PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 5 : POT POURRI
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 15 MARS 2020

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2005 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.
contact-pofm@animath.fr

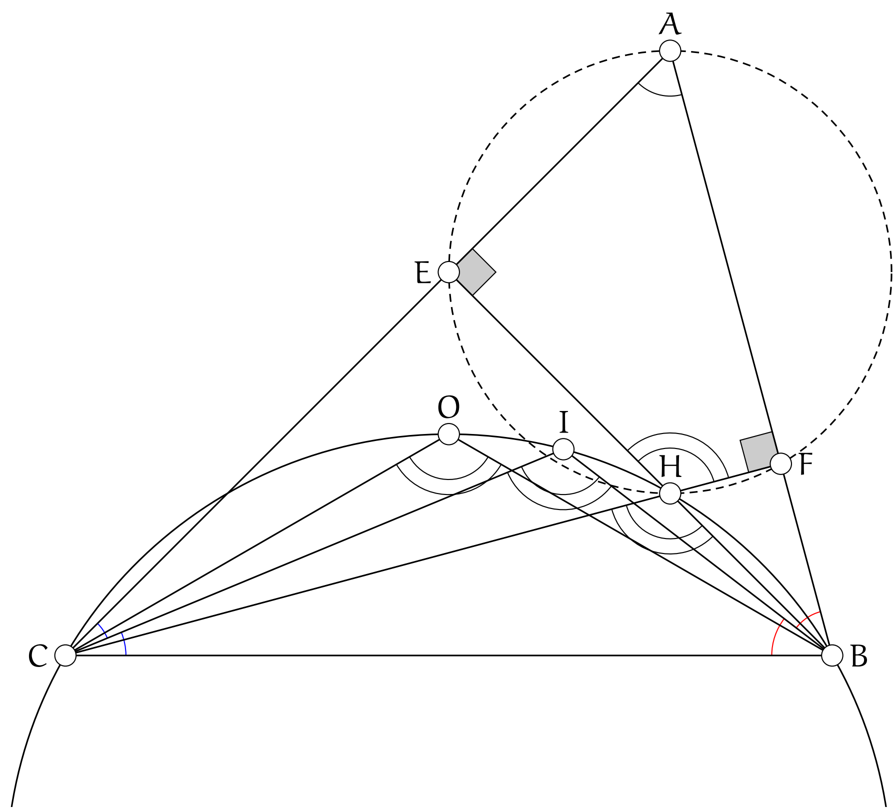
Exercices Juniors

Exercice 1. Martin et Théo jouent à un jeu : Martin écrit un nombre entier au tableau. Théo a ensuite le droit d'effacer le nombre et de lui ajouter 2, ou d'effacer le nombre et de lui enlever 3, ceci autant de fois qu'il veut. Théo gagne s'il arrive à obtenir 2020 après un nombre fini d'étapes, sinon Martin gagne. Quel joueur a une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 1 On commence par tester l'énoncé pour des entiers proches de 2020. Par exemple, on remarque que si Martin écrit les entiers $2018, 2016, \ldots$, Théo peut écrire 2020 au tableau en rajoutant au nombre écrit par Martin un nombre suffisamment grand de 2. On remarque aussi que si Martin écrit 2019, Théo peut aussi gagner en remplaçant 2019 par 2021 puis 2023 puis 2023 par 2020.
Cette remarque nous permet de conjecturer d'une part que Théo peut toujours gagner quelque soit le nombre écrit par Martin, d'autre part que si un nombre k est écrit au tableau, Théo peut écrire les nombres $k+1$ ou $k-1$ au bout d'un nombre fini d'opérations.
Nous montrons donc que Théo peut toujours gagner quelque soit le nombre écrit par Martin. Supposons qu'à un instant donné, le nombre k est écrit au tableau. Alors en remplaçant k par $k+2$ en ajoutant 2, $k+2$ par $k+4$ en ajoutant 2 et enfin $k+4$ par $k+1$ en retranchant 3, Théo a remplacé le nombre k par le nombre $k+1$ en un nombre fini d'opération. Nous appellerons cette transformation l'opération A. D'autre part, toujours si l'entier k est écrit au tableau à un instant donné, en remplaçant k par $k+2$ et $k+2$ par $k-1$, Théo a remplacé l'entier k par l'entier $k-1$. Nous appellerons cette transformation l'opération B.
Supposons désormais que Martin a écrit le nombre k_0 au tableau. Si $k_0 = 2020$, Théo a déjà gagné. Si $k_0 < 2020$, alors en effectuant $2020 - k_0$ fois l'opération A, Théo peut remplacer l'entier k_0 par 2020 et gagner. Si $k_0 > 2020$, en effectuant $k_0 - 2020$ fois l'opération B, Théo peut remplacer à nouveau l'entier k_0 par 2020. Dans tous les cas, Théo gagne !
Commentaire des correcteurs : L'exercice a été résolu avec succès par tous les élèves qui l'ont abordé.

