Coupe Animath de Printemps

Samedi 6 juin 2020

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
Chaque exercice est noté sur 7 points.

▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

▷ **Pour les exercices 1, 2 et 9,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

▷ **À part dans les exercices 1, 2 et 9,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

▷ Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés, il faut tracer la droite qui passe par ces points. **Le respect de cette consigne rapportera automatiquement un point.**

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://monge.univ-mlv.fr/~juge/pofm/form/`

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

`contact-pofm@animath.fr`

Exercices collégiens

Exercice 1. Donner la valeur de $0-1+2-3+4-5+\ldots-49+50$.
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 1 On regroupe les termes deux par deux :

$$0+(-1+2)+(-3+4)+(-5+6)+\ldots+(-49+50)$$

Chaque soustraction à l'intérieur d'une parenthèse vaut 1 et il y a $\frac{50}{2}=25$ telles parenthèses. Ainsi, la somme vaut 25.

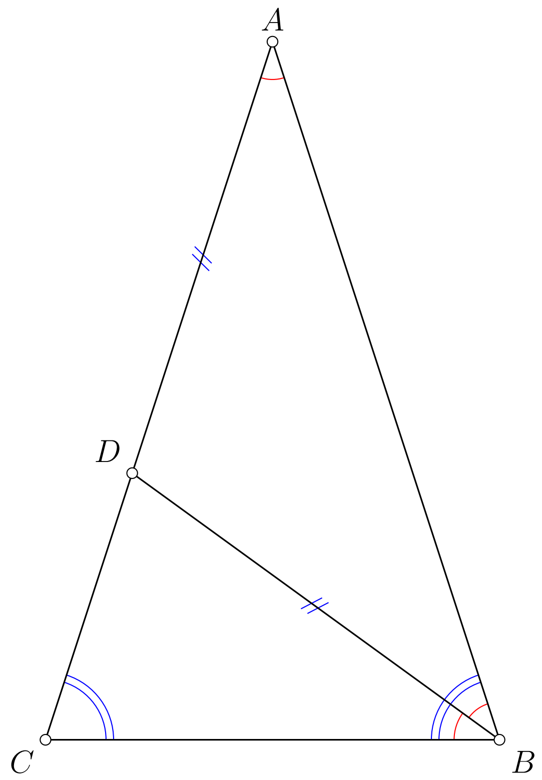
Exercice 2. On dispose d'un jeu contenant 52 cartes. Chaque carte comporte une *valeur* parmi « 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi » ainsi qu'une *couleur* parmi « cœur, carreau, pique, trèfle », de telle sorte que, pour chaque valeur et chaque couleur, le jeu contient une unique carte comportant cette valeur *et* ayant cette couleur. Une *main de 5 cartes* est un choix de 5 cartes de ce jeu, sans se soucier de l'ordre dans lequel on choisit les cartes. Combien existe-t-il de mains de 5 cartes qui contiennent quatre cartes ayant la même valeur ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 2 Pour choisir un main de 5 cartes dont 4 cartes ont la même valeur, il faut d'abord choisir la valeur en question. Il y a pour cela 13 choix puisqu'il y a 13 valeur. Il y a alors 48 choix pour la cinquième carte. On a donc en tout $13 \times 48 = 624$ mains possibles.

Exercice 3. Soit ABC un triangle isocèle en A. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté $[AC]$ en D. On suppose que $BD = DA$. Déterminer les angles du triangle.

Solution de l'exercice 3



Appelons $\alpha = \widehat{ABD}$. Examinons les différents angles de la figure et essayons de la exprimer en fonction de α. Puisque la droite (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CBA}$, on sait que $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ et donc $\widehat{ABC} = 2\widehat{ABD} = 2\alpha$. Puisque $DB = DA$, le triangle ADB est isocèle au point D, ce qui se traduit par le fait que $\widehat{BAD} = \widehat{ABD}$ donc $\widehat{BAC} = \widehat{DAB} = \alpha$. Enfin, le triangle ABC est isocèle au point A, ce qui signifie que $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 2\widehat{ABD} = 2\alpha$. Puisque la somme des angles dans le triangle ABC vaut $180°$, on trouve

$$180° = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 5\alpha$$

Ainsi, $\alpha = \frac{180°}{5} = 36°$. Cela signifie que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72°$ et $\widehat{BAC} = 36°$.

Exercice 4. Un nombre apparait sur un écran d'ordinateur. On sait que si x apparait sur l'écran, le nombre $x^2 - 2x + 1$ apparaît juste après. Si le premier nombre à apparaitre est 2, quel est le 2020-ème nombre à apparaître ?

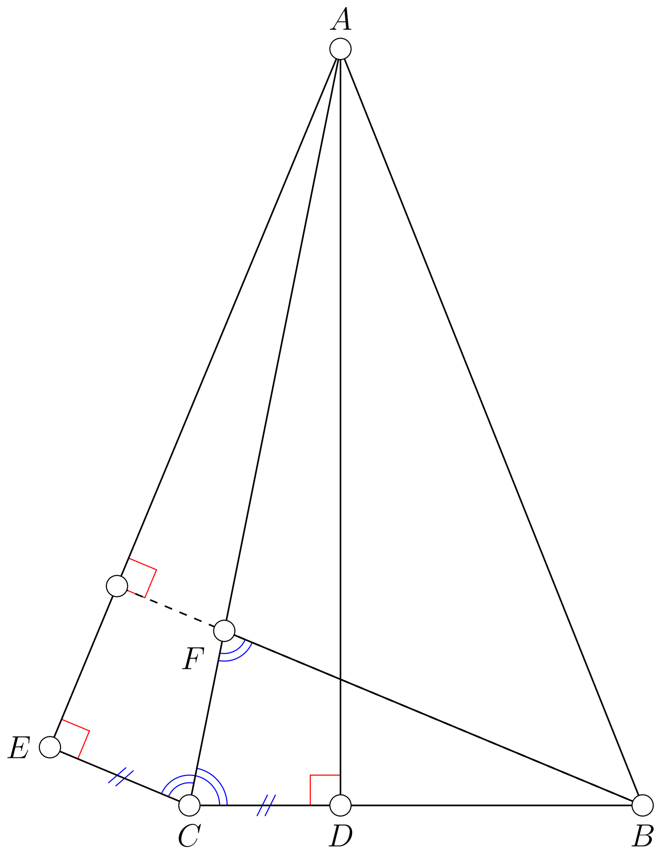
Solution de l'exercice 4 Commençons par regarder les premières valeurs affichées par l'ordinateur :

- ▷ Le premier nombre est 2.
- ▷ Le second nombre est $2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$
- ▷ Le troisième nombre est $1^2 - 2 \times 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$
- ▷ Le quatrième nombre est $0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1$
- ▷ Le cinquième nombre est $1^2 - 2 \times 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$
- ▷ Le sixième nombre est $0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1$
- ▷ Le septième nombre est $1^2 - 2 \times 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

On voit que les nombres qui apparaissent sont dans l'ordre $2, 1, 0, 1, 0, 1, 0$. Comme après un 0 il y a forcément $0^2 - 2 \times 0 + 1 = 1$ et après un 1 il y a forcément $1^2 - 2 \times 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$, on va avoir une alternance de 0 et de 1. Comme 1 apparait en deuxième, tout les nombres apparaissant à un rang pair seront des 1 donc le 2020-ième nombre vaut 1.

Exercice 5. Soit ABC un triangle dont les angles sont tous aigus. Soit D le pied de la hauteur issue du sommet A. Soit E le symétrique du point D par rapport à la droite (AC). La perpendiculaire à la droite (AE) passant par B coupe la droite (AC) en un point noté F. Démontrer que le triangle FBC est isocèle en B.

