PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

Préparation Olympique POFM Mathématiques

TEST DU 6 MAI 2020

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2005 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2004 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n'est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`https://sites.google.com/view/pofm-depotdescopies/accueil`

Exercices Junior

Exercice 1. Soit x et y deux nombres réels. On pose

$$M = \max\{xy+1, xy-x-y+3, -2xy+x+y+2\}.$$

Démontrer que $M \geqslant 2$, et déterminer les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 1 Parmi les trois nombres $xy+1$, $xy-x-y+3$ et $-2xy+x+y+2$, on note K le plus petit, L le deuxième plus petit et M le plus grand. Alors $K \leqslant L \leqslant M$ donc

$$3M \geqslant K+L+M = (xy+1)+(xy-x-y+3)+(-2xy+x+y+2) = 6,$$

ce qui signifie que $M \geqslant 2$.
En outre, si $M = 2$, les inégalités $K \leqslant L \leqslant M$ sont en fait des égalités, ce qui signifie que

$$xy+1 = xy-x-y+3 = -2xy+x+y+2 = 2. \tag{1}$$

En notant p le produit xy et s la somme $x+y$, les égalités de l'équation (1) sont vérifiées si et seulement si $p = 1$ et $s = 2$.
Or, l'inégalité arithmético-géométrique indique, de manière générale, que

$$\frac{s^2}{4} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geqslant xy = p,$$

avec égalité si et seulement si $x = y$. Ce résultat se retrouve bien si l'on remarque que

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy.$$

Ici, puisque l'on souhaite avoir $s^2/4 = 1 = p$, il nous faut donc également avoir $x = y$, de sorte que $x = y = 1$.
Enfin, réciproquement, on vérifie aisément, si $x = y = 1$, que

$$xy+1 = xy-x-y+3 = -2xy+x+y+2 = 2,$$

de sorte que $M = 2$ également.

Solution alternative n°1 Voici une autre manière de démontrer que les égalités de l'équation (1) sont vérifiées si et seulement si $x = y = 1$. Tout d'abord, si $x = y = 1$, ces égalités sont clairement vérifiées.
Réciproquement, si elles sont vérifiées, alors on peut réécrire l'égalité $xy-x-y+3 = 2$ comme $0 = xy-x-y+1 = (x-1)(y-1)$. Puisque x et y jouent des rôles symétriques, on peut supposer, sans perte de généralité, que $x = 1$. Pour que l'égalité $xy+1 = 2$ soit vérifiée, il est alors nécessaire que $y = 1$, ce qui conclut ici.

Solution alternative n°2 Avoir pensé à introduire les variables p et s, comme dans la première solution, ou bien à utiliser directement l'égalité $xy-x-y+3 = 2$ pour obtenir une factorisation, comme dans la deuxième solution, pourrait passer pour miraculeux. Il n'en est bien sûr rien, et ces approchent découlent en fait de ce que l'on appelle les **relations de Viète**.
Ces relations consistent à dire que x et y sont les deux racines, éventuellement confondues, du polynôme

$$P(X) = (X-x)(X-y) = X^2-(x+y)X+xy = X^2-sX+p.$$

Puisque les égalités de l'équation (1) sont symétriques en x et en y, un résultat général (valable même si on avait eu trois inconnues x, y et z, ou même un nombre quelconque d'inconnues) permet en fait de démontrer qu'elles peuvent s'exprimer directement à partir des valeurs que prend le polynôme P.

Par exemple, les égalités $p+1=2$, $p-s+3=2$ et $-2p+s+2=2$ peuvent se réécrire comme $P(0)=1$, $P(1)=0$ et $P(1/2)=1/4$. Ici, l'égalité $P(1)=0$ signifie précisément que $(x-1)(y-1)=0$, ce qui est la factorisation utilisée dans notre deuxième solution.

On pourrait également procéder de manière plus systématique. En effet, puisque $P(1)=0$, on sait que le polynôme $P(X)$ est divisible par $X-1$. On peut donc l'écrire sous la forme $P(X)=(X-1)(X-a)$, puis vérifier que $P(0)=a$, et donc que $P(X)=(X-1)^2$.

Si l'on avait été moins chanceux, et que l'on n'avait pas identifié de racine de notre polynôme P, il aurait toujours été possible d'écrire P comme un **polynôme d'interpolation de Lagrange**. Ici, cette méthode nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{X-1}{0-1}\frac{X-1/2}{0-1/2}P(0)+\frac{X-1}{1/2-1}\frac{X-0}{1/2-0}P(1/2)+\frac{X-1/2}{1-1/2}\frac{X-0}{1-0}P(1) \\ &= 2(X-1)(X-1/2)-X(X-1)=X^2-2X+1=(X-1)^2, \end{aligned}$$

d'où le fait que les deux racines de P soient $x=y=1$.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été plutôt bien résolu. Peu d'élèves ont vu que la première inégalité était une conséquence simple du fait que le maximum est plus grand que la moyenne arithmétique.