Exercice 2. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 60°$. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, H son orthocentre et I le point d'intersection des bissectrices. Montrer que les points B, O, I, H et C sont cocycliques.

Solution de l'exercice 2



On traite le cas où les angles du triangle sont aigus.
Avant de se lancer dans une chasse aux angles, on se demande quelles égalités d'angles nous allons déterminer pour montrer que les 5 points sont sur un même cercle. Pour cela, on note qu'on a, à priori, plus facilement accès aux angles des triangles BOC, BHC et BIC qu'aux angles du triangle BOH par exemple. Ceci nous motive à montrer que $\widehat{BOC} = \widehat{BHC} = \widehat{BIC}$.
Tout d'abord, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BAC} = 120°$. On sait donc que nous allons devoir montrer successivement $\widehat{BHC} = 120°$ et $\widehat{BIC} = 120°$.
Pour calculer $\widehat{BHC}$, on utilise la définition du point H comme le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC. On introduit donc D, E et F les pieds des hauteurs respectivement issues des sommets A, B et C. On utilise alors le fait (classique) que $\widehat{HEA} = 180° - \widehat{HFA} = 90°$ pour obtenir que les points A, E, H et F sont cocycliques. Ainsi $\widehat{FHE} = 180° - \widehat{EAF} = 120°$ donc $\widehat{BHC} = \widehat{EHF} = 120°$
Enfin, pour montrer que $\widehat{BIC} = 120°$, on se sert du fait que le point I est le point d'intersection des bissectrices du triangle. Cette définition nous donne en effet accès aux angles $\widehat{BCI}$ et $\widehat{BCI}$ en fonction des angles du triangle. On a donc :

$$\widehat{BIC} = 180° - \widehat{IBC} - \widehat{ICB} = 180° - \frac{1}{2}\widehat{ABC} - \frac{1}{2}\widehat{ACB} = 180° - \frac{1}{2}(180° - \widehat{BAC}) = 180° - 60° = 120°$$

En conclusion, $\widehat{BOC} = \widehat{BHC} = \widehat{BIC} = 120°$ donc les 5 points B, O, H, I et C sont cocycliques.

On peut traiter de façon similaire le cas où un des angles du triangle ABC est obtus.
Commentaire des correcteurs : L'exercice est majoritairement bien réussi.

Exercice 3.

1. Existe-t-il des nombres $a_0, \dots, a_{2020}$ valant -1 ou 1 tels que $a_0 \times a_1 + a_1 \times a_2 + \cdots + a_{2019} \times a_{2020} + a_{2020} \times a_0 = 1010$?
2. Existe-t-il des nombres $a_1, \dots, a_{2020}$ valant -1 ou 1 tels que $a_1 \times a_2 + a_2 \times a_3 + \cdots + a_{2019} \times a_{2020} + a_{2020} \times a_1 = 1010$?