Solution de l'exercice 5



Pour montrer que le triangle FBC est isocèle au point B, nous allons montrer que $\widehat{CFB} = \widehat{FCB}$

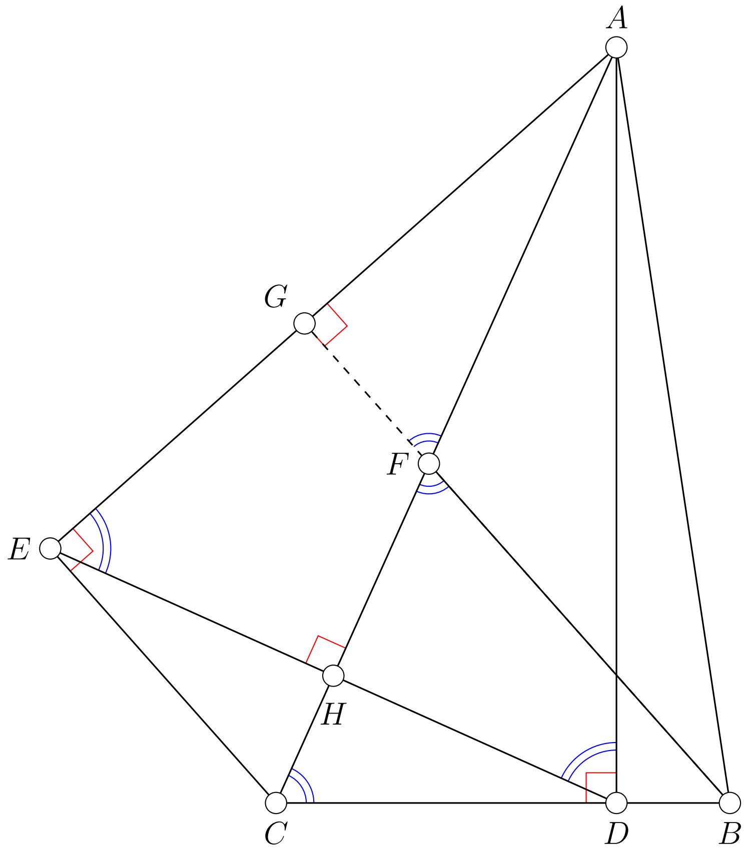
Le fait que le point E soit la symétrique du point D par rapport à la droite (AC) signifie que $\widehat{CEA} = 90°$ et que les droites (CE) et (AE) sont perpendiculaire. Or, la droite (BF) est également perpendiculaire à la droite (AE). Les droites (BF) et (CE) sont perpendiculaire à une même droite, elles sont donc parallèles.

Les angles $\widehat{CFB}$ et $\widehat{ECA}$ sont alternes-internes par rapport aux droites (EC) et (FB) donc ils sont égaux. Par ailleurs, puisque la symétrie axiale conserve les angles, $\widehat{DCA} = \widehat{ECA}$. Finalement :

$$\widehat{CFB} = \widehat{ECF} = \widehat{ECA} = \widehat{ACD} = \widehat{FCD} = \widehat{FCB}$$

donc le triangle FCB est bien isocèle au point B.

Solution alternative n°1



Comme dans la solution précédente, on va chercher à montrer que $\widehat{CFB} = \widehat{FCB}$. Pour cela on introduit H le point d'intersection des droites (DE) et (AC) et G le point d'intersection des droites (AE) et (BF). Puique'ils sont opposés par le sommet, les angles $\widehat{CFB}$ et $\widehat{AFG}$ sont égaux. Puisque la somme des angles du triangle AGF vaut $180°$ et que les droite (AE) et (BG) sont perpendiculaires, on a :

$$\widehat{CFB} = 180° - \widehat{AGF} - \widehat{GAF} = 180° - 90° - \widehat{EAH} = 90° - \widehat{GAF}$$

Les points D et E sont symétriques par rapoort à la droite (AH) donc les droites (AH) et (ED) sont perpendiculaires. Ainsi, $\widehat{EHA} = 90°$. Puisque la somme des angles dans le triangle AEH vaut $180°$, on a

$$\widehat{HEA} = 180° - \widehat{EHA} - \widehat{EAH} = 180° - 90° - \widehat{EAH} = 90° - \widehat{EAH}$$

Ainsi :

$$\widehat{CFB} = 90° - \widehat{GAF} = 90° - \widehat{EAH} = \widehat{HEA}$$

Puisque la symétrie axiale conserve les angles, $\widehat{HEA} = \widehat{HDA}$.
Concentrons-nous à présent sur les points A, D, C et H. Puisque les droites (AD) et (CD) sont perpendiculaires, $\widehat{HDA} = 90° - \widehat{CDH}$. Le triangle HCD est rectangle en H et la somme de ses angles fait $180°$. Ainsi :

$$\widehat{HCD} = 180° - \widehat{CHD} - \widehat{CDH} = 180° - 90° - \widehat{CDH} = 90° - \widehat{CDH}$$

En rassemblant toutes ces informations :

$$\widehat{CFB} = \widehat{HEA} = \widehat{HDA} = 90^\circ - \widehat{CDH} = \widehat{HCD} = \widehat{FCB}$$

et on retrouve que le triangle FCB est isocèle au point B.

Exercice 6.

1) Alice désire colorier les entiers entre 2 et 8 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 8 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 8$ en utilisant k couleurs.
2) Alice désire colorier les entiers entre 2 et 31 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 31 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 31$ en utilisant k couleurs.

Solution de l'exercice 6 Dans ce problème, on cherche le plus petit entier k satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus petit entier recherché est l'entier c. Il y aura alors deux parties dans la démonstration. D'une part il faut montrer que si un entier k satisfait la propriété, alors $k \geqslant c$, d'autre part il faut montrer que l'on peut effectivement trouver un coloriage des entiers avec c couleurs.

1) Tout d'abord, essayons de colorier les entiers au fur et à mesure de façon naïve :

- ▷ On colorie 2 de la première couleur
- ▷ On colorie 3 aussi de la première couleur (c'est possible car 2 ne divise pas 3).
- ▷ 4 est divisible par 2 donc on ne peut pas le colorier de la même couleur que 2, on le colorie donc d'une autre couleur (la deuxième couleur).
- ▷ On peut colorier 5 de la première couleur.
- ▷ 6 étant divisible par 2 et 3 on le colorie de la deuxième couleur.
- ▷ On peut colorier 7 de la première couleur.
- ▷ Par contre 8 est divisible par 2 et 4, il faut donc le colorier d'une troisième couleur.

On a donc obtenu un coloriage avec 3 couleurs des entiers de 2 à 8. Il faut maintenant vérifier qu'il faut forcément 3 couleurs dans un coloriage satisfaisant la propriété de l'énoncé. Dans la construction précédente, le problème était de colorier 8. En effet, 8 est un multiple de 4 et 2 et 4 est un multiple de 2. Ainsi 4 ne peut avoir la même couleur que 2 et 8 ne peut avoir la même couleur que 2 ou 4. Il faut donc au moins 3 couleurs différentes pour colorier $2, 4, 8$, donc le plus petit nombre de couleurs nécessaires est $k = 3$.

2) Ici inspirons nous de la première question. On a vu que $2, 4, 8$ étaient les nombres apportant une contrainte dans le coloriage. On remarque qu'il s'agit de puissances de 2. On peut donc conjecturer que les puissances de 2 jouent un rôle important dans le problème. Parmi les entiers de 2 à 32 il y a 5 puissances de 2 : $2, 4, 8$ et 16 Comme 2 divise $4, 8, 16$, 2 est forcément d'une couleur différente des 3 autres. Comme 4 divise $8, 16$, 4 est forcément d'une couleur différente des 2 autres. De même comme 8 divise 16 donc $2, 4, 8, 16$ ont forcément des couleurs différentes deux à deux. Il faut donc au moins 4 couleurs différentes.

Réciproquement, on cherche un coloriage des entiers de 2 à 32 utilisant exactement 4 couleurs. On peut en fait continuer le coloriage précédent en coloriant chaque entier au fur et à mesure avec la plus petite couleur possible. On obtient le coloriage suivant :

1. Les nombres coloriés avec la couleur 1 sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$
2. Les nombres coloriés avec la couleur 2 sont $4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 25, 26$
3. Les nombres coloriés avec la couleur 3 sont $8, 12, 18, 20, 27, 28, 30$
4. Les nombres coloriés avec la couleur 4 sont $16, 24$

On a bien un coloriage correct avec 4 couleurs donc le nombre minimal de couleur est 4.

Solution alternative n°1 On montre comme dans le cas précédent que pour la première question il faut au moins 3 couleurs et au moins 4 dans la seconde.