Attention au maniement des inégalités : certains élèves ont écrit que $xy<1$ et $x+y \geqslant xy$ pour en conclure que $x+y \geqslant 1$, ce qui n'est pas vrai. D'autres élèves ont démontré l'inégalité demandée mais oublié de regarder les cas d'égalité alors que c'était une partie importante de l'exercice : contrairement à des cas d'égalité dans des inégalités classiques, celui-là était plus dur à trouver, et affirmer sans preuve que $x=y=1$ ne suffisait pas.

Exercice 2. Dans le train, alors qu'elles rentrent de **EGMOnd** an Zee, Clara et Edwige jouent au jeu suivant. Initialement, l'entier $n = 1 \times 2 \times \cdots \times 20$ est écrit sur une feuille de papier. Puis, chacune à son tour, et en commençant par Clara, les joueuses remplacent l'entier n par un des nombres $kn/10$, où k est un entier compris entre 1 et 9 inclus. La première joueuse à écrire un nombre qui n'est pas entier perd, et son adversaire gagne.

Clara et Edwige sont deux joueuses redoutables, et jouent donc de manière optimale. Laquelle des deux va-t-elle gagner ?

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Intéressons-nous au nombre n écrit sur la feuille de papier au moment où la joueuse X s'apprête à jouer, et avant que la partie ne se termine. On factorise partiellement n comme produit de nombres premiers : $n = 2^x \times 5^y \times m$, où x et y sont des entiers naturels et m est un entier naturel non nul premier avec 2 et 5.

On va alors démontrer la propriété $\mathcal{P}_n$ par récurrence sur n : la joueuse X perdra si x et y sont tous deux pairs, et gagnera dans le cas contraire. Tout d'abord, $\mathcal{P}_1$ est évidente, puisque X devra remplacer le nombre $n = 1$ par un nombre compris entre $1/10$ et $9/10$.

Soit alors $n \geqslant 1$ un entier quelconque. On suppose $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$, et on va démontrer $\mathcal{P}_{n+1}$.

- ▷ Si x et/ou y est impair, on note r et s les restes de x et y modulo 2. Alors la joueuse X remplace l'entier n par l'entier $n' = n/(2^r \times 5^s)$. Puisque $n' = 2^{x-r} \times 5^{y-s} \times m$, la propriété $\mathcal{P}_{n'}$ assure alors que l'adversaire de X perdra.
- ▷ Si x et y sont pairs, on suppose tout de même que X remplace n par un entier n' (ce qui n'est possible que si $x \geqslant 1$ ou $y \geqslant 1$). Si X remplace n par le nombre $n' = n/2 = 2^{x-1} \times 5^y \times m$, alors $\mathcal{P}_{n'}$ assure que l'aversaire de X gagnera. Sinon, on peut écrire n' sous la forme $n' = 2^{x'} \times 5^{y-1} \times m'$ (avec m' premier avec et 2 et 5) : quelles que soient les valeurs de x' et de m', la propriété $\mathcal{P}_{n'}$ assure quand même que l'adversaire de X perdra.

On dispose donc de la propriété $\mathcal{P}_{20!}$, où l'on a posé $20! = 1 \times 2 \times \cdots \times 20$. En particulier, on constate aisément que $20! = 2^{18} \times 5^4 \times m$, où l'on a posé $m = 3^8 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$. Puisque Clara qui joue la première, c'est donc Edwige qui gagnera.

<u>*Solution alternative n°1*</u> Nous allons de nouveau fournir une stratégie gagnante pour Edwige, qui diffère légèrement de la stratégie précédente. Cette stratégie est toute simple (même si montrer qu'elle convient l'est moins) : si Clara vient de transformer son nombre n en un nouveau nombre $n' = kn/10$, alors Edwige transforme de nouveau n' en $n'' = kn'/10$.

Pour montrer que cette stratégie permettra à Edwige de gagner, et puisque la partie durera au plus $20! = 1 \times 2 \times \cdots \times 20$ coups, il suffit de démontrer que n'' sera nécessairement un entier. Ainsi, Edwige ne pourra pas perdre, et elle gagnera donc.