Solution de l'exercice 3

Déjà regardons l'énoncé : on veut savoir si on peut trouver des nombres $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ valant $+1$ ou -1 tels que $a_1 a_2 + \cdots + a_n a_1$ vaut 1010 avec dans la première question $n = 2021$, dans la seconde $n = 2020$. Pour cela on peut tester avec des n petits quels sont les nombres qu'on peut écrire sous la forme $a_1 a_2 + \cdots + a_n a_1$. Pour $n = 3$, on trouve 3 (si on ne prend que des 1) et -1 (si on prend $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = -1$). Pour $n = 4$, on trouve $4, 0, -4$ (pour avoir 4 on ne prend que des 1, pour avoir 0 il suffit de prendre trois a_i valant 1 et un valant -1, pour avoir -4, il suffit d'altener les a_i valant 1 et ceux valant -1. On peut continuer à tester les valeurs pour des n petits. On peut remarquer que déjà les nombres qu'on peut obtenir ont l'air d'être régulièrement écartés de 4, ils sont même congrus à n modulo 4.

Notons également que si $a = \pm 1$ et $b = \pm 1$, alors $ab \pm 1$ et que $ab = 1$ si $a = b$ et $ab = -1$ si $a = -b$.

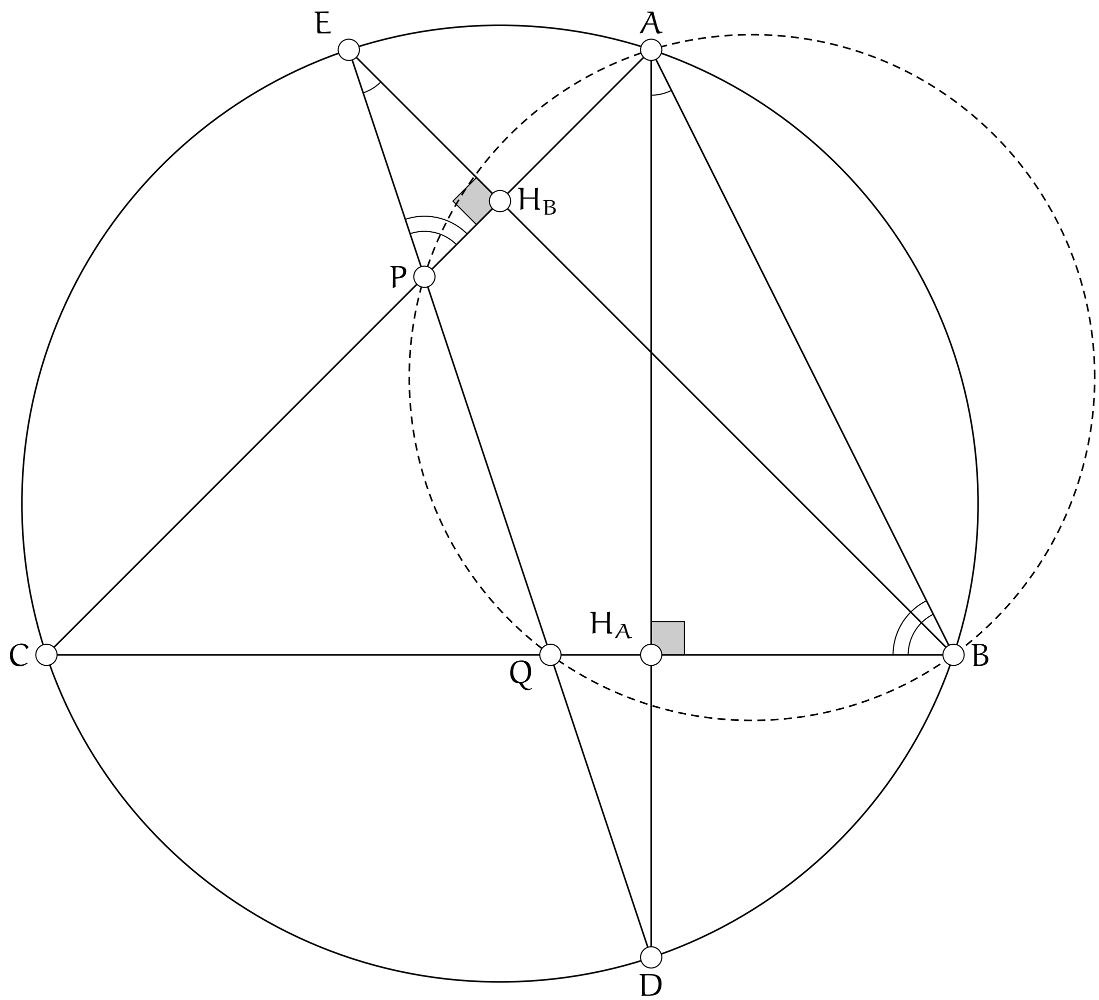
1. Ici on est dans le cas où $n = 2021$ et on veut obtenir une somme de 1010. Cela semble impossible à cause de la parité, on va donc regarder la parité de la somme. Soient $a_0, \dots, a_{2020}$ des nombres valant -1 ou 1. Pour simplifier on pose $a_{2021} = a_0$. Comme on a toujours $a_i a_{i+1} = \pm 1$, $a_0 \times a_1 + a_1 \times a_2 + \cdots + a_{2019} \times a_{2020} + a_{2020} \times a_0$ est une somme de 2021 nombres impairs, donc impaire. Elle ne peut donc pas valoir 1010 qui est pair. Il n'existe pas de nombres $a_0, \dots, a_{2020}$ valant -1 ou 1 tels que $a_0 \times a_1 + a_1 \times a_2 + \cdots + a_{2019} \times a_{2020} + a_{2020} \times a_0 = 1010$.
2. Dans ce cas $n = 2020$ est divisible par 4. A priori vu les tests effectués pour des petites valeurs, on s'attend à ce que le nombre obtenu soit divisible par 4, or $1010 = 2 \times 505$ n'est pas divisible par 4. On pourrait essayer de réutiliser l'argument de parité précédent, mais comme 2020 est pair, il prouverait que la somme est paire, or 1010 l'est aussi. Il va donc falloir plus précisément compter les moments où $a_i a_{i+1} = -1$ et ceux où $a_i a_{i+1} = 1$. Or on sait que $a_i a_{i+1} = -1$ si et seulement si $a_i = -a_{i+1}$, il suffit donc de compter le nombre de changement de signes de la suite a_i !