On propose ici de généraliser le coloriage précédent : on construit un coloriage avec le nombre optimal de couleurs pour colorier les entiers de 2 à r, avec $r \geqslant 2$. Soit $n \geqslant 2$, posons $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. On va colorier n avec la couleur $a_1 + \cdots + a_k$ (notons que comme $n \geqslant 2$, on a bien $a_1 + \cdots + a_k \geqslant 1$). Montrons que ce coloriage est correct : soit $m \neq n$ deux entiers tels que m divise n. Posons $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. m s'écrit nécessairement sous la forme $m = p_1^{b_1} \times \cdots \times p_k^{b_k}$ avec $b_1 \leqslant a_1, \ldots b_k \leqslant a_k$. Comme $m \neq n$, il existe forcément i tel que $a_i \neq b_i$ donc $a_i > b_i$. Ainsi on a forcément $a_1 + \cdots + a_k > b_1 + \cdots + b_k$ donc m et n sont bien de couleur différente.

Si $n \leqslant 8$ et $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ alors $2^3 = 8 \geqslant n \geqslant 2^{a_1+\cdots+a_k}$ donc $a_1 + \cdots + a_k \leqslant 3$, le coloriage utilise au plus 3 couleurs pour les entiers de 2 à 8 donc pour la première question le k minimal vaut 3.

Si $n \leqslant 31$ et $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ alors $2^5 = 32 > n \geqslant 2^{a_1+\cdots+a_k}$ donc $a_1 + \cdots + a_k < 5$ et comme $a_1 + \cdots + a_k$ est entier, on a $a_1 + \cdots + a_k \leqslant 4$, le coloriage utilise au plus 4 couleurs pour les entiers de 2 à 31 donc pour la deuxième question le k minimal vaut 4.

Solution alternative n°2 On montre comme dans le cas précédent que pour la première question il faut au moins 3 couleurs et au moins 4 dans la seconde.

On propose ici une généralisation de la construction d'un coloriage avec le nombre optimal de couleurs pour colorier les entiers de 2 à n, où n est un entier strictement positif quelconque supérieur à 2. Soit k le plus grand entier tel que $2^k \leqslant n$, on a donc $2^{k+1} > n$. Soit j un entier vérifiant $2 \leqslant j \leqslant n$. Notons l le plus grand entier tel que $2^l \leqslant j$ et de même $2^{l+1} > j$. Comme $2 \leqslant j \leqslant n < 2^{k+1}$, on a $1 \leqslant l < k+1$, donc $1 \leqslant l \leqslant k$. On va colorier j de la couleur l.

Notons que comme $1 \leqslant l \leqslant k$, ce coloriage utilise au plus k couleurs. Comme $2 \leqslant 2 \leqslant 4 \leqslant \cdots \leqslant 2^k \leqslant n$, les 2^j pour $1 \leqslant j \leqslant k$ sont entre 2 et n, et comme 2^j est colorié de la couleur j, le coloriage utilise exactement j couleurs.

Ce coloriage vérifie de plus la propriété de l'énoncé : soit m, n tels que m divise n et $m \neq n$. Notons j la couleur de m, on a $m \geqslant 2^j$. Comme m divise n et $m \neq n$, $n \geqslant 2m \geqslant 2^{j+1}$ donc n ne peut être colorié avec la couleur j, car sinon on aurait $n < 2^{j+1}$.

En particulier pour $n = 8$, comme $2^3 = 8 < 2^4$, le coloriage proposé utilise 3 couleurs et pour $n = 31$, comme $2^4 \leqslant n < 2^5$, le coloriage utilise 4 couleurs. Ainsi pour la première question le k minimal vaut 3, pour la seconde il vaut 4

Exercice 7. Le jeu de *mathinal* est un jeu qui se joue à n joueurs (avec $n \geqslant 2$), n cartes vertes et n cartes rouges. Initialement, chaque joueur prend une carte verte et une carte rouge, et écrit un entier sur chacune de ces deux cartes (il a le droit d'écrire le même entier sur les deux cartes). Puis chaque joueur calcule la somme des numéros de ses deux cartes, et on note M la plus grande somme parmi les sommes des n joueurs.

Ensuite, les joueurs redistribuent les cartes rouges comme suit : le joueur possédant la carte verte de plus petit numéro reçoit la carte rouge de plus grand numéro, puis le joueur possédant la carte verte de deuxième plus petit numéro reçoit la carte rouge de deuxième plus grand numéro, et ainsi de suite. Chaque joueur calcule alors de nouveau la somme des numéros de ses deux cartes, et on note M' la plus grande somme parmi les sommes des n joueurs.

1) Est-il possible d'avoir $M' < M$?

2) Est-il possible d'avoir $M' > M$?

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

1) Pour bien comprendre l'exercice, il est conseillé de regarder ce qu'il se passe pour des petites valeurs. Prenons donc une partie à deux joueurs où le joueur 1 inscrit 0 sur sa carte verte et 0 sur sa carte rouge et le joueur 2 inscrit 1 sur sa carte verte et 1 sur sa carte rouge.

	carte verte	carte rouge	somme
joueur 1	0	0	0
joueur 2	1	1	2

On a alors $M = 2$. Si l'on redistribue les cartes rouges, le joueur 1 reçoit la carte rouge avec un 1 inscrit et le joueur 2 reçoit la carte bleue avec un 0 inscrit.

	carte verte	nouvelle carte rouge	somme
joueur 1	0	1	1
joueur 2	1	0	1

On a alors $M' = 1$. Ici $M' < M$ donc on a construit une situation répondant positivement à la question, la réponse à la question 1) est donc **OUI**.

2) Une fois de plus, on teste l'énoncé sur des parties à 2 ou 3 joueurs pour deviner la réponse. On va montrer qu'on ne peut jamais avoir $M' > M$ quelle que soit la répartition des cartes.

Considérons une partie à n joueurs et notons v_j le numéro que le joueur numéro j inscrit sur sa carte verte. Quitte à renuméroter les joueurs, on peut supposer que $v_1 \leqslant v_2 \leqslant \ldots \leqslant v_n$. On note également $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_n$ les numéros des cartes rouges dans l'ordre croissant, de telle sorte que **lors de la redistribution**, le joueur j reçoive la carte rouge avec le numéro r_j. On note r_{i_j} le numéro que le joueur j inscrit sur sa carte rouge. Le nombre M correspond donc au plus grand nombre parmi les nombres $v_j + r_{i_j}$, pour j allant de 1 à n. Le nombre M' correspond au plus grand nombre parmi les nombres $v_j + r_j$. Voici ici une situation à 4 joueurs.

	carte verte	carte rouge inscrite par le joueur	carte rouge reçue après la redistribution
joueur 1	$v_1 = 0$	$r_{i_1} = 3(= r_2)$	$r_1 = 4$
joueur 2	$v_2 = 1$	$r_{i_2} = 1(= r_4)$	$r_2 = 3$
joueur 3	$v_3 = 2$	$r_{i_3} = 4(= r_1)$	$r_3 = 2$
joueur 4	$v_4 = 3$	$r_{i_4} = 2(= r_3)$	$r_4 = 1$

On note k un entier de $\{1, 2, \ldots, n\}$ vérifiant $M' = v_k + r_k$. On suppose par l'absurde que $M < M'$.

Soit l un entier tel que $n \geqslant l \geqslant k$. Par hypothèse sur M, $v_l + r_{i_l} \leqslant M$. De plus, on sait que $M < M' = v_k + r_k$. D'autre part, puisque $l \geqslant k$, on sait que $v_k \leqslant v_l$. Ainsi

$$v_l + r_{i_l} \leqslant M' < M = v_k + r_k \leqslant v_l + r_k$$

On obtient que $r_k > r_{i_l}$. Ceci implique que $i_l > k$.

$$r_1, r_2, \dots, r_k, \underbrace{r_{k+1}, \dots, r_n}_{r_{i_l} \text{ appartient à}}$$

$$1, 2, \dots, k, \underbrace{k+1, \dots, n}_{i_l \text{ appartient à}}$$

L'inégalité étant vrai pour tout entier l tel que $n \geqslant l \geqslant k$, on a donc prouvé que $i_k, i_{k+1}, \dots i_n$ appartiennent à $\{k+1, \dots, n\}$.

$$1, 2, \dots, k, \qquad \underbrace{k+1, \dots, n}_{i_k, i_{k+1}, \dots, i_n \text{ appartiennent à}}$$

On a donc $n-k+1$ entiers distincts dans un ensemble de cardinal $n-k$, ce qui est une contradiction. En particulier, on ne peut pas avoir $M < M'$. La réponse à la question $2)$ est donc **NON**.

