

COUPE ANIMATH D'AUTOMNE

Mercredi 7 octobre 2020

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Merci de lire attentivement les instructions figurant en page 2 de ce document.

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
Chaque exercice est noté sur 7 points.
- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ **Pour les exercices 1, 2 et 9**, seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.
- ▷ **À part dans les exercices 1, 2 et 9**, on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.
- ▷ Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés, il faut tracer la droite qui passe par ces points. **Le respect de cette consigne rapportera automatiquement un point.**

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies

- ▷ de préférence par voie électronique, via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

<http://monge.univ-mlv.fr/~juge/animath/>

- ▷ si nécessaire, par voie postale, à l'adresse suivante :

Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75005 Paris

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)
contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer le nombre

$$P = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{29}{28} \times \frac{30}{29}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 2. Alexie et Baptiste possèdent chacun un immeuble. Chaque étage du bâtiment d'Alexie possède 3 salles de bains et 2 chambres. Baptiste quant à lui, possède 4 salles de bains et 3 chambres par étage. Il y a au total (c'est à dire dans les deux bâtiments) 25 salles de bains et 18 chambres. Trouver le nombre d'étages des immeubles d'Alexie et Baptiste.

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 3. Soit $ABCD$ un carré et E le point du segment $[BD]$ tel que $EB = AB$. On définit le point F comme le point d'intersection des droites (CE) et (AD) . Trouver la valeur de l'angle \widehat{FEA} .

Exercice 4. Noémie et Tristan sont des bergers. Chacun possède un nombre de moutons qui est un carré parfait, c'est-à-dire un entier qui peut s'écrire de la forme $n^2 = n \times n$ avec n un entier positif ou nul. On note donc a^2 le nombre de moutons de Noémie et b^2 celui de Tristan. Après un rapide comptage du nombre total de moutons, ils déduisent que $97 \leq a^2 + b^2 \leq 108$. Déterminer le nombre de moutons de chacun en sachant que :

1. Noémie a strictement plus de moutons que Tristan;
2. chacun d'eux a au moins 2 moutons;
3. le nombre total de moutons $a^2 + b^2$ est impair.

Exercice 5. Soit $ABCD$ un trapèze (non croisé) tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles. Notons E le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Montrer que l'aire du triangle ADE est égale à l'aire du triangle BCE .

Exercice 6. On pose 12 cailloux sur un échiquier à 8 lignes et 8 colonnes. Chaque caillou a été posé sur une des 64 cases de l'échiquier (avec au plus un caillou par case). Montrer qu'il est possible de colorier en rouge 4 lignes et 4 colonnes de façon à ce que chacun des 12 cailloux soit sur une case rouge.

Exercice 7. Soit k un entier strictement positif. Pour tout réel x , le nombre réel $|x|$ est la valeur absolue de x , qui vaut x si x est positif, $-x$ si x est négatif. Trouver le nombre de triplets (x, y, z) où x, y, z sont des entiers tels que $x + y + z = 0$ et $|x| + |y| + |z| = 2k$.

Exercice 8. Soit S un ensemble inclus dans $\{1, 2, 3, \dots, 199, 200\}$. On dit que S est *joli* si, pour tous les éléments a et b de S , le nombre $a - b$ n'est pas un nombre premier. Quel est le nombre maximal d'éléments d'un joli ensemble inclus dans $\{1, 2, 3, \dots, 199, 200\}$?

Note : On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tout élément de A est aussi un élément de B .

Exercices lycéens

Exercice 9. Alexie et Baptiste possèdent chacun un immeuble. Chaque étage du bâtiment d'Alexie possède 3 salles de bains et 2 chambres. Baptiste quant à lui, possède 4 salles de bains et 3 chambres par étage. Il y a au total 25 salles de bains et 18 chambres. Trouver le nombre d'étages des immeubles d'Alexie et Baptiste.

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 10. Soit $ABCD$ un carré et E le point du segment $[BD]$ tel que $EB = AB$. On définit le point F comme le point d'intersection des droites (CE) et (AD) . Trouver la valeur de l'angle \widehat{FEA} .

Exercice 11. Noémie et Tristan sont des bergers. Chacun possède un nombre de moutons qui est un carré parfait, c'est-à-dire un entier qui peut s'écrire de la forme $n^2 = n \times n$ avec n un entier positif ou nul. On note donc a^2 le nombre de moutons de Noémie et b^2 celui de Tristan. Après un rapide comptage du nombre total de moutons, ils déduisent que $97 \leq a^2 + b^2 \leq 108$. Déterminer le nombre de moutons de chacun en sachant que :

1. Noémie a strictement plus de moutons que Tristan ;
2. chacun d'eux a au moins 2 moutons ;
3. le nombre total de moutons $a^2 + b^2$ est impair.

Exercice 12. On place 9 entiers dans les cases d'une grille 3×3 de telle sorte que la somme des nombres d'une colonne ou d'une ligne soit toujours impaire. Quelles valeurs peut prendre le nombre de cases paires d'une telle configuration ?

Exercice 13. Pour tout nombre réel x , on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x , puis on appelle *partie fractionnaire* de x le nombre $\langle x \rangle$ défini comme $\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$. Combien y a-t-il de réels x vérifiant $1 \leq x \leq 10$ et $\langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle$?

Exercice 14. Trouver les entiers n supérieurs ou égaux à 2 tels que, si on note a le plus petit diviseur premier de n , on peut trouver un diviseur positif de n noté d tel que $n = a^3 + d^3$.

Exercice 15. Soit $ABCD$ un parallélogramme d'aire 1 et M un point appartenant au segment $[BD]$ tel que $MD = 3MB$. On note N le point d'intersection des droites (AM) et (CB) . Calculer l'aire du triangle MND .

Exercice 16. Suzanne multiplie deux entiers dont la différence vaut 5 et Martin multiplie deux entiers dont la différence vaut 8. Ils obtiennent le même résultat, que l'on note C . Quelles sont les valeurs possibles de C ?

Exercice 17. Est-il possible de placer 10 points bleus, 10 points rouges et 10 points verts dans le plan tel que les distances entre points soient deux à deux distinctes et que

- ▷ pour chaque point bleu, le deuxième point le plus proche soit rouge ;
- ▷ pour chaque point rouge, le deuxième point le plus proche soit vert ;
- ▷ pour chaque point vert, le deuxième point le plus proche soit bleu ?