Tout d'abord, on constate que l'entier $20!$ est égal à $u^2 \times v$, où l'on a posé $u = 2^9 \times 2^4 \times 5^2 \times 7$ et $v = 11 \times 13 \times 17 \times 19$. On va maintenant démontrer que, si Edwige applique la stratégie ci-dessus, alors chacun des entiers n qu'elle laissera à Clara sera de la forme $n = \hat{u}^2 v$, avec $\hat{u}$ entier et $v = 11 \times 13 \times 17 \times 19$.

C'est déjà le cas au début du jeu. Puis, si Clara transforme un entier $n = \hat{u}^2 v$ en un autre entier $n' = kn/10$, Edwige transformera n' en le nombre $n'' = kn'/10 = (k\hat{u}/10)^2 v$. Il s'agit donc de démontrer que $k\hat{u}/10$ est un entier, c'est-à-dire que 2 et 5 divisent tous deux $k\hat{u}$.

Puisque n' est un entier, et comme $10n' = kn = k\hat{u}^2 v$, on sait que 2 et 5 divisent tous deux $k\hat{u}^2 v$. Or, 2 ne divise pas v, et divise donc k ou $\hat{u}$: il divise donc aussi $k\hat{u}$. De même, 5 ne divise pas v, et divise donc k ou $\hat{u}$: il divise donc aussi $k\hat{u}$. Cela conclut notre démonstration.

Commentaire des correcteurs Beaucoup d'élèves ont eu des bonnes idées sur le problème, mais peu ont réussi à obtenir une vraie preuve du fait qu'Edwige a une stratégie gagnante. En effet, un certain nombre d'élèves donne dès le départ une «stratégie optimale » à Clara : pour démontrer qu'Edwige gagne, il faut donner une stratégie à Edwige et vérifier quen peu importe ce que Clara faitn Edwige gagnera. En particulier, Clara n'a aucune raison de suivre une stratégie qui semble être la meilleure à vue d'œil (et qui, assez souvent, ne l'est pas).

Certains élèves ont rapidement considéré que seuls les seules valeurs de k importantes étaient $k = 1$, $k = 2$ et $k = 5$, en tant que diviseurs de 10. Cependant, $k = 4$ et $k = 8$ étaient tout aussi importants, permettant d'obtenir des valuations 2-adiques inaccessibles autrement.

Par ailleurs, plusieurs élèves ont bien compris que Edwige avait intérêt à laisser Clara à chaque étape avec un entier de la forme $2^x 5^y m$, avec m entier premier avec 10 et x et y pairs, mais n'ont pas prouvé que Edwige pouvait bien laisser Clara à chaque fois dans un tel état ; et surtout qu'Edwige pouvait jouer le coup en question !

Enfin, il aurait été bien de prouver que la partie termine dans tous les cas, ce sans quoi Edwige ne gagne bien sûr pas.

Exercice 3. Déterminer tous les entiers naturels x, y et z tels que

$$45^x - 6^y = 2019^z.$$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> On commence par décomposer chaque terme en produit de facteurs premiers. L'équation devient alors

$$3^{2x} \cdot 5^x - 3^y \cdot 2^y = 3^z \cdot 673^z.$$

Nous allons maintenant traiter différents cas :

- Si $y > 2x$, alors $3^z \cdot 673^z = 3^{2x}(5^x - 3^{y-2x} \times 2^y)$. Le théorème de Gauss indique alors que 3^z divise 3^{2x} (car $5^x - 3^{y-2x} \times 2^y$ n'est pas divisible par 3, donc est premier avec 3^z) et que 3^{2x} divise 3^z (car 673^z n'est pas divisible par 3, donc est premier avec 3^{2x}. On en déduit que $z = 2x$, et l'équation devient

  $$673^{2x} = 5^x - 3^{y-2x} \cdot 2^y.$$

  Mais, puisque $673^{2x} \geqslant 5^x$, cette équation n'a en fait pas de solution, et ce cas est donc impossible.
- Si $y = 2x$, alors $3^z \cdot 673^z = 3^{2x}(5^x - 2^y)$. Comme précédemment, le théorème de Gauss indique que 3^{2x} divise 3^z. On en déduit que $2x \leqslant z$, et l'équation devient

  $$3^{z-2x} \cdot 673^z = 5^x - 2^y.$$

  Mais, puisque $673^z \geqslant 5^z \geqslant 5^x$, cette équation n'a pas de solution elle non plus, et ce cas est donc impossible.
- Si $y < 2x$, alors $3^z \cdot 673^z = 3^y(3^{2x-y} \cdot 5^x - 2^y)$. Une fois encore, puisque ni 673^z ni $3^{2x-y} \cdot 5^x - 2^y$ ne sont divisibles par 3, le théorème de Gauss indique que 3^z et 3^y se divisent mutuellement. On en déduit que $z = y$, et l'équation devient