   Soient $a_1, \dots, a_{2020}$ des nombres valant -1 ou 1 tels que $a_1 \times a_2 + a_2 \times a_3 + \cdots + a_{2019} \times a_{2020} + a_{2020} \times a_1 = 1010$. Posons $a_{2021} = a_1$. On note N le nombre de i tels que $1 \leqslant i \leqslant 2020$ tels que $a_i = -a_{i+1}$. En particulier dans la somme $a_1 \times a_2 + a_2 \times a_3 + \cdots + a_{2019} \times a_{2020} + a_{2020} \times a_1$ il y a N valeurs -1 et $(2020 - N)$ valeurs 1. La somme vaut donc $2020 - N - N = 2020 - 2N$, on a donc $2020 - 2N = 1010$ soit $2N = 1010$ donc $N = 505$. Or N est pair. En effet N est le nombre de changement de signs dans la suite $(a_1, \dots, a_{2020}, a_1)$ et cette suite commence par a_1 et termine a_1 donc elle a nécessairement un nombre pair de changements de signe puisque a_1 est du même signe que lui-même. On ne peut donc pas avoir $N = 505$, ce qui fournit une contradiction. Il n'existe pas de nombres $a_1, \dots, a_{2020}$ valant -1 ou 1 tels que $a_1 \times a_2 + \cdots + a_{2019} \times a_{2020} + a_{2020} \times a_1 = 1010$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été bien traité : la première question a été quasiment toujours réussie, pour la seconde question, la majorité des copies mentionne qu'un nombre impair de produits valant -1 est possible mais peu trouvent un argument rigoureux pour le prouver : on pouvait vérifier que changer a_i en $-a_i$ ne changeait pas la parité du nombre de produits valant -1 et dire que dans la situation où tous les a_i valent 1, le nombre de produits valant -1 est pair, il ne pouvait donc être impair à la fin. On pouvait également interpréter les produits -1 comme les changements de parité de la suite (a_i) composée de $a_1, \dots, a_{2019}, a_1$. Comme elle commence à a_1 et termine à a_1, le nombre de changements de signe est forcément pair.

