COUPE ANIMATH DE PRINTEMPS

Samedi 6 juin 2020

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
Chaque exercice est noté sur 7 points.

▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

▷ **Pour les exercices 1, 2 et 9,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaura 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

▷ **À part dans les exercices 1, 2 et 9,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques : cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

▷ Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés, il faut tracer la droite qui passe par ces points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://monge.univ-mlv.fr/~juge/pofm/form/`

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM),
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

`contact-pofm@animath.fr`

Exercices collégiens

Exercice 1. Donner la valeur de $0 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \ldots - 49 + 50$.

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 2. On dispose d'un jeu contenant 52 cartes. Chaque carte comporte une *valeur* parmi « 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi » ainsi qu'une *couleur* parmi « cœur, carreau, pique, trèfle », de telle sorte que, pour chaque valeur et chaque couleur, le jeu contient une unique carte comportant cette valeur *et* ayant cette couleur. Une *main de* 5 *cartes* est un choix de 5 cartes de ce jeu, sans se soucier de l'ordre dans lequel on choisit les cartes. Combien existe-t-il de mains de 5 cartes qui contiennent quatre cartes ayant la même valeur ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 3. Soit ABC un triangle isocèle en A. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté $[AC]$ en D. On suppose que $BD = DA$. Déterminer les angles du triangle.

Exercice 4. Un nombre apparait sur un écran d'ordinateur. On sait que si x apparait sur l'écran, le nombre $x^2 - 2x + 1$ apparaît juste après. Si le premier nombre à apparaitre est 2, quel est le 2020-ème nombre à apparaître ?

Exercice 5. Soit ABC un triangle dont les angles sont tous aigus. Soit D le pied de la hauteur issue du sommet A. Soit E le symétrique du point D par rapport à la droite (AC). La perpendiculaire à la droite (AE) passant par B coupe la droite (AC) en un point noté F. Démontrer que le triangle FBC est isocèle en B.

Exercice 6.

1) Alice désire colorier les entiers entre 2 et 8 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 8 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 8$ en utilisant k couleurs.
2) Alice désire colorier les entiers entre 2 et 31 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 31 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 31$ en utilisant k couleurs.

Exercice 7. Le jeu de *mathinal* est un jeu qui se joue à n joueurs (avec $n \geqslant 2$), n cartes vertes et n cartes rouges. Initialement, chaque joueur prend une carte verte et une carte rouge, et écrit un entier sur chacune de ces deux cartes (il a le droit d'écrire le même entier sur les deux cartes). Puis chaque joueur calcule la somme des numéros de ses deux cartes, et on note M la plus grande somme parmi les sommes des n joueurs.

Ensuite, les joueurs redistribuent les cartes rouges comme suit : le joueur possédant la carte verte de plus petit numéro reçoit la carte rouge de plus grand numéro, puis le joueur possédant la carte verte de deuxième plus petit numéro reçoit la carte rouge de deuxième plus grand numéro, et ainsi de suite. Chaque joueur calcule alors de nouveau la somme des numéros de ses deux cartes, et on note M' la plus grande somme parmi les sommes des n joueurs.

1) Est-il possible d'avoir $M' < M$?
2) Est-il possible d'avoir $M' > M$?

Exercice 8. Déterminer les entiers $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 3$ ayant la propriété suivante : m et n ont chacun k diviseurs positifs et, si l'on note $d_1 < \ldots < d_k$ les diviseurs positifs de m (avec $d_1 = 1$ et $d_k = m$) et $d'_1 < \ldots < d'_k$ les diviseurs positifs de n (avec $d'_1 = 1$ et $d'_k = n$), alors $d'_i = d_i + 1$ pour tout entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant k - 1$.

Exercices lycéens

Exercice 9. On dispose d'un jeu contenant 52 cartes. Chaque carte comporte une *valeur* parmi « 1, $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, valet, dame, roi » ainsi qu'une *couleur* parmi « cœur, carreau, pique, trèfle », de telle sorte que, pour chaque valeur et chaque couleur, le jeu contient une unique carte comportant cette valeur *et* ayant cette couleur. Une *main de* 5 *cartes* est un choix de 5 cartes de ce jeu, sans se soucier de l'ordre dans lequel on choisit les cartes. Combien existe-t-il de mains de 5 cartes qui contiennent quatre cartes ayant la même valeur ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 10. Soit ABC un triangle isocèle en A. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté $[AC]$ en D. On suppose que $BD = DA$. Déterminer les angles du triangle ABC.

Exercice 11.

1) Alice désire colorier les entiers entre 2 et 8 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 8 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 8$ en utilisant k couleurs.
2) Alice désire colorier les entiers entre 2 et 31 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 31 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 31$ en utilisant k couleurs.

Exercice 12. Soit $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ deux listes de réels telles que $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \geqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i$. On pose alors $P = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(x_i - y_i)$ et $G = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i - \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i$. Démontrer que $P \leqslant G \leqslant 2P$.

Étant donnés des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, le nombre $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$ désigne le plus petit réel parmi les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Le nombre $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$ désigne le plus grand réel parmi les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Exercice 13. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on nomme $s(n)$ la somme des chiffres de n. Déterminer tous les entiers $n \geqslant 0$ tels que $n \leqslant 2s(n)$.

Exercice 14. Déterminer les entiers $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 3$ ayant la propriété suivante : m et n ont chacun k diviseurs positifs et, si l'on note $d_1 < \ldots < d_k$ les diviseurs positifs de m (avec $d_1 = 1$ et $d_k = m$) et $d'_1 < \ldots < d'_k$ les diviseurs positifs de n (avec $d'_1 = 1$ et $d'_k = n$), alors $d'_i = d_i + 1$ pour tout entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant k - 1$.

Exercice 15. Soit $ABCD$ un carré et soit S un point à l'extérieur du carré $ABCD$ tel que le triangle BCS soit équilatéral. On note N le milieu du segment $[AS]$ et H le milieu du segment $[CD]$. Soit P le milieu du segment $[BS]$.

1) Calculer l'angle $\widehat{BPN}$.
2) Calculer l'angle $\widehat{NHC}$.

Exercice 16. La somme de certains entiers positifs (pas forcément distincts) inférieurs ou égaux à 10 vaut S. Trouver toutes les valeurs de S telles que, quels que soient ces entiers, ils peuvent **toujours** être partitionnés en deux groupes, chacun de somme inférieure ou égale à 70.

Exercice 17. Soit $k > 1$ un entier positif. Déterminer le plus petit entier n tel pour lequel on peut colorier certaines cases d'un tableau $n \times n$ en noir de telle sorte que deux cases noires n'aient pas de côté ou de sommet en commun et chaque ligne et chaque colonne possède exactement k cases noires.