  $$673^y = 3^{2x-y} \cdot 5^x - 2^y.$$

  On distingue alors plusieurs sous-cas :
  - Si $y = 0$, l'équation devient $2 = 3^{2x} \cdot 5^x$, et n'a bien sûr aucune solution.
  - Si $y = 1$, l'équation devient $675 = 3^{2x-1} \cdot 5^x$. Puisque $675 = 3^3 \times 5^2$, on en déduit l'existence de la solution $(x, y, z) = (2, 1, 1)$.
  - Si $y \geqslant 2$, considérons notre équation modulo 4 : elle devient $1 \equiv 3^y \pmod 4$, ce qui signifie que y est pair.

    Puis, comme on a nécessairement $x \geqslant 1$, et si on considère l'équation modulo 5, celle-ci devient $(-2)^y \equiv -2^y \pmod 5$, ce qui signifie que y est impair. L'équation n'admet donc aucune solution dans ce sous-cas.

L'unique solution de l'équation est donc le triplet $(2, 1, 1)$.

<u>*Solution alternative n°1*</u> On peut traiter directement les cas $y > 2x$ et $y = 2x$ en une seule fois, en reprentant les arguments mentionnés ci-dessus dans un ordre légèrement différent.

Tout d'abord, puisque $2019^z < 45^x \leqslant 2019^x$, on en déduit que $z < x$. En outre, si l'un des trois entiers $2x$, y et z (on l'appellera t) est strictement plus petit que les deux autres, alors l'entier $3^{2x} \cdot 5^x - 3^y \cdot 2^y - 3^z \cdot 673^z$ n'est pas divisible par 3^{t+1}, ce qui est impossible puisqu'il est censé être nul. Puisque l'on sait déjà que $z < x \leqslant 2x$, on en déduit que $y = z$, et donc que $y = z < x$.

Solution alternative n°2 On travaille directement à partir de l'équation

$$45^x - 6^y = 2019^z.$$

Tout d'abord, puisque $45^x > 2019^z$, on sait que $x \geqslant 1$. Considérée modulo 5, l'équation se réécrit

$$-1 \equiv -1^y \equiv (-1)^z \pmod 5.$$

Cela signifie que z est un entier impair.

Puis, en considérant l'équation modulo 4, et puisque z est impair, celle-ci se réécrit

$$1 - 2^y \equiv 45^x - 6^y \equiv 2019^z \equiv (-1)^z \equiv -1 \pmod 4.$$

Cela signifie que $y = 1$.

Enfin, puisque $x \geqslant 1$, en considérant l'équation modulo 9, celle-ci se réécrit

$$3 \equiv 45^x - 6^y \equiv 3^z \pmod 9.$$

Cela signifie que $z = 1$.

L'équation devient alors $45^x = 6^y + 2019^z = 2025 = 45^2$, et le triplet $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ apparaît alors manifestement comme une solution de l'équation de l'énoncé.

En conclusion, l'unique solution recherchée est le triplet $(2, 1, 1)$.

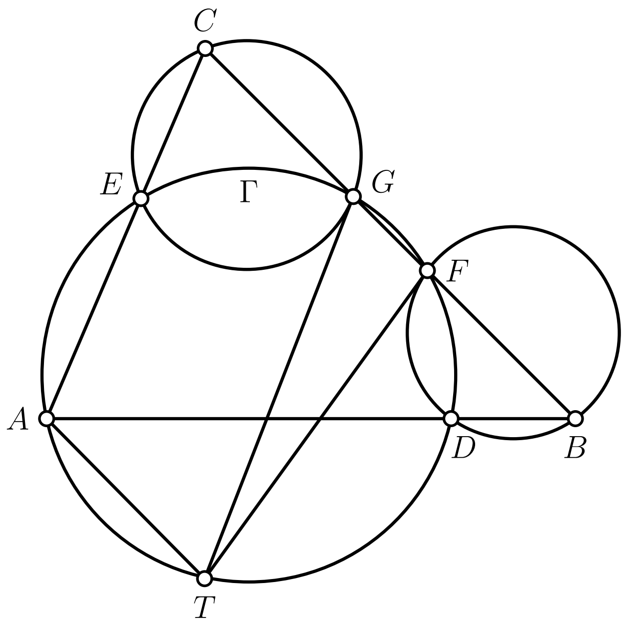
Commentaire des correcteurs L'exercice a été bien résolu. En particulier, de nombreux élèves ont commencé par écrire les petites puissances de 45, 6 et 2019, ce qui leur a permis de voir des relations remarquables modulo 10, puis de prendre conscience que regarder l'équation modulo de petits nombres pouvait être utile. D'autres ont reconnu, à juste titre, que 45, 6 et 2019 étaient des multiples de 3, ce qui les a poussés à utiliser la notion de valuation 3-adique. Dans les deux cas, il s'agit d'excellents réflexes, qui n'ont pas manqué de porter leurs fruits.

