PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 25 NOVEMBRE 2020

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2006 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Pour chaque exercice, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n'est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.
contact-pofm@animath.fr

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit ABC un triangle et Soit E, F et G les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. Montrer que l'aire du triangle ABC vaut 4 fois l'aire du triangle EFG.

Exercice 2. Soit $ABCD$ un quadrilatère et Soit M, N, P et Q les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$. Montrer que si $ABCD$ est un rectangle alors le quadrilatère $MNPQ$ est un losange, et que si $ABCD$ est un losange alors le quadrilatère $MNPQ$ est un rectangle.

Exercice 3. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle. On suppose que les diagonales (AC) et (BD) de ce quadrilatère sont perpendiculaires et on note P leur point d'intersection. Montrer que la droite perpendiculaire à la droite (DC) passant par le point P coupe le segment $[AB]$ en son milieu.

Exercice 4. Soit ABC un triangle et soit Ω son cercle circonscrit. Soit P un point sur la tangente en A au cercle Ω. On note E et D les projections orthogonales de P sur les côtés AC et AB. Montrer que la droite (ED) est perpendiculaire à la droite (BC).

Exercice 5. Soit ABC un triangle équilatéral et P un point à l'intérieur du triangle. On note D, E et F les projections orthogonales du point P sur les trois còtés du triangle. Montrer que $PE + PD + PF$ a toujours la même valeur quelque soit la position du point P.

Exercice 6. Soit ABC un triangle. Soit O, H respectivement le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle ABC. on note O' le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point O et de l'arc BC du cercle circonscrit au triangle ABC ne contenant pas le point A. Montrer que la droite (AO') est la bissectrice de l'angle $\widehat{HAO}$.

Exercice 7. Soit ω_1 et ω_2 deux cercles qui se coupent en deux points qu'on note P et Q. Soit t une tangente commune aux cercles ω_1 et ω_2, de telle sorte que la droite t est tangente au cercle ω_1 au point A et au cercle ω_2 au point B et on suppose que le point P est plus proche de la droite t que le point Q. On note C le second point d'intersection de la tangente en P au cercle ω_1 avec le cercle ω_2. La droite (AP) et la droite (BC) se coupent au point R. Montrer que le cercle circonscrit au triangle PRQ est tangent aux droites (BP) et (BC).

Exercice 8. Soit ABC un triangle rectangle en C. On note N le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC. Les bissectrices des angles $\widehat{NCA}$ et $\widehat{BCN}$ coupent la droite (AB) respectivement en K et L. Soit S et T les centres des cercles inscrits des triangles BCN et NCA. Montrer que les points S, K, T et L sont cocycliques.

Exercice 9. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique avec des côtés opposés non parallèles. Soit X le point d'intersection des droites (AB) et (CD) et soit Y le point d'intersection des droites (AD) et (BC). La bissectrice de l'angle $\widehat{DYC}$ coupe la droite (AB) au point E et la droite (CD) au point F. La bissectrice de l'angle $\widehat{BXC}$ coupe la droite (BC) au point G et la droite (AD) au point H. Montrer que $GF{=}EH$.

Exercices seniors

Exercice 10. Soit ABC un triangle. On note P le point d'intersection de la droite (AC) avec la tangente en B au cercle circonscrit du triangle ABC. On note B' et C' les symétriques respectifs des points B et C par rapport au point P. Montrer que les points B, A, B' et C' sont cocycliques.

Exercice 11. Soit ABC un triangle rectangle en C. Soit K le milieu du segment $[AB]$, et soit M un point du segment $[BC]$ tel que $MB = 2MC$. Montrer que $\widehat{MAB} = \widehat{MKC}$.

Exercice 12. Soit ABC un triangle acutangle tel que $|AC| > |BC|$. Soit H l'orthocentre du triangle ABC, N le pied de la hauteur issue du sommet B et P le milieu du segment $[AB]$. Les cercles circonscrits aux triangles ABC et CNH se recoupent au point D. Montrer que les points D, N, P et B sont cocycliques.

Exercice 13. Soit ABC un triangle et D, E et F les points de contact du cercle inscrit au triangle ABC respectivement avec les côtés BC, CA et AB. Soit P un point tel que $PF = BF$ et $\widehat{BFP} = \widehat{BAC}$ et on suppose que les points P et C sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AB). Soit Q un point tel que $QE = CE$ et $\widehat{BFP} = \widehat{QEC} = \widehat{BAC}$ et on suppose que les points B et Q sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Montrer que les points P, D et Q sont alignés.

Exercice 14. Soit ABC un triangle et soit H son orthocentre. On note B' et C' deux points sur les droites (HB) et (HC) tels que $(B'C')$ soit parallèle à (BC). Soit ω le cercle circonscrit au triangle $B'HC'$. On suppose que le centre du cercle ω appartient au segment $[BC]$. Montrer que le cercle ω est tangent au cercle circonscrit du triangle ABC.

Exercice 15. Soit ABC un triangle. On note H son orthocentre et D, E et F les pieds des hauteurs issues des sommets A, B et C. On note F' le symétrique du point F par rapport au point B et on note E' le symétrique du point E par rapport au point C. On note X le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle $AF'E'$ avec la droite (AD). Montrer que $HX = 4 \times HD$.

Exercice 16. Soit $ABCD$ un quadrilatère vérifiant que $\widehat{CBA} = 90°$, les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires, et $BC = CD$ et $AB = AD$. Soit E et F deux points sur les droites (AB) et (AD). Soit P et Q deux points sur le segment $[EF]$ tels que $\dfrac{AE}{EP} = \dfrac{AF}{FQ}$. On note X et Y les projections orthogonales respectives des points B et D sur les droites (CP) et (CQ). Montrer que les points P, Q, Y et X sont cocycliques.

Exercice 17. Soit ABC un triangle et Soit A', B' et C' des points appartenant respectivemen aux segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soit concourantes. On note Γ le cercle circonscrit au triangle ABC. Soit ω_A le cercle tangent au cercle Γ et tangent au segment $[BC]$ au point A'. Soit P_A le point de tangence des cercles ω_A et Γ. Soit ω_B le cercle tangent au cercle Γ et tangent au segment $[CA]$ au point B'. Soit P_B le point de tangence des cercles ω_B et Γ. Soit ω_C le cercle tangent au cercle Γ et tangent au segment $[AB]$ au point C'. Soit P_C le point de tangence des cercles ω_C et Γ. Montrer que les droites (AP_A), (BP_B) et (CP_C) sont concourantes.

Exercice 18. Soit ABC un triangle et Soit D, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés BC, CA et AB. On note M le milieu du segment $[EF]$. On note G le point d'intersection des droites (BE) et (CF). Soit B' le symétrique du point F par rapport au point B. Soit C' le symétrique du point E par rapport au point C. Montrer que la droite (MG) est perpendiculaire à la droite $(B'C')$.