Exercice 4. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus. La hauteur issue de A recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en un point D. La hauteur issue de B recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en un point E. La droite (ED) coupe les côtés $[AC]$ et $[BC]$ respectivement en les points P et Q. Montrer que les points P, Q, B et A sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4



Déterminons quels sont les angles qui semblent faciles d'accès. Par exemple, il semble compliqué de pouvoir obtenir l'angle $\widehat{PBQ}$ ou l'angle $\widehat{PBA}$. En revanche, on connaît déjà l'angle $\widehat{QBA}$ donc il semble raisonnable d'essayer de montrer que $\widehat{QPA} = 180° - \widehat{QBA}$.
Or, $180° - \widehat{QPA} = \widehat{EPA}$, on essaye donc de montrer que $\widehat{EPA} = \widehat{QBA}$. Deux angles droits nous sont donnés : si on pose H_B le pied de la hauteur issue du sommet B et H_A le pied de la hauteur issue du sommet A, alors les angles $\widehat{AH_AB}$ et $\widehat{BH_BA}$ sont droits.
On n'a pas encore utilisé l'hypothèse que les points E et D étaient sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Cette hypothèse se traduit par une égalité d'angle à l'aide du théorème de l'angle inscrit. Ceci donne notemment $\widehat{DEB} = \widehat{DAB}$.

En reportant ces différentes égalités d'angles sur la figure, on trouve donc que $\widehat{PEH_B} = \widehat{H_A AB}$ et $\widehat{PH_B E} = \widehat{BH_A A}$. Les triangles PEH_B et BAH_A sont donc sembables (il y a deux paires d'angles égaux deux à deux). Ainsi, $\widehat{EPH_B} = \widehat{ABH_A}$ qui est l'égalité que l'on souhaitait démontrer.
Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien réussi et les élèves ont montré plusieurs façons efficaces de voir les choses.

Exercice 5. Les cases d'un échiquier 8×8 sont blanches. Un coup consiste à échanger les couleurs des cases d'un rectangle 3×1 ou 1×3 (les cases blanches deviennent noires et les cases noires deviennent blanches). Est-il possible d'aboutir en un nombre fini de coups à la configuration où toutes les cases de l'échiquier sont noires ?

Solution de l'exercice 5 L'énoncé présente une suite finie d'opérations et le problème demande s'il est possible de partir de la situation initiale pour arriver à une certaine situation finale. Une première idée dans ce cas est de chercher un invariant.
On peut éventuellement essayer à la main de voir s'il est possible d'aboutir à une configuration où toutes les cases sont noires. Après plusieurs essais, on se rend compte qu'on n'arrive pas à aboutir la configuration désirée et on peut donc conjecturer que la réponse à l'exercice est négative.
Ici, le support de l'énoncé est un échiquier, on va donc chercher un invariant de coloriage, c'est-à-dire que nous allons chercher un coloriage astucieux de l'échiquier qui mette en évidence l'invariant. Quelles sont les caractéristiques d'un bon coloriage ? Tout d'abord, puisque les rectangles considérés possèdent 3 cases, on peut chercher un coloriage qui possède au plus 3 couleurs. Aussi, on peut chercher un coloriage tel que chaque rectangle 3×1 ou 1×3 possède une case de chaque couleur. On adopte donc le coloriage suivant (où on a remplacé les couleurs par des numéros, étant donné que l'exercice parle déjà de couleurs de cases).