On peut néanmoins regretter que plusieurs élèves aient implicitement supposé x, y et z non nuls, alors que rien ne venait le garantir a priori : il faut faire attention de bien lire l'énoncé pour éviter de perdre ainsi, par naïveté, des points pas faciles à obtenir par ailleurs !

Exercice 4. Soit ABC un triangle et Γ un cercle passant par A. On suppose que Γ recoupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ en deux points, que l'on appelle respectivement D et E, et qu'il coupe le segment $[BC]$ en deux points, que l'on appelle F et G, de sorte que F se trouve entre B et G. Soit T le point d'intersection entre la tangente en F au cercle circonscrit à BDF et la tangente en G au cercle circonscrit à CEG.

Démontrer que, si les points A et T sont distincts, alors (AT) et (BC) sont parallèles.

Solution de l'exercice 4 Commençons par tracer une figure.



Une première remarque frappante est que T semble être situé sur le cercle Γ. Après avoir vérifié qu'il l'était bien sur une deuxième figure, on s'empresse donc de démontrer ce premier résultat. Pour ce faire, on entame donc une chasse aux angles de droites, en utilisant les relations de cocyclicité et le cas limite du théorème de l'angle au centre :

$$\begin{aligned}(TG,TF) &= (TG,BC) + (BC,TF) = (TG,CG) + (BF,TF) = (EG,EC) + (DB,DF) \\ &= (EG,AE) + (AD,DF) = (DG,AD) + (AD,DF) = (AD,DF).\end{aligned}$$

Les points A, F, G et T sont donc cocycliques, et T appartient à bien Γ. Mais alors

$$\begin{aligned}(AT,BC) &= (AT,AF) + (AF,BC) = (GT,GF) + (AF,GF) \\ &= (GT,GC) + (AE,GE) = (EG,EC) + (CE,GE) = 0^\circ,\end{aligned}$$

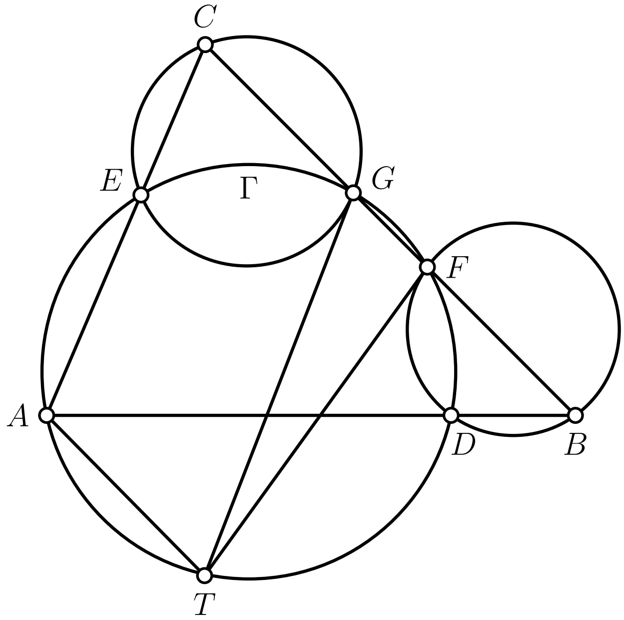
ce qui signifie précisément que les droites (AT) et (BC) sont parallèles.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été correctement résolu par 7 élèves. Quelques élèves, même s'ils n'ont pas complètement résolu le problème, ont utilisé leur figure pour conjecturer que le point T appartenait au cercle Γ et ont conclu en admettant ce résultat. Ce procédé a été grandement apprécié car c'est la bonne attitude face à un problème de géometrie.

Exercices Senior

Exercice 5. Soit ABC un triangle et Γ un cercle passant par A. On suppose que Γ recoupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ en deux points, que l'on appelle respectivement D et E, et qu'il coupe le segment $[BC]$ en deux points, que l'on appelle F et G, de sorte que F se trouve entre B et G. Soit T le point d'intersection entre la tangente en F au cercle circonscrit à BDF et la tangente en G au cercle circonscrit à CEG.
Démontrer que, si les points A et T sont distincts, alors (AT) et (BC) sont parallèles.

Solution de l'exercice 5 Commençons par tracer une figure.