Exercice 8. Déterminer les entiers $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 3$ ayant la propriété suivante : m et n ont chacun k diviseurs positifs et, si l'on note $d_1 < \ldots < d_k$ les diviseurs positifs de m (avec $d_1 = 1$ et $d_k = m$) et $d'_1 < \ldots < d'_k$ les diviseurs positifs de n (avec $d'_1 = 1$ et $d'_k = n$), alors $d'_i = d_i + 1$ pour tout entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant k-1$.

Solution de l'exercice 8 Tout d'abord notons que les plus petits diviseurs strictement plus grands que 1 de m et n sont d_2 et d_2+1 qui sont donc forcément premiers. Or ces deux nombres étant consécutifs, l'un d'entre eux est pair donc vaut 2. Si $d_2+1 = 2$, $d_2 = 1$ ce qui contredit l'énoncé. On a donc $d_2 = 2$ et $d_2+1 = 3$.

Si $k = 3$ le seul diviseur strict de m vaut 2 donc $m = 4$, le seul diviseur strict de m valant 3 on a forcément $n = 9$. Récirproquement, comme le seul diviseur strict de 4 vaut 2 et le seul diviseur strict de 9 vaut 3, le couple $(4, 9, 3)$ convient.

Supposons $k \geqslant 4$. Comme le plus petit diviseur strict de m vaut 3, m n'est pas divisible par 2, il est donc impair. On a donc forcément d_3+1 impair, donc d_3 est pair. Posons $d_3 = 2l$, comme $d_3 > d_2 = 2$, on a $l > 1$ donc $l \geqslant 2$. Si $l \geqslant 4$ alors l divise d_3 donc l divise m et $l \neq m$ car $2l$ divise m. En particulier comme $l < 2l$ est un diviseur de m cela contredit l'énoncé. On a donc forcément $l = 2$ donc $d_3 = 4$. On en déduit que $d_3 + 1 = 5$. Si $k = 4$ les diviseurs stricts de m étant 2 et 4, on a $m = 8$ et comme les diviseurs stricts de n sont 3 et 5 on a $n = 15$. Réciproquement, les seuls diviseurs stricts de 8 valant 2 et 4 et ceux de 15 valant 3 et 5, $(8, 15, 4)$ vérifie l'énoncé.

Si $k \geqslant 5$, comme 3 et 5 divisent n, 15 divise n. Comme $k \geqslant 3$ on ne peut pas avoir $n = 15$ sinon n n'a que 2 diviseurs stricts. En particulier, 15 est un diviseur strict de n donc $15 - 1 = 14$ est un diviseur strict de m. En particulier, $7 + 1 = 8$ est un diviseur strict de n donc n est pair, on obtient une contradiction.

En particulier pour $k \geqslant 5$ il n'y a pas de solutions, les seules solutions sont donc $(4, 9, 3)$ et $(8, 15, 4)$

Solution alternative n°1 De la même manière que dans la solution précédente, on obtient que $d_2 = 2$. Si m est divisible par un nombre impair l, celui-ci est un diviseur strict car m est divisible par 2 donc il est pair. En particulier $l+1$ est pair et divise n, donc 2 divise n ce qui contredit le fait que d_2+1 est le plus petit diviseur de n. En particulier m est forcément une puissance de 2. Si $m \geqslant 16$, alors 8 et 4 sont des diviseurs stricts de m. Ainsi 9 et 5 divisent n, donc 45 divise n. En particulier 15 est un facteur strict de n donc $15 - 1 = 14$ est un facteur strict de m. Ainsi m est divisible par 7, cela contedit le fait que m est une puissance de 2.

Ainsi, m est une puissance de 2 vérifiant $m < 16$ et 2 est un facteur strict de m. On a donc $m = 4$ ou $m = 8$. Si $m = 4$, le seul diviseur strict de 4 est 2 donc le seul diviseur strict de n est 3 donc $n = 9$. Comme le seul diviseur strict de 4 vaut 2 et le seul diviseur strict de 9 vaut 3, le couple $(4, 9, 3)$ convient.

Si $m = 8$, m a pour diviseurs stricts 2 et 4, n a pour diviseurs stricts 3 et 5 donc $n = 15$.Réciproquement, les seuls diviseurs stricts de 8 valant 2 et 4 et ceux de 15 valant 3 et 5, $(8, 15, 4)$ vérifie l'énoncé.

Les triplets solutions sont donc $(4, 9, 3)$ et $(8, 15, 4)$.

Exercices lycéens

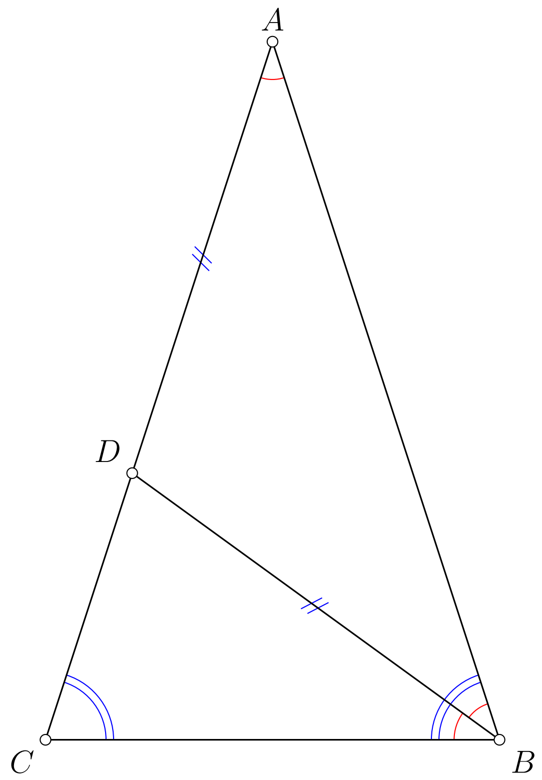
Exercice 9. On dispose d'un jeu contenant 52 cartes. Chaque carte comporte une *valeur* parmi « 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi » ainsi qu'une *couleur* parmi « cœur, carreau, pique, trèfle », de telle sorte que, pour chaque valeur et chaque couleur, le jeu contient une unique carte comportant cette valeur *et* ayant cette couleur. Une *main de* 5 *cartes* est un choix de 5 cartes de ce jeu, sans se soucier de l'ordre dans lequel on choisit les cartes. Combien existe-t-il de mains de 5 cartes qui contiennent quatre cartes ayant la même valeur ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 9 Pour choisir un main de 5 cartes dont 4 cartes ont la même valeur, il faut d'abord choisir la valeur en question. Il y a pour cela 13 choix puisqu'il y a 13 valeur. Il y a alors 48 choix pour la cinquième carte. On a donc en tout $13 \times 48 = 624$ mains possibles.

Exercice 10. Soit ABC un triangle isocèle en A. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté $[AC]$ en D. On suppose que $BD = DA$. Déterminer les angles du triangle ABC.

Solution de l'exercice 10



Appelons $\alpha = \widehat{ABD}$. Examinons les différents angles de la figure et essayons de la exprimer en fonction de α. Puisque la droite (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CBA}$, on sait que $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ et donc $\widehat{ABC} = 2\widehat{ABD} = 2\alpha$. Puisque $DB = DA$, le triangle ADB est isocèle au point D, ce qui se traduit par le fait que $\widehat{BAD} = \widehat{ABD}$ donc $\widehat{BAC} = \widehat{DAB} = \alpha$. Enfin, le triangle ABC est isocèle au point A, ce qui signifie que $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 2\widehat{ABD} = 2\alpha$. Puisque la somme des angles dans le triangle ABC vaut $180°$, on trouve

$$180° = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 5\alpha$$

Ainsi, $\alpha = \frac{180°}{5} = 36°$. Cela signifie que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72°$ et $\widehat{BAC} = 36°$.

Exercice 11.

1) Alice désire colorier les entiers entre 2 et 8 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 8 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 8$ en utilisant k couleurs.
2) Alice désire colorier les entiers entre 2 et 31 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 31 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 31$ en utilisant k couleurs.

Solution de l'exercice 11 Dans ce problème, on cherche le plus petit entier k satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus petit entier recherché est l'entier c. Il y aura alors deux parties dans la démonstration. D'une part il faut montrer que si un entier k satisfait la propriété, alors $k \geqslant c$, d'autre part il faut montrer que l'on peut effectivement trouver un coloriage des entiers avec c couleurs.