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

Que nous apprend ce coloriage ? Chaque rectangle 3×1 ou 1×3 possède exactement une case de chaque numéro. Donc lorsque l'on change les couleurs d'un rectangle, exactement une case de chaque numéro change de couleur. Puisque les nombres de cases de numéro $1, 2$ et 3 ne sont pas identiques, ceci nous encourage à compter à chaque étape le nombre de cases blanches de chaque numéro.
Soit N_1 le nombre de cases blanches contenant le numéro 1, dites de type 1, N_2 le nombre de cases blanches de types 2 et N_3 le nombre de cases blanches de type 3. Dans la situation initiale, $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_3 = 21$ et $\mathrm{N}_2 = 22$, ces nombres ne sont pas tous égaux. On va donc s'intéresser à l'évolution de la différence entre les nombres N_1 et N_2. Changer la couleur des cases d'un rectangle 3×1 ou 1×3 fait en même temps diminuer ou augmenter chacun des nombres $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2$ et N_3. En particulier, la différence $\mathrm{N}_1 - \mathrm{N}_2$, à chaque étape, augmente de $2, 0$ ou -2. En particulier, sa parité ne change pas. Or $\mathrm{N}_1 - \mathrm{N}_2$ est impair au départ. Dans la situation finale demandée, $\mathrm{N}_1 - \mathrm{N}_2 = 0$. 0 est pair, donc le nombre $\mathrm{N}_1 - \mathrm{N}_2$ ne peut être nul au bout d'un nombre fini d'étape. On ne peut donc pas arriver à un échiquier entièrement noir.
Commentaire des correcteurs : L'exercice n'a pas été abordé par beaucoup d'élèves. L'exercice est cela dit un exercice d'invariant par coloriage très instructif.

Exercice 6. Déterminer tous les triplets (x, y, z) d'entiers naturels satisfaisant l'équation :

$$2^x + 3^y = z^2$$

Solution de l'exercice 6 Tout d'abord, analysons le problème : on a une équation diophantienne avec une puissance 2, une puissance de 3 et un carré. On s'empresse donc de tester les petites valeurs de z et de trouver la solution. On peut remarquer que $2^0+3^1 = 2^2$, $2^3+3^0 = 3^2$ et $2^4+3^2 = 5^2$. A priori comme on a quelques solutions, on ne va pas trouver de contradictions immédiates simplement en regardant modulo quelque chose.

Néanmoins on a un carré, donc il est naturel de regarder modulo 4 ou modulo 3 et d'essayer d'obtenir des informations sur x et y. Idéalement, on aimerait obtenir que soit x soit y est pair, comme ça on aurait un autre carré dans l'équation ce qui nous permettrait de factoriser. On va donc regarder modulo 4, pour cela on a envie de traitrer en premier le cas où 4 divise 2^x, i.e. le cas $x \geqslant 2$.

Supposons $x \geqslant 2$. Comme un carré est congru à 0 ou 1 modulo 4, z^2 est congru à 0 ou 1 modulo 4, donc 3^y aussi. Comme il n'est pas divisible par 4, on a forcément $3^y \equiv 1 \pmod 4$. Comme $3^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod 4$, on a nécessairement y pair (si $y = 2k+1$, $3^y \equiv 9^k \times 3 \equiv 3 \pmod 4$). Posons $y = 2k$ avec k entier, on obtient $2^x = z^2 - (3^k)^2 = (z-3^k)(z+3^k)$. Notons que $z+3^k$ est strictement positif, donc $z-3^k$ l'est aussi car leur produit est strictement positif. Ainsi $z+3^k$ et $z-3^k$ sont des puissances de 2 car elles divisent 2^x.