Une première remarque frappante est que T semble être situé sur le cercle Γ. Après avoir vérifié qu'il l'était bien sur une deuxième figure, on s'empresse donc de démontrer ce premier résultat. Pour ce faire, on entame donc une chasse aux angles de droites, en utilisant les relations de cocyclicité et le cas limite du théorème de l'angle au centre :

$$\begin{aligned}(TG,TF) &= (TG,BC)+(BC,TF) = (TG,CG)+(BF,TF) = (EG,EC)+(DB,DF)\\ &= (EG,AE)+(AD,DF) = (DG,AD)+(AD,DF) = (AD,DF).\end{aligned}$$

Les points A, F, G et T sont donc cocycliques, et T appartient à bien Γ. Mais alors

$$\begin{aligned}(AT,BC) &= (AT,AF)+(AF,BC) = (GT,GF)+(AF,GF)\\ &= (GT,GC)+(AE,GE) = (EG,EC)+(CE,GE) = 0^\circ,\end{aligned}$$

ce qui signifie précisément que les droites (AT) et (BC) sont parallèles.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été très bien réussi ! Les élèves les plus efficaces ont noté qu'il suffisait de montrer que le point T' d'intersection de la droite parallèle à la droite (BC) passant par le point A avec le cercle Γ appartenait aux deux tangentes. Il est dommage de constater que plusieurs élèves ont rendu une figure très propre mais n'ont pas cherché à effectuer de conjectures à partir de cette figure, alors même que le point T appartient visiblement au cercle Γ.

Exercice 6. Soit S un ensemble d'entiers relatifs. On dit que S est *beau* s'il contient tous les entiers de la forme $2^a - 2^b$, où a et b sont des entiers naturels **non nuls**. On dit également que S est *fort* si, pour tout polynôme $P(X)$ non constant et à coefficients dans S, les racines entières de $P(X)$ appartiennent également à S.

Trouver tous les ensembles qui sont à la fois beaux et forts.

Solution de l'exercice 6 L'ensemble $\mathbb{Z}$ est clairement beau et fort. Nous allons démontrer que c'est le seul. Pour ce faire, considérons un ensemble S beau et fort : nous allons en fait prouver, par récurrence forte sur n, que les entiers n et $-n$ appartiennent nécessairement à S.

Tout d'abord, puisque S est beau, il contient les entiers $2^1 - 2^1 = 0$, $2^2 - 2^1 = 2$ et $2^1 - 2^2 = -2$. Il contient donc aussi les entiers 1 et -1, qui sont des racines respectives des polynômes $2 - 2X$ et $2 + 2X$.

On considère désormais un entier $n \geqslant 3$ tel que $-n-1, \ldots, n-1$ appartiennent tous à S. Soit α la valuation 2-adique de n, et m l'entier impair tel que $n = 2^\alpha m$. En notant $\varphi(m)$ l'indicatrice d'Euler de m, on constate alors que l'entier $k = 2^{\alpha+\varphi(m)+1} - 2^{\alpha+1}$, qui appartient manifestement à S, est également un multiple de 2^α et de m, donc de n.

Soit $\overline{a_\ell a_{\ell-1} \ldots a_0}$ l'écriture de k/n en base n. Tous les entiers $\pm a_0, \ldots, \pm a_\ell$ sont compris entre $1-n$ et $n-1$, donc appartiennent à S. Par construction, n est une racine entière du polynôme $P(X) = k - \sum_{i=0}^{\ell} a_i X^{i+1}$, dont tous les coefficients sont dans S, donc n est dans S lui aussi. De même, $-n$ est une racine entière du polynôme $Q(X) = k - \sum_{i=0}^{\ell} a_i (-X)^{i+1}$, donc $-n \in S$, ce qui conclut la récurrence et la démonstration.

Remarque : Au vu de l'énoncé, on pouvait se douter qu'utiliser des polynomes de degré $d \geqslant 2$ pourrait être utile, ce sans quoi les créateurs de l'énoncé auraient directement choisi de définir, tout simplement, les ensembles forts comme les ensembles stables par division. La remarque ci-dessous a pour but principal d'illustrer le fait que, si l'on cherche à simplifier drastiquement une hypothèse d'un énoncé mathématique, ici avec pour objectif de montrer que $\mathbb{Z}$ serait le seul ensemble beau stable par division, il est très important de chercher des constructions simples qui permettraient d'invalider cette simplification.