1) Tout d'abord, essayons de colorier les entiers au fur et à mesure de façon naïve :

- On colorie 2 de la première couleur
- On colorie 3 aussi de la première couleur (c'est possible car 2 ne divise pas 3).
- 4 est divisible par 2 donc on ne peut pas le colorier de la même couleur que 2, on le colorie donc d'une autre couleur (la deuxième couleur).
- On peut colorier 5 de la première couleur.
- 6 étant divisible par 2 et 3 on le colorie de la deuxième couleur.
- On peut colorier 7 de la première couleur.
- Par contre 8 est divisible par 2 et 4, il faut donc le colorier d'une troisième couleur.

On a donc obtenu un coloriage avec 3 couleurs des entiers de 2 à 8. Il faut maintenant vérifier qu'il faut forcément 3 couleurs dans un coloriage satisfaisant la propriété de l'énoncé. Dans la construction précédente, le problème était de colorier 8. En effet, 8 est un multiple de 4 et 2 et 4 est un multiple de 2. Ainsi 4 ne peut avoir la même couleur que 2 et 8 ne peut avoir la même couleur que 2 ou 4. Il faut donc au moins 3 couleurs différentes pour colorier $2, 4, 8$, donc le plus petit nombre de couleurs nécessaires est $k = 3$.

2) Ici inspirons nous de la première question. On a vu que $2, 4, 8$ étaient les nombres apportant une contrainte dans le coloriage. On remarque qu'il s'agit de puissances de 2. On peut donc conjecturer que les puissances de 2 jouent un rôle important dans le problème. Parmi les entiers de 2 à 32 il y a 5 puissances de 2 : $2, 4, 8$ et 16 Comme 2 divise $4, 8, 16$, 2 est forcément d'une couleur différente des 3 autres. Comme 4 divise $8, 16$, 4 est forcément d'une couleur différente des 2 autres. De même comme 8 divise 16 donc $2, 4, 8, 16$ ont forcément des couleurs différentes deux à deux. Il faut donc au moins 4 couleurs différentes.

Réciproquement, on cherche un coloriage des entiers de 2 à 32 utilisant exactement 4 couleurs. On peut en fait continuer le coloriage précédent en coloriant chaque entier au fur et à mesure avec la plus petite couleur possible. On obtient le coloriage suivant :

1. Les nombres coloriés avec la couleur 1 sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$
2. Les nombres coloriés avec la couleur 2 sont $4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 25, 26$
3. Les nombres coloriés avec la couleur 3 sont $8, 12, 18, 20, 27, 28, 30$
4. Les nombres coloriés avec la couleur 4 sont $16, 24$

On a bien un coloriage correct avec 4 couleurs donc le nombre minimal de couleur est 4.

Solution alternative n°1 On montre comme dans le cas précédent que pour la première question il faut au moins 3 couleurs et au moins 4 dans la seconde.

On propose ici de généraliser le coloriage précédent : on construit un coloriage avec le nombre optimal de couleurs pour colorier les entiers de 2 à r, avec $r \geqslant 2$. Soit $n \geqslant 2$, posons $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. On va colorier n avec la couleur $a_1 + \cdots + a_k$ (notons que comme $n \geqslant 2$, on a bien $a_1 + \cdots + a_k \geqslant 1$). Montrons que ce coloriage est correct : soit $m \neq n$ deux entiers tels que m divise n. Posons $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ sa décomposition en facteurs premiers. m s'écrit nécessairement sous la forme $m = p_1^{b_1} \times \cdots \times p_k^{b_k}$ avec $b_1 \leqslant a_1, \ldots b_k \leqslant a_k$. Comme $m \neq n$, il existe forcément i tel que $a_i \neq b_i$ donc $a_i > b_i$. Ainsi on a forcément $a_1 + \cdots + a_k > b_1 + \cdots + b_k$ donc m et n sont bien de couleur différente.

Si $n \leqslant 8$ et $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ alors $2^3 = 8 \geqslant n \geqslant 2^{a_1 + \cdots + a_k}$ donc $a_1 + \cdots + a_k \leqslant 3$, le coloriage utilise au plus 3 couleurs pour les entiers de 2 à 8 donc pour la première question le k minimal vaut 3.

Si $n \leqslant 31$ et $n = p_1^{a_1} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ alors $2^5 = 32 > n \geqslant 2^{a_1 + \cdots + a_k}$ donc $a_1 + \cdots + a_k < 5$ et comme $a_1 + \cdots + a_k$ est entier, on a $a_1 + \cdots + a_k \leqslant 4$, le coloriage utilise au plus 4 couleurs pour les entiers de 2 à 31 donc pour la deuxième question le k minimal vaut 4.

Solution alternative n°2 On montre comme dans le cas précédent que pour la première question il faut au moins 3 couleurs et au moins 4 dans la seconde.

On propose ici une généralisation de la construction d'un coloriage avec le nombre optimal de couleurs pour colorier les entiers de 2 à n, où n est un entier strictement positif quelconque supérieur à 2. Soit k le plus grand entier tel que $2^k \leqslant n$, on a donc $2^{k+1} > n$. Soit j un entier vérifiant $2 \leqslant j \leqslant n$. Notons l le plus grand entier tel que $2^l \leqslant j$ et de même $2^{l+1} > j$. Comme $2 \leqslant j \leqslant n < 2^{k+1}$, on a $1 \leqslant l < k+1$, donc $1 \leqslant l \leqslant k$. On va colorier j de la couleur l.

Notons que comme $1 \leqslant l \leqslant k$, ce coloriage utilise au plus k couleurs. Comme $2 \leqslant 2 \leqslant 4 \leqslant \cdots \leqslant 2^k \leqslant n$, les 2^j pour $1 \leqslant j \leqslant k$ sont entre 2 et n, et comme 2^j est colorié de la couleur j, le coloriage utilise exactement j couleur.

Ce coloriage vérifie de plus la propriété de l'énoncé : soit m, n tels que m divise n et $m \neq n$. Notons j la couleur de m, on a $m \geqslant 2^j$. Comme m divise n et $m \neq n$, $n \geqslant 2m \geqslant 2^{j+1}$ donc n ne peut être colorié avec la couleur j, car sinon on aurait $n < 2^{j+1}$.

En particulier pour $n = 8$, comme $2^3 = 8 < 2^4$, le coloriage proposé utilise 3 couleurs et pour $n = 31$, comme $2^4 \leqslant n < 2^5$, le coloriage utilise 4 couleurs. Ainsi pour la première question le k minimal vaut 3, pour la seconde il vaut 4.

Exercice 12. Soit $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ deux listes de réels telles que $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \geqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i$. On pose alors $P = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(x_i - y_i)$ et $G = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i - \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i$. Démontrer que $P \leqslant G \leqslant 2P$.

Étant donnés des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, le nombre $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$ désigne le plus petit réel parmi les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Le nombre $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$ désigne le plus grand réel parmi les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Solution de l'exercice 12 1) Montrons d'abord que $G \geqslant P$: Soit j un entier tel que $P = x_j - y_j$. On a $P = x_j - y_j$ et $x_j \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ et $y_j \geqslant \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i$. En particulier $P = x_j - y_j \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i - \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i = G$.

2) Montrons maintenant que $G \leqslant 2P$. Soit j un entier tel que $x_j = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ et k tel que $y_k = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i$. Comme $y_j \leqslant x_k$, on a :

$$G = x_j - y_k = x_j - y_j + y_j - y_k \leqslant (x_j - y_j) + (x_k - y_k) \leqslant 2P$$

Exercice 13. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on nomme $s(n)$ la somme des chiffres de n. Déterminer tous les entiers $n \geqslant 0$ tels que $n \leqslant 2s(n)$.

Solution de l'exercice 13 Soit n un entier naturel et soit $\overline{a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0}$ son écriture décimale, c'est-à-dire que a_0 est le chiffre des unités, a_1 le chiffre des dizaines etc...

Tout d'abord, si n n'a qu'un chiffre, alors $n = a_0 \leqslant 2a_0$ donc n est solution de l'exercice et les nombres $0, 1, 2, \dots, 9$ sont solutions.

On suppose désormais que n a au moins deux chiffres.

