB = QC$, les triangles sont isométriques donc $N'B = N'C$, donc le point N' appartient aussi à la médiatrice du segment $[BC]$. Ainsi, $N' = N$. Le point N vérifie donc $NP = NQ$. □

Il se trouve que $B_1C = C_1B$, d'après le lemme, cela signifie que le pôle Nord N_A du sommet A vérifie $NB_1 = NC_1$. Les pôles Nords des sommets du triangle ABC sont donc sur le cercle circonscrit au triangle ABC et sur les médiatrices des côtés du triangle $A_1B_1C_1$. Ainsi, le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$, puisqu'il appartient au cercle circonscrit du triangle ABC, est l'un des points N_A, N_B ou N_C, les pôles Nords du triangle.

On suppose donc que le centre est le sommet N_A, et l'on va montrer que le triangle ABC est rectangle en A. Pour cela, il faut exploiter le fait que le point N_A est sur la médiatrice du segment $[A_1B_1]$. Comme c'est le cas du point N_C, cela signifie que les droites (N_AN_C) et (A_1B_1) sont perpendiculaires. C'est cette condition que nous allons exploiter pour espérer trouver $a^2 = b^2 + c^2$. On procède avec la méthode barycentrique pour cela. On prend ABC pour triangle de référence et en appliquant la trinsformation de Ravi, les coordonnées des points A_1 et B_1 sont respectivement $(0, y, z)$ et $(x, 0, z)$. Le point N_A appartient à la bissectrice extérieure issue du sommet A, ses coordonnées sont donc de la forme $(t, -b, c)$. puisqu'il appartient au cercle circonscrit au triangle ABC, on a de plus

$$0 = a^2bc - b^2tc + c^2bt$$

soit $t = \frac{a^2}{b-c}$. Les coordonnées du point N_A sont donc $(a^2, bc - b^2, bc - c^2)$. De même, les coordonnées du point N_C sont $(ab - a^2, ab - b^2, c^2)$.

On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$. La somme des coordonnées du point A_1 vaut a et celle des coordonnées du point B_1 vaut b. Ainsi, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$ sont

$$\left(\frac{x}{b}, -\frac{y}{a}, \frac{z}{b} - \frac{z}{a}\right)$$

qui est colinéaire au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(xa, -yb, z(a-b))$.
On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{N_AN_C}$. La somme des coordonnées du point N_A vaut

$$a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c) = 4yz$$

De même, la somme des coordonnées du point N_C vaut $4xy$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{N_CN_A}$ valent donc

$$\left(\frac{xa^2 - z(ab-a^2)}{4xyz}, \frac{x(bc-b^2) - z(ab-b^2)}{4xyz}, \frac{x(bc-c^2) - zc^2}{4xyz}\right)$$

Le numérateur de la première coordonnée vaut

$$a^2(x+z) - abz = a^2b - abz = ab(a-z) = aby$$

Le numérateur de la deuxième coordonnée vaut

$$\begin{array}{rcl} x(bc-b^2) - z(ab-b^2) & = & \frac{1}{2}(b+c-a)b(c-b) - \frac{1}{2}(a+b-c)b(a-b) \\ & = & \frac{b}{2}(c^2 - b^2 - ac + ab - a^2 + b^2 + ca - bc) \\ & = & \frac{b}{2}(c^2 + ab - a^2 - bc) \\ & = & \frac{b}{2}(c-a)(c+a-b) \\ & = & b(c-a)y \end{array}$$

Le numérateur de la troisième coordonnée vaut

$$xbc - c^2(x+z) = xbc - c^2b = bc(x-c) = -bcy$$

Ainsi, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{N_CN_A}$ sont

$$\left(\frac{ab}{4xz}, \frac{b(c-a)}{4xz}, -\frac{bc}{4xz}\right)$$

qui est colinéaire au vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(a, c-a, -c)$.
On utilise finalement l'hypothèse que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, et on espère en sortir une condition du type $a^2 - b^2 - c^2 = 0$.

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \vec{u} \cdot \vec{v} \\ & = & a^2[ybc + z(a-b)(c-a)] + b^2[-cxa + za(a-b)] + c^2[xa(c-a) - yba] \\ & = & a\Big(a[bc(y-z) + za(c+b-a)] + b^2(z(a-b) - cx) + c^2(x(c-a) - yb)\Big) \end{array}$$

On calcule séparément chaque terme de la parenthèse :

$$\begin{aligned}
a[bc(y-z)+za(c+b-a)] &= \tfrac{a}{2}(2bc(c-b)+a(a-c+b)(b-(a-c)) \\
&= \tfrac{a}{2}(2bc(c-b)+ab^2-a(a-c)^2) \\
&= \tfrac{a}{2}(2bc(c-b)+ab^2-a^3+2a^2c-ac^2) \\
&= \tfrac{a}{2}(2bc(c-b)-a(a^2-b^2-c^2)-2ac^2+2a^2c) \\
&= \tfrac{a}{2}(-a(a^2-b^2-c^2)+2c(a^2-ac+bc-b^2)) \\
&= -\tfrac{a^2}{2}(a^2-b^2-c^2)+ac(a^2-ac+bc-b^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b^2(z(a-b)-cx) &= \tfrac{b^2}{2}((a+b-c)(a-b)-c(b+c-a)) \\
&= \tfrac{b^2}{2}(a^2-b^2-c(a-b)-c(b-a)-c^2) \\
&= \tfrac{b^2}{2}(a^2-b^2-c^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c^2(x(c-a)-yb) &= \tfrac{c^2}{2}((b+c-a)(c-a)-(a+c-b)b) \\
&= \tfrac{c^2}{2}(bc-ba+c^2-2ca+a^2-ba-bc+b^2) \\
&= \tfrac{c^2}{2}(a^2-b^2-c^2+2(b^2+c^2-ab-ac)
\end{aligned}$$

Ainsi la somme totale dans la parenthèse est nulle d'une part et vaut d'autre part :

$$\begin{aligned}
0 &= \tfrac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2-c^2)+ac(a^2-ac+bc-b^2)+c^2(b^2+c^2-ab-ac) \\
&= \tfrac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2-c^2)+c(a^3-a^2c+abc-ab^2+c(b^2+c^2)-abc-ac^2) \\
&= -\tfrac{1}{2}(a^2-b^2-c^2)^2+c(c(b^2+c^2-a^2)+a(a^2-b^2-c^2)) \\
&= (a^2-b^2-c^2)(\tfrac{b^2+c^2-a^2}{2}+c(a-c)) \\
&= \tfrac{1}{2}(a^2-b^2-c^2)(b^2-(c-a)^2)
\end{aligned}$$

Puisque $b^2-(c-a)^2=(b-c+a)(b+c-a)=4xz\neq 0$, on trouve bien $a^2-b^2-c^2=0$, signifiant que le triangle ABC est rectangle en A, ce qui termine le problème.