PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 6 MAI 2020

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2005 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2004 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n'est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`https://sites.google.com/view/pofm-depotdescopies/accueil`

Exercices Junior

Exercice 1. Soit x et y deux nombres réels. On pose

$$M = \max\{xy + 1, xy - x - y + 3, -2xy + x + y + 2\}.$$

Démontrer que $M \geqslant 2$, et déterminer les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 1 Parmi les trois nombres $xy + 1$, $xy - x - y + 3$ et $-2xy + x + y + 2$, on note K le plus petit, L le deuxième plus petit et M le plus grand. Alors $K \leqslant L \leqslant M$ donc

$$3M \geqslant K + L + M = (xy + 1) + (xy - x - y + 3) + (-2xy + x + y + 2) = 6,$$

ce qui signifie que $M \geqslant 2$.
En outre, si $M = 2$, les inégalités $K \leqslant L \leqslant M$ sont en fait des égalités, ce qui signifie que

$$xy + 1 = xy - x - y + 3 = -2xy + x + y + 2 = 2. \tag{1}$$

En notant p le produit xy et s la somme $x + y$, les égalités de l'équation (1) sont vérifiées si et seulement si $p = 1$ et $s = 2$.
Or, l'inégalité arithmético-géométrique indique, de manière générale, que

$$\frac{s^2}{4} = \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \geqslant xy = p,$$

avec égalité si et seulement si $x = y$. Ce résultat se retrouve bien si l'on remarque que

$$\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 + xy.$$

Ici, puisque l'on souhaite avoir $s^2/4 = 1 = p$, il nous faut donc également avoir $x = y$, de sorte que $x = y = 1$.
Enfin, réciproquement, on vérifie aisément, si $x = y = 1$, que

$$xy + 1 = xy - x - y + 3 = -2xy + x + y + 2 = 2,$$

de sorte que $M = 2$ également.

Solution alternative n°1 Voici une autre manière de démontrer que les égalités de l'équation (1) sont vérifiées si et seulement si $x = y = 1$. Tout d'abord, si $x = y = 1$, ces égalités sont clairement vérifiées.

Réciproquement, si elles sont vérifiées, alors on peut réécrire l'égalité $xy - x - y + 3 = 2$ comme $0 = xy - x - y + 1 = (x - 1)(y - 1)$. Puisque x et y jouent des rôles symétriques, on peut supposer, sans perte de généralité, que $x = 1$. Pour que l'égalité $xy + 1 = 2$ soit vérifiée, il est alors nécessaire que $y = 1$, ce qui conclut ici.

Solution alternative n°2 Avoir penser à introduire les variables p et s, comme dans la première solution, ou bien à utiliser directement l'égalité $xy - x - y + 3 = 2$ pour obtenir une factorisation, comme dans la deuxième solution, pourrait passer pour miraculeux. Il n'en est bien sûr rien, et ces approchent découlent en fait de ce que l'on appelle les **relations de Viète**.

Ces relations consistent à dire que x et y sont les deux racines, éventuellement confondues, du polynôme

$$P(X) = (X - x)(X - y) = X^2 - (x + y)X + xy = X^2 - sX + p.$$

Puisque les égalités de l'équation (1) sont symétriques en x et en y, un résultat général (valable même si on avait eu trois inconnues x, y et z, ou même un nombre quelconque d'inconnues) permet en fait de démontrer qu'elles peuvent s'exprimer directement à partir des valeurs que prend le polynôme P.

Par exemple, les égalités $p + 1 = 2$, $p - s + 3 = 2$ et $-2p + s + 2 = 2$ peuvent se réécrire comme $P(0) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(1/2) = 1/4$. Ici, l'égalité $P(1) = 0$ signifie précisément que $(x - 1)(y - 1) = 0$, ce qui est la factorisation utilisée dans notre deuxième solution.

On pourrait également procéder de manière plus systématique. En effet, puisque $P(1) = 0$, on sait que le polynôme $P(X)$ est divisible par $X - 1$. On peut donc l'écrire sous la forme $P(X) = (X - 1)(X - a)$, puis vérifier que $P(0) = a$, et donc que $P(X) = (X - 1)^2$.

Si l'on avait été moins chanceux, et que l'on n'avait pas identifié de racine de notre polynôme P, il aurait toujours été possible d'écrire P comme un **polynôme d'interpolation de Lagrange**. Ici, cette méthode nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{X-1}{0-1}\,\frac{X-1/2}{0-1/2}\,P(0) + \frac{X-1}{1/2-1}\,\frac{X-0}{1/2-0}\,P(1/2) + \frac{X-1/2}{1-1/2}\,\frac{X-0}{1-0}\,P(1) \\ &= 2(X-1)(X-1/2) - X(X-1) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2, \end{aligned}$$

d'où le fait que les deux racines de P soient $x = y = 1$.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été plutôt bien résolu. Peu d'élèves ont vu que la première inégalité était une conséquence simple du fait que le maximum est plus grand que la moyenne arithmétique.

Attention au maniement des inégalités : certains élèves ont écrit que $xy < 1$ et $x + y \geqslant xy$ pour en conclure que $x+y \geqslant 1$, ce qui n'est pas vrai. D'autres élèves ont démontré l'inégalité demandée mais oublié de regarder les cas d'égalité alors que c'était une partie importante de l'exercice : contrairement à des cas d'égalité dans des inégalités classiques, celui-là était plus dur à trouver, et affirmer sans preuve que $x = y = 1$ ne suffisait pas.

Exercice 2. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 3. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 4. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercices Senior

Exercice 5. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 6. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 7. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**