Alors $n = a_d \cdot 10^d + a_{d-1} \cdot 10^{d-1} + \dots a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$ et $s(n) = a_d + \dots + a_1 + a_0$. Si $d \geqslant 2$, alors pour tout $1 \leqslant i \leqslant d-1$, $a_i \cdot 10^i \geqslant a_i \cdot 2$ et puisque a_d est non nul, $a_d \cdot 10^d = 2a_d + (10^d - 2) \cdot a_d \geqslant 2a_d + 10^d - 2 > 2a_d + a_0$ car $a_0 < 10$. Ainsi

$$n = a_d \cdot 10^d + a_{d-1} \cdot 10^{d-1} + \dots a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 > 2a_d + a_0 + 2a_{d-1} + \dots + 2a_1 + a_0 = 2s(n)$$

Donc si n a trois chiffres ou plus, n n'est pas solution.

On suppose que n possède deux chiffres. Si $a_1 \geqslant 2$, alors

$$n = a_1 \cdot 10 + a_0 = 2a_1 + a_0 + 8 \cdot a_1 \geqslant 2a_1 + a_0 + 8 \cdot 2 > 2a_1 + a_0 + a_0 = 2s(n)$$

donc n n'est pas solution du problème. On déduit que $a_1 = 1$. On peut alors aisément tester tous les nombres entre 10 et 19 pour voir lesquels vérifie le problème. Ou alors, on peut remarquer que l'inégalité $n \leqslant 2s(n)$ se réécrit $10 \cdot 1 + a_0 \leqslant 2(1 + a_0)$ soit $a_0 \geqslant 8$ donc les seuls entiers possibles à deux chiffres vérifiant l'énoncé sont 18 et 19. Réciproquement, on a bien $18 \leqslant 2(1+8)$ et $19 \leqslant 2(1+9)$.

Les solutions cherchées sont donc $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 18, 19\}$

Exercice 14. Déterminer les entiers $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 3$ ayant la propriété suivante : m et n ont chacun k diviseurs positifs et, si l'on note $d_1 < \ldots < d_k$ les diviseurs positifs de m (avec $d_1 = 1$ et $d_k = m$) et $d'_1 < \ldots < d'_k$ les diviseurs positifs de n (avec $d'_1 = 1$ et $d'_k = n$), alors $d'_i = d_i + 1$ pour tout entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant k-1$.

Solution de l'exercice 14 Tout d'abord notons que les plus petits diviseurs strictement plus grands que 1 de m et n sont d_2 et d_2+1 qui sont donc forcément premiers. Or ces deux nombres étant consécutifs, l'un d'entre eux est pair donc vaut 2. Si $d_2+1=2$, $d_2=1$ ce qui contredit l'énoncé. On a donc $d_2=2$ et $d_2+1=3$.

Si $k=3$ le seul diviseur strict de m vaut 2 donc $m=4$, le seul diviseur strict de m valant 3 on a forcément $n=9$. Récirproquement, comme le seul diviseur strict de 4 vaut 2 et le seul diviseur strict de 9 vaut 3, le couple $(4,9,3)$ convient.

Supposons $k \geqslant 4$. Comme le plus petit diviseur strict de m vaut 3, m n'est pas divisible par 2, il est donc impair. On a donc forcément d_3+1 impair, donc d_3 est pair. Posons $d_3 = 2l$, comme $d_3 > d_2 = 2$, on a $l > 1$ donc $l \geqslant 2$. Si $l \geqslant 4$ alors l divise d_3 donc l divise m et $l \neq m$ car $2l$ divise m. En particulier comme $l < 2l$ est un diviseur de m cela contredit l'énoncé. On a donc forcément $l=2$ donc $d_3=4$. On en déduit que $d_3+1=5$. Si $k=4$ les diviseurs stricts de m étant 2 et 4, on a $m=8$ et comme les diviseurs stricts de n sont 3 et 5 on a $n=15$. Réciproquement, les seuls diviseurs stricts de 8 valant 2 et 4 et ceux de 15 valant 3 et 5, $(8,15,4)$ vérifie l'énoncé.

Si $k \geqslant 5$, comme 3 et 5 divisent n, 15 divise n. Comme $k \geqslant 3$ on ne peut pas avoir $n=15$ sinon n n'a que 2 diviseurs stricts. En particulier, 15 est un diviseur strict de n donc $15-1=14$ est un diviseur strict de m. En particulier, $7+1=8$ est un diviseur strict de n donc n est pair, on obtient une contradiction.

En particulier pour $k \geqslant 5$ il n'y a pas de solutions, les seules solutions sont donc $(4,9,3)$ et $(8,15,4)$

Solution alternative n°1 De la même manière que dans la solution précédente, on obtient que $d_2=2$. Si m est divisible par un nombre impair l, celui-ci est un diviseur strict car m est divisible par 2 donc il est pair. En particulier $l+1$ est pair et divise n, donc 2 divise n ce qui contredit le fait que d_2+1 est le plus petit diviseur de n. En particulier m est forcément une puissance de 2. Si $m \geqslant 16$, alors 8 et 4 sont des diviseurs stricts de m. Ainsi 9 et 5 divisent n, donc 45 divise n. En particulier 15 est un facteur strict de n donc $15-1=14$ est un facteur strict de m. Ainsi m est divisible par 7, cela contedit le fait que m est une puissance de 2.

Ainsi, m est une puissance de 2 vérifiant $m < 16$ et 2 est un facteur strict de m. On a donc $m=4$ ou $m=8$. Si $m=4$, le seul diviseur strict de 4 est 2 donc le seul diviseur strict de n est 3 donc $n=9$. Comme le seul diviseur strict de 4 vaut 2 et le seul diviseur strict de 9 vaut 3, le couple $(4,9,3)$ convient.

Si $m=8$, m a pour diviseurs stricts 2 et 4, n a pour diviseurs stricts 3 et 5 donc $n = 15$.Réciproquement, les seuls diviseurs stricts de 8 valant 2 et 4 et ceux de 15 valant 3 et 5, $(8,15,4)$ vérifie l'énoncé.

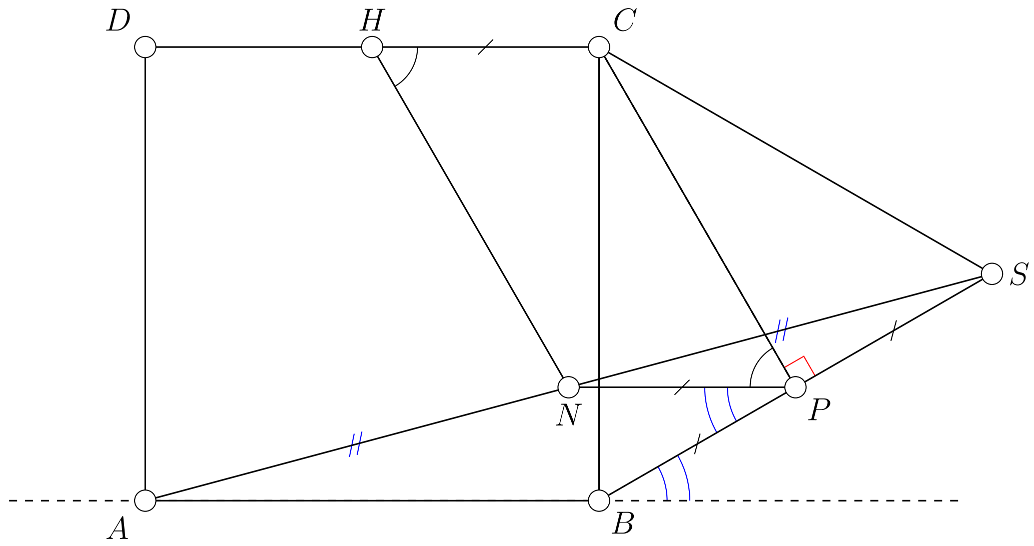
Les triplets solutions sont donc $(4,9,3)$ et $(8,15,4)$.

Exercice 15. Soit $ABCD$ un carré et soit S un point à l'extérieur du carré $ABCD$ tel que le triangle BCS soit équilatéral. On note N le milieu du segment $[AS]$ et H le milieu du segment $[CD]$. Soit P le milieu du segment $[BS]$.

1) Calculer l'angle $\widehat{BPN}$.

2) Calculer l'angle $\widehat{NHC}$.