On va en fait démontrer qu'il existe un ensemble S beau et stable par division, mais différent de $\mathbb{Z}$: cela démontre qu'utiliser des polynomes de degré $d \geqslant 2$ était en fait *nécessaire* pour résoudre cet exercice. Pour construire cet ensemble, on a besoin du théorème de Zsygmondy ainsi que de la propriété connue suivante : il existe des nombres de Fermat (c'est-à-dire les entiers de la forme $2^p - 1$) qui ne sont pas premiers, même si p est assez grand (ci-dessous, on aura besoin de l'inégalité $p \geqslant 7$). C'est le cas, par exemple, quand $p = 11$, car $2^{11} - 1 = 23 \times 89$.

En effet, écrivons $2^p - 1$ comme le produit $2^p - 1 = q \times r \times m$, où q et r sont deux nombres premiers, et m est un entier quelconque. On considère alors l'ensemble S formé de 0 ainsi que des entiers de la forme

$$\pm 2^a \prod_{k \geqslant 2} (2^k - 1)^{\alpha_k},$$

où les α_k sont des entiers *relatifs* dont seul un nombre fini est non nul. L'ensemble S est manifestement beau et stable par division.

Supposons maintenant que $q \in S$: on écrit alors q sous la forme

$$q = \prod_{k \geqslant 2} (2^k - 1)^{\alpha_k},$$

et on note ℓ l'indice maximal tel que $\alpha_\ell \neq 0$. Puisque l'ordre de 2 modulo q et r divise p, il est égal à p, de sorte que $\ell \geqslant p \geqslant 7$.

Le théorème de Zsygmondy indique alors qu'il existe un nombre premier s qui divise $2^\ell - 1$ et aucun entier $2^k - 1$ pour $1 \leqslant k \leqslant \ell - 1$. On remarque alors que

$$v_s(q) = \sum_{k \geqslant 2} \alpha_k v_s(2^k - 1) = \alpha_\ell v_s(2^\ell - 1) \neq 0.$$

On en déduit que $s = q$, donc que $\ell = p$, et que $v_q(2^\ell - 1) = 1$. Cela signifie en particulier que $r \neq q$. Mais alors, même pour $\ell = p$, et au lieu de choisir $s = q$, on aurait pu satisfaire le théorème de Zsygmondy en choisissant $s = r$, obtenant ainsi une contradiction. On en conclut donc bien que $q \notin S$, et donc que $S \neq \mathbb{Z}$.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Ce problème de théorie des nombres était assez difficile car nécessitait une astuce : la solution la plus simple faisait appel à la décomposition d'un entier en base b. Seuls cinq élèves y ont pensé et ils ont tous obtenu la note maximale. Le barème valorisait cette astuce, si bien qu'il était impossible d'avoir une note strictement supérieure à 3 si cet élément de décomposition en base n'était pas évoqué.

Quasiment tous les élèves se sont rendus compte que le seul ensemble beau et fort serait $\mathbb{Z}$, sans forcément savoir le prouver.

Beaucoup d'élèves ont pensé à montrer que tout entier (parfois en ne se restreignant qu'aux entiers impairs ou premiers) possédait un multiple dans S, ce qui était essentiel dans la suite. Beaucoup ont également montré que S était symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire que, $n \in S$, alors $-n \in S$), ce qui permet d'éviter de se préoccuper des entiers négatifs dans la suite.

Revenons enfin sur quelques erreurs régulièrement rencontrées :

- ▷ La gestion des entiers négatifs a parfois été source d'une erreur importante, notamment quand les élèves ont entrepris de démontrer par récurrence que $[\![1, n]\!] \subseteq S$ pour tout $n \geqslant 1$. Certains élèves ont en effet introduit un entier $k \geqslant 1$ tel que $nk \in S$, et ils ont affirmé que $n - k$ appartenait par hypothèse de récurrence à S en tant qu'entier strictement inférieur à n. Cependant, ces élèves n'ont pas écarté le cas où $k \geqslant 2n$, de sorte que l'on pouvait avoir $n - k \leqslant -n$, remettant ainsi en cause tout leur raisonnement.
- ▷ Quelques élèves ont remarqué qu'il suffisait que tous les nombres premiers soient dans S pour conclure. C'est vrai, mais aucune solution connue ne prouve immédiatement ce résultat. En l'occurence, plusieurs élèves pensaient avoir résolu l'exercice en montrant ce résultat. Ils se fondaient sur la croyance (erronnée, comme indiqué dans la remarque ci-dessus) que, si n et m sont deux entiers naturels impairs distincts, alors l'ordre de 2 modulo n est différent de celui de 2 modulo m. Cette erreur est équivalente à la méconnaissance du théorème de Zsigmondy consistant à croire que pour $n \notin \{1, 6\}$, $2^n - 1$ a *exactement* un diviseur premier primitif.
- ▷ Enfin, les raisonnements vagues du style « on construit de plus en plus d'entiers en prenant les racines entières de polynômes à coefficients dans un ensemble de plus en plus grand » peuvent aider à se faire une idée, mais ne rapportent évidemment aucun point

Soulignons le fait que, dans un exercice comme celui-ci, vérifier explicitement que les petites valeurs de n (par exemple $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$) sont dans S rapporte forcément un point, et pourtant quelques élèves n'ont pas eu ce réflexe.