Ici on a deux termes dont le produit vaut 2^x, on aimerait montrer que l'un d'entre eux ne peut pas être très grand. Pour cela on va considérer le pgcd de $z+3^k$ et $z-3^k$ et le calculer en utilisant qu'il divise leur somme, différence et produit.

Soit d le pgcd de $(z-3^k)$ et $(z+3^k)$, alors d divise $(z+3^k)-(z-3^k) = 2 \times 3^k$, mais d divise aussi 2^x donc d divise 2. Comme $z+3^k \equiv z-3^k \pmod 2$, si d vaut 1, $(z-3^k)$ et $(z+3^k)$ sont impairs donc 2^x aussi, ce qui contredit le fait que $x \geqslant 2$. On a donc $d = 2$

En particulier comme $(z-3^k)$ et $(z+3^k)$ sont des puissances de 2 de pgcd 2, le plus petit des deux vaut 2 donc comme $z+3^k > z-3^k$, $z = 3^k+2$. Considérer le pgcd ici n'est pas nécessaire, on aurait pu directement aboutir à cela en posant $z+3^k = 2^a$, $z-3^k = 2^b$, observé que $a > b$ et écrit $2 \times 3^k = 2^a - 2^b = 2^b(2^{a-b}-1)$, mais un bon réflexe quand on a un produit est de regarder le pgcd des facteurs.

De ceci, on déduit que $z+3^k = 2^{x-1}$ et $z-3^k = 2$, donc en faisant la différence $2 \times 3^k + 2 = 2^{x-1}$ donc $3^k+1 = 2^{x-2}$. Cette équation est assez connue, mais si on ne la connait pas, comme on a des puissances de 2 et de 3, il est pertinent de regarder modulo $2, 4, 8$ ou $3, 9$. Comme $3+1 = 2^2$, regarder modulo 4 et 3 ne conclura pas tout de suite, on regarde donc modulo 8.

Si $x \geqslant 5$, 8 divise 2^{x-2} donc 8 divise 3^x+1. Or les puissances de 3 modulo 8 valent 1 ou 3 donc $3^x - 1$ vaut 2 ou 4 modulo 8 et n'est pas divisible par 8, ce qui donne une contradiction. On a donc forcément $x = 2, 3$ ou 4.

Pour $x = 2$, $1 = 1+3^k$ donc $3^k = 0$ ce qui est impossible. Pour $x = 3$, $1+3^k = 2$ donc $3^k = 1$ donc $k = 0$ et $y = 0$. Pour $x = 4$, $1+3^k = 4$ donc $3^k = 3$, on a donc $k = 1$ soit $y = 2$.

Réciproquement, si $(x, y) = (3, 0)$, $z^2 = 2^x + 3^y = 9 = 3^2$ donc $z = \pm 3$ et le triplet $(3, 0, 3)$ convient. Si $(x, y) = (4, 2)$, $z^2 = 2^x + 3^y = 25 = 5^2$ donc $z = 5$ et le triplet $(4, 2, 5)$ convient.

Il reste donc à traiter le cas où $x = 0$ et celui où $x = 1$. Pour le cas où $x = 0$, on a $2^x = 1$ qui est un carré, on va donc factoriser et réutiliser la technique du pgcd. Si $x = 0$, l'équation se réécrit $3^y = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$. Le pgcd de $z-1$ et $z+1$ divise 3^y et divise $z+1-(z-1) = 2$ donc il vaut nécessairement 1. Comme $3^y = (z-1)(z+1)$, $z-1$ et $z+1$ sont des puissances de 3 positives (car $z+1 > 0$ donc $z-1 > 0$ leur produit étant strictement positif) de pgcd 1, le plus petit des deux