<u>*Solution de l'exercice 15*</u>



1) Puisque le point N est le milieu du segment $[AS]$ et que le point P est le milieu du segment $[BC]$, d'après le théorème de Thalès les droite (NP) et (AB) sont parallèles. On déduit que $\widehat{NPS} = \widehat{ABS}$. Puisque le quadrilatère $ABCD$ est un carré, $\widehat{ABC} = 90°$. Puisque le triangle SBC est équilatéral, $\widehat{SBC} = 60°$. Ainsi, $\widehat{ABS} = 90° + 60° = 150°$.
On déduit que

$$\widehat{BPN} = 180° - \widehat{NPS} = 180° - \widehat{ABS} = 180° - 150° = 30°$$

2) On utilise à nouveau le fait que les droites (NP) et (AB) sont parallèles. Puisque les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles, les droites (NP) et (CD) sont également parallèles. De plus, d'après le théorème de Thalès, $NP = \frac{1}{2}AB$ et puisque le quadrilatère $ABCD$ est un carré, $AB = CD$. Ainsi, $NP = \frac{1}{2}CD = HC$ puisque le point H est le milieu du segment $[CD]$.
Le quadrilatère $HCPN$ à deux côtés opposés égaux et parallèles, il s'agit donc d'un parallélogramme. Ses angles opposés sont égaux, on a donc que $\widehat{NHC} = \widehat{NPC}$.
Puisque le point P est le milieu du segment $[BS]$ et que le triangle BCS est équilatéral, la droite (CP) est la hauteur issue du sommet C dans le triangle BCS. On a donc $\widehat{CPS} = 90°$. On a établi à la question précédente que $\widehat{NPS} = 150°$. Ainsi, $\widehat{NPC} = \widehat{NPS} - \widehat{CPS} = 150° - 90° = 60°$
On a donc $\widehat{NHC} = 60°$.

Exercice 16. La somme de certains entiers positifs (pas forcément distincts) inférieurs ou égaux à 10 vaut S. Trouver toutes les valeurs de S telles que, quels que soient ces entiers, ils peuvent **toujours** être partitionnés en deux groupes, chacun de somme inférieure ou égale à 70.

Solution de l'exercice 16

Notons déjà que s'il est possible de partitionner les entiers en deux groupes, chacun de somme au plus 70, la somme totale vaut au plus 140 : on a donc forcément $S \leqslant 140$. On peut ensuite essayer de tester quelques cas avec $S \leqslant 140$ et essayer de voir s'il est possible ou non de les partitionner en deux groupes. A priori les cas contraignants semblent être ceux avec des grands nombres : si les entiers valent tous 10 et qu'on en prend 14, on peut les diviser en deux groupes de 7, dont la somme vaudra 70, on ne gagne donc pas d'information. Par contre si on ne prend que des 9 et qu'on en prend 15, on a $S = 15 \times 9 = 135$. Si on sépare ces entiers en deux groupes, alors on aura forcément un groupe contenant 8 fois le nombre 9, donc de somme valant au moins 72. En particulier, on en déduit que $S = 135$ ne vérifie pas l'énoncé. De plus en rajoutant de 1 à 4 fois le nombre 1, on obtient les sommes entre 136 et 139 et l'argument précédent reste valable, donc ces valeurs ne conviennent pas non plus.

En fait, en considérant 14 fois le nombre 9 et 1 fois le nombre 8, la somme vaut $9 \times 14 + 8 = 134$. Si on sépare ces entiers en deux groupes, alors on aura forcément un groupe contenant 8 nombres, donc de somme valant au moins $7 \times 9 + 8 = 71$. En particulier, on en déduit que $S = 134$ ne vérifie pas l'énoncé.

Montrons que pour tout ensemble d'entiers naturels inférieurs à 10 de somme totale inférieure à 133, on peut répartir ces entiers dans deux groupes de somme inférieure à 70.

Pour cela, on considère un ensemble d'entiers naturels inférieurs à 10 dont la somme est inférieure ou égale à 133. On répartit arbitrairement certains entiers dans le premier groupe, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus ajouter d'entier à ce premier groupe sans que la somme des éléments dépasse 70. Après cette première opération, on dispose de deux ensembles A et B partitionnant les entiers dont on dispose, de telle sorte que la somme des éléments de A ne dépasse pas 70 et pour tout entier a de B, la somme des éléments de A ajoutée à a dépasse 70. Autrement dit, si on note S_A la somme des éléments de A, alors $61 \leqslant S_A \leqslant 70$ et pour tout a de B, $S_A + a \geqslant 71$.

Notons que si $S_A \geqslant 63$, alors les éléments de B ont une somme inférieure à $133 - 63 = 70$ donc on a obtenu une partition des entiers en deux groupes de somme inférieure à 70. On se place donc dans le cas où $61 \leqslant S_A \leqslant 62$. Posons $d = 62 - S_A$. Cela signifie que tout élément de B est supérieur ou égal à $9 + d$. Si on dispose de moins de 7 entiers dans le groupe B, alors leur somme est inférieure à 70 donc on peut les répartir dans un groupe de somme inférieure à 70.

Si l'on dispose de plus de 7 entiers dans B, comme chaque entier de B vaut au moins $9+d$, la somme totale vaut

$$S = S_A + (S - S_A) \geqslant 62 - d + 8(9 + d) = 134 + 7d > 133$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

On peut donc répartir les entiers en deux groupes de somme au plus 70.

Solution alternative n°1 On montre de même que si $S \geqslant 135$, S ne vérifie pas l'énoncé.

On a donc obtenu $S \leqslant 134$, mais il faudrait trouver une procédure efficace pour des S plus petits pour répartir les entiers en deux groupes distincts de somme au plus 70. Si $S \leqslant 70$ il est assez clair que S vérifie l'énoncé car il suffit de mettre tous les entiers dans le même groupe. Sinon on aimerait bien répartir les entiers deux groupes A et B et pour avoir deux sommes valant au plus 70, on aimerait que le groupe A ait la plus grande somme possible valant au plus 70.

Notons donc $x_1, \dots x_n$ les entiers de somme S, on prend $I \subset \{1, \dots, n\}$ tel que la somme des x_i pour i dans I vaut au plus 70, et elle est maximale c'est-à-dire qu'on ne peut trouver $I' \subset \{1, \dots, n\}$ tel que la somme des x_i pour i dans I' vaut au plus 70 et soit strictement plus grand que celle des x_i pour i dans I.Posons S' la somme des x_i pour i dans I. Si $S > 70$, on a forcément $S' \geqslant 61$. En effet supposons $S' \leqslant 60$, comme $S > S'$ il existe j dans $\{1, \ldots, n\}$ privé de I tel que $x_j \geqslant 0$. Comme $x_j \leqslant 10$ on a $S' + x_j \leqslant 6 + 10 = 70$, cela contredit la maximalité de I. En particulier on a donc $S' \geqslant 61$.

Posons S'' la somme des x_i pour i n'appartenant pas à I, on a donc $S'' + S' = S$ sont $S \geqslant 61 + S''$. En particulier $S'' \leqslant S - 61$. Ceci prouve que si $S \leqslant 131$, alors $S'' \leqslant 70$ on peut donc bien répartir les entiers en deux groupes de sommes au plus 70.

Il reste donc trois cas à traiter $S = 132, 133, 134$. On peut essayer de voir si on peut affiner le raisonnement précédent.

Supposons $S = 132$. Si $S' \geqslant 62$, alors $S'' = S - S' \leqslant 70$ et les entiers peuvent bien être répartis en deux groupes de somme au plus 70. Comme on a prouvé $S' \geqslant 61$, il reste à voir ce qu'il se passe si $S' = 61$. Dans ce cas intéressons nous aux x_j pour j pas dans I. Si $x_j \leqslant 9$, alors $S' + x_j \leqslant 70$ ce qui contredit la maximalité de S. En particulier tous les x_j restants valent 10. Il existe donc un entier positif k tel que $S'' = 10k$, on a donc $S = 61 + 10k$ donc $10k = 71$ ce qui est impossible car $10k$ est pair mais pas 71. En particulier $S = 132$ vérifie l'énoncé.