Enfin, beaucoup d'élèves prouvent que si $ab \in S$ et $a \in S$ non nul, alors $b \in S$. Ce résultat certes correct est en fait trompeur, car il invite à n'utiliser que les polynômes de degré 1 de l'énoncé, qui ne suffisent manifestement pas à conclure, comme indiqué dans la remarque ci-dessus.

Exercice 7. Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est *russe* si l'égalité

$$f(f(x+y)+y) = f(f(x)+y)$$

est vérifiée pour tous les entiers x et y. On dit également qu'un entier v est f-*rare* si l'ensemble des entiers x tels que $f(x) = v$ est un ensemble fini et non vide.

a) Démontrer qu'il existe une fonction f russe pour laquelle il existe un entier f-rare.

b) Démontrer que, pour toute fonction f russe, il existe au plus un entier f-rare.

Solution de l'exercice 7

a) Soit f la fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(n) = 2^{v_2(n)+1}$, où $v_2(n)$ est la valuation 2-adique de n. Tout d'abord, il est clair que 0 est f-rare, puisque son seul antécédent par f est 0 lui-même.
D'autre part, soit x et y deux entiers relatifs : en posant $v_2(0) = \infty$ et $\infty + 1 = \infty$, il apparaît que $v_2(f(x)) = v_2(x) + 1$, que $v_2(x+y) = \min\{v_2(x), v_2(y)\}$ si $v_2(x) \neq v_2(y)$, et que $v_2(x+y) \geqslant \min\{v_2(x), v_2(y)\} + 1$ sinon.
Enfin, on a $f(x) = f(y)$ si et seulement si $v_2(x) = v_2(y)$. Par conséquent,
- ▷ si $v_2(x) \geqslant v_2(y)$, alors
$$v_2(f(x+y)) = v_2(x+y) + 1 \geqslant v_2(y) + 1,$$
donc $v_2(f(x+y)+y) = v_2(y) = v_2(f(x)+y)$ et $f(f(x+y)+y) = f(f(x)+y)$;
- ▷ si $v_2(x) < v_2(y)$, alors
$$v_2(f(x+y)) = v_2(x+y) + 1 = v_2(x) + 1 = v_2(f(x)),$$
donc $f(x+y) = f(x)$ et $f(f(x+y)+y) = f(f(x)+y)$.

Ainsi, f est une fonction russe, ce qui répond à la question.

b) Soit v un éventuel entier f-rare. On pose $X_v = \{x \in \mathbb{Z} \colon f(x) = v\}$, puis $a = \min(X_v)$ et $b = \max(X_v)$.
Tout d'abord, une récurrence immédiate sur k montre que $f(f(x)+y) = f(f(x+ky)+y)$ pour tous les entiers relatifs x, y et k. Par conséquent, si on pose $y = a - f(x)$, alors
$$f(f(x+ky)+y) = f(f(x)+y) = f(a) = v,$$
donc $f(x+ky)+y \in X_v$, de sorte que $f(x+ky) \geqslant a-y = f(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. De même, si on pose $z = b - f(x)$, alors $f(x+\ell z)+z \in X_v$, de sorte que $f(x+\ell z) \leqslant b - z = f(x)$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble $X_{f(x)}$ contient donc l'entier $x + myz$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, si l'entier $r = f(x)$ est f-rare, c'est que $yz = 0$, et donc que $r = f(x) \in \{a, b\} \subseteq X_v$. Ainsi, seuls les éléments de X_v sont susceptibles d'être f-rares.
Mais alors, pour tout entier w qui serait f-rare, on sait que v appartient à la fois à X_v et à X_w, ce qui démontre que $v = w$, comme attendu.

Commentaire des correcteurs Ce problème très difficile a été substantiellement résolu par trois élèves. Ceux-ci ont, ce faisant, dépassé les attentes que les correcteurs avaient formulées au vu de la difficulté du problème.

Par ailleurs, plusieurs élèves ont proposé des fonctions russes qui n'en étaient en fait pas : il est important d'être méticuleux quand on vérifie qu'une fonction satisfait les conditions d'un énoncé, d'autant plus si cette vérification n'a rien d'évident, comme c'était le cas ici, et qu'elle est censée fournir une réponse toute faite à une question de l'énoncé.