Supposons $S = 133$ et essayons d'adapter l'argument précédent. Si $S' \geqslant 63$, alors $S'' = S - S' \leqslant 70$ et les entiers peuvent bien être répartis en deux groupes de somme au plus 70. Comme on a prouvé $S' \geqslant 61$, il reste à voir ce qu'il se passe si $S' = 62$ ou 61. Dans ce cas intéressons nous aux x_j pour j pas dans I. Si $x_j \leqslant 8$, alors $S' + x_j \leqslant 70$ ce qui contredit la maximalité de S. En particulier tous les x_j restants valent 9 ou 10. De plus $S'' = S - S'$ vaut 71 ou 72. Or il existe k, l des entiers positifs tels que $9k + 10l = S''$. On a forcément $S'' < 80$ donc $l < 8$. En testant les différentes valeurs de l possibles, c'est-à-dire $1, \ldots, 7$, on obtient que forcément $S'' = 72$, $l = 0$ et $k = 8$. Or comme il y a au moins 7 fois le nombre neuf et que $7 \times 9 = 63 > S'$ on a une contradiction. En particulier $S = 133$ vérifie l'énoncé.

Maintenant on peut essayer de faire de même avec 134. Si $S' \geqslant 64$, alors $S'' = S - S' \leqslant 70$ et les entiers peuvent bien être répartis en deux groupes de somme au plus 70. Comme on a prouvé $S' \geqslant 61$, il reste à voir ce qu'il se passe si $S' = 62$ ou 61 ou 63. Dans ce cas intéressons nous aux x_j pour j pas dans I. Si $x_j \leqslant 7$, alors $S' + x_j \leqslant 70$ ce qui contredit la maximalité de S. En particulier tous les x_j restants valent 8 9 ou 10. On a de même que précédemment forcément $S'' = 71, 72, 73$ et $S'' = 8k + 9l + 10m$ pour k, l, m des entiers positifs. On cherche donc les valeurs de k, l, m convenables. Après quelques calculs on peut remarquer que $l = 7, k = 1$ convient, dans ce cas $S'' = 73$ donc $S' = S - S'' = 63$. Comme $7 \times 9 = 63$, on peut donc regarder le cas où on a $7 + 7 = 14$ fois le nombre 9 et une fois le 8. Dans ce cas on a bien $S = 14 \times 9 + 8 = 134$. Supposons qu'on peut répartir ces éléments en deux groupes de sommes au plus 70 : dans ce cas on aura forcément 8 éléments parmi les 15 dans le même groupe, donc la somme de ses éléments vaudra au moins $9 \times 7 + 8 = 71$ contradiction. En particulier 134 ne convient pas.

Les valeurs de S vérifiant l'énoncé sont donc les entiers positifs inférieurs ou égaux à 133.

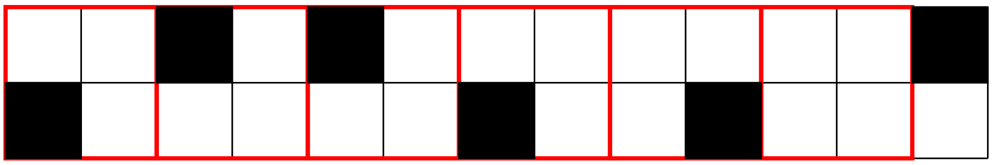
Exercice 17. Soit $k > 1$ un entier positif. Déterminer le plus petit entier n pour lequel on peut colorier certaines cases d'un tableau $n \times n$ en noir de telle sorte que deux cases noires n'aient pas de côté ou de sommet en commun et chaque ligne et chaque colonne possède exactement k cases noires.

Solution de l'exercice 17 Dans ce problème, on cherche le plus petit entier n satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus petit entier recherché est l'entier c. Pour montrer que c'est bien le plus petit entier, on doit d'une part montrer que si un entier n satisfait la propriété, alors $n \geqslant c$ et on doit montrer d'autre part que l'on peut trouver un tableau $n \times n$ satisfaisant la propriété de l'énoncé.

Commençons par déterminer la valeur minimale que peut prendre l'entier n. Soit donc n un entier vérifiant la propriété de l'énoncé.

Considérons un carré quelconque de taille 2×2 à l'intérieur du tableau. Si un tel carré contenait 2 cases noires, ces deux cases auraient un côté ou un sommet en commun, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'énoncé. Ainsi, un quelconque carré de taille 2×2 contenu dans le tableau $n \times n$ ne peut contenir au plus qu'une case noire.

Regardons maintenant 2 lignes consécutives du tableau. On découpe ces deux lignes en carrés de tailles 2×2 en partant de la gauche (la colonne située à l'extrémité droite peut éventuellement n'appartenir à aucun carré 2×2 si n est un entier impair). Chaque carré contient au plus une case noire, et la rangée constituée de deux lignes consécutives doit contenir exactement $2k$ cases noires car chaque ligne contient exactement k cases noires. La colonne située à l'extrémité droite contient au plus 1 case noire, ce qui signifie qu'il y a au moins $2k-1$ cases noires réparties dans les carrés de taille 2×2. Il y a donc au moins $2k-1$ tels carrés de taille 2×2. Ainsi, la longueur n des deux lignes vérifie $n \geqslant 2(2k-1)+1 = 4k-1$.

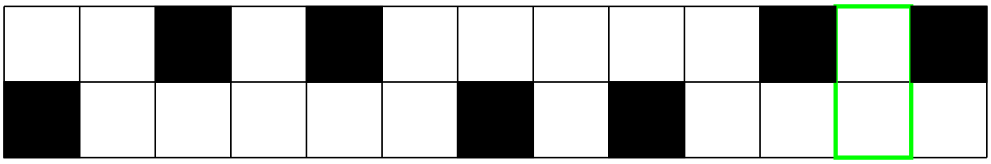


Nous avons démontré que n était forcément supérieur à un certaine expression dépendant de k. On est alors tenté de penser qu'il s'agit là de la valeur optimale et pour le montrer, on entreprend de construire un tableau $(4k-1) \times (4k-1)$ satisfaisant la propriété. Pour trouver un tel tableau dans le cas général, on commence d'abord par trouver un tableau fonctionnel pour les petites valeurs de k. Par exemple, on essaye de trouver un tableau 7×7 vérifiant la propriété pour $k = 2$. Après plusieurs essais, on s'aperçoit qu'un tel tableau n'existe pas, signifiant que $4k-1$ n'est pas la valeur optimale désirée.

On entreprend désormais de démontrer qu'un entier n vérifiant la propriété vérifie $n \geqslant 4k$. Pour cela, il nous suffit de démontrer que n ne peut valoir $4k-1$.

Supposons par l'absurde qu'il soit possible de colorier certaines cases d'un tableau de taille $(4k-1) \times (4k-1)$ de telle sorte que chaque ligne et chaque colonne possède exactement k cases noires.

On a vu dans le raisonnement précédent que pour deux lignes consécutives, il y avait au plus $2k-1$ cases noires contenues dans les $4k-2$ première colonnes (les colonnes les plus à gauche). Donc la dernière colonne contient forcément exactement une case noire. Cela signifie que les deux cases de la deuxième colonne en partant de la droite sont toutes les deux blanches. Comme ce raisonnement est valable pour n'importe quelles deux lignes consécutives, cela signifie que la deuxième colonne en partant de la droite ne contient aucune case noire, ce qui est contraire à l'hypothèse.



On a donc montré que n ne pouvait valoir $4k-1$. Ainsi, $n \geqslant 4k$.

Réciproquement, on peut bien construire un tableau $4k \times 4k$ satisfaisant la propriété de l'énoncé. Pour trouver une telle construction, on essaye bien sûr de trouver une construction pour des petites valeurs de k. Voici un construction dans le cas général : on découpe le tableau $4k \times 4k$ en 4 carrés de côté $2k \times 2k$. Le carré $2k \times 2k$ du coin supérieur gauche est appelé SG, le carré $2k \times 2k$ du coin inférieur gauche est appelé SD, le carré $2k \times 2k$ du coin supérieur droit est appelé IG et le carré $2k \times 2k$ du coin inférieur droit est appelé ID.

On quadrille le carré SG avec des petits carrés 2×2. Dans chaque carré 2×2, on colorie en noir la case située dans le coin supérieur droit.

On quadrille le carré SD avec des petits carrés 2×2. Dans chaque carré 2×2, on colorie en noir la case située dans le coin inférieur droit.

On quadrille le carré IG avec des petits carrés 2×2. Dans chaque carré 2×2, on colorie en noir la case située dans le coin supérieur gauche.

On quadrille le carré ID avec des petits carrés 2×2. Dans chaque carré 2×2, on colorie en noir la case située dans le coin inférieur gauche.

On a représenté ici un configuration vérifiant la propriété pour $k = 3$.