vaut nécessairement 1 donc $z-1=1$, $z=2$. On obtient $3^y = z^2-1=3$ donc $y=1$. Réciproquement $(0,1,2)$ est solution car $1+3=2^2$.
Pour le cas $x=1$, on ne voit pas de solution, il faut donc trouver un modulo pertinent pour évaluer l'équation, comme il y a une puissance de 3 et un carré, on peut regarder modulo 3. Si $x=1$ l'équation devient $2+3^y=z^2$. Si $y=0$ l'équation devient $z^2=3$ qui n'a pas de solution entière. On a donc $y>0$ donc $z^2 \equiv 2 \pmod 3$. Or un carré modulo 3 est congru à 0 ou 1, il n'y a donc pas de solution pour $x=1$.
Les solutions sont donc $(0,1,2)$, $(3,0,3)$ et $(4,2,5)$.
Commentaire des correcteurs : Exercice globalement bien réussi. Il faut néanmoins penser à vérifier les solutions obtenues et justifier tout ce qui est affirmé : par exemple il faut justifier que si deux puissances de 2 sont distance de 2 ce sont forcément 2 et 4 (on peut le faire facilement en regardant modulo 4).

Exercice 7. Une grille de taille $n \times n$ contient n^2 cases. Chaque case contient un entier naturel compris entre 1 et n, de telle sorte que chaque entier de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ apparaît exactement n fois dans la grille. Montrer qu'il existe une colonne ou une ligne de la grille contenant au moins $\sqrt{n}$ nombres différents.

Solution de l'exercice 7 Essayons d'abord de regarder ce qui se passe dans ce qui semble être "le pire cas" : si chaque ligne/colonne ne contient pas beaucoup de numéros, chaque numéro va y être beaucoup présent. En particulier, pour tout i, le nombre de i semble être écrit dans peu de lignes et de colonnes. Mais à priori si le numéro i apparait trop dans une ligne, il apparaitra dans beaucoup de colonnes et inversement. A priori, le pire cas semble être celui où chaque numéro apparaît dans autant de colonnes que de lignes et comme chaque numéro apparaît n fois, le carré doit être de dimension $\sqrt{n}$, donc i apparait dans au moins $2\sqrt{n}$ lignes et colonnes.

Bien sûr, cette analyse ne constitue en rien une preuve, mais on voit deux idées importantes : premièrement, le nombre de numéros distincts dans chaque ligne/colonne semble avoir un lien avec le nombre de lignes/colonnes où chaque numéro apparaît. Deuxièmement, pour tout i entre 1 et n, le nombre i apparait au moins sur $2\sqrt{n}$ lignes et colonnes. On va donc essayer de formaliser ça.

Notons $a_{c,i}$ pour c une colonne ou une ligne et i un entier entre 1 et n le nombre de fois qu'apparait i dans c, notons c_i (resp. l_i) le nombre de colonnes (resp. lignes) à laquelle i appartient. On note C l'ensemble des colonnes L celui des lignes.

Notons que l'hypothèse du fait que i apparait n fois se traduit comme $c_i \times l_i \geqslant n$ car i apparait dans au plus $c_i l_i$ cases.

Notons que pour tout i, $l_i + c_i$ étant le nombre de ligne ou de colonne où apparait i, il vaut $\sum\limits_{c \in C \cup L} a_{c,i}$.

Le nombre d'éléments distincts dans la colonne c vaut, quant à lui, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{c,i}$. En particulier, on voit bien que les $a_{c,i}$ jouent un rôle important dans le problème.

Maintenant il reste à relier le nombre d'apparitions de i dans les différentes lignes/colonnes au nombre de numéros dans chaque ligne. Pour cela on va regarder la somme des $a_{c,i}$ (on somme sur i entre 1 et n et sur c colonne et ligne) et utiliser les deux interprétations précédentes.

On obtient ainsi $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{c \in C \cup L} a_{c,i} = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i + l_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} 2\sqrt{c_i l_i} \geqslant 2n\sqrt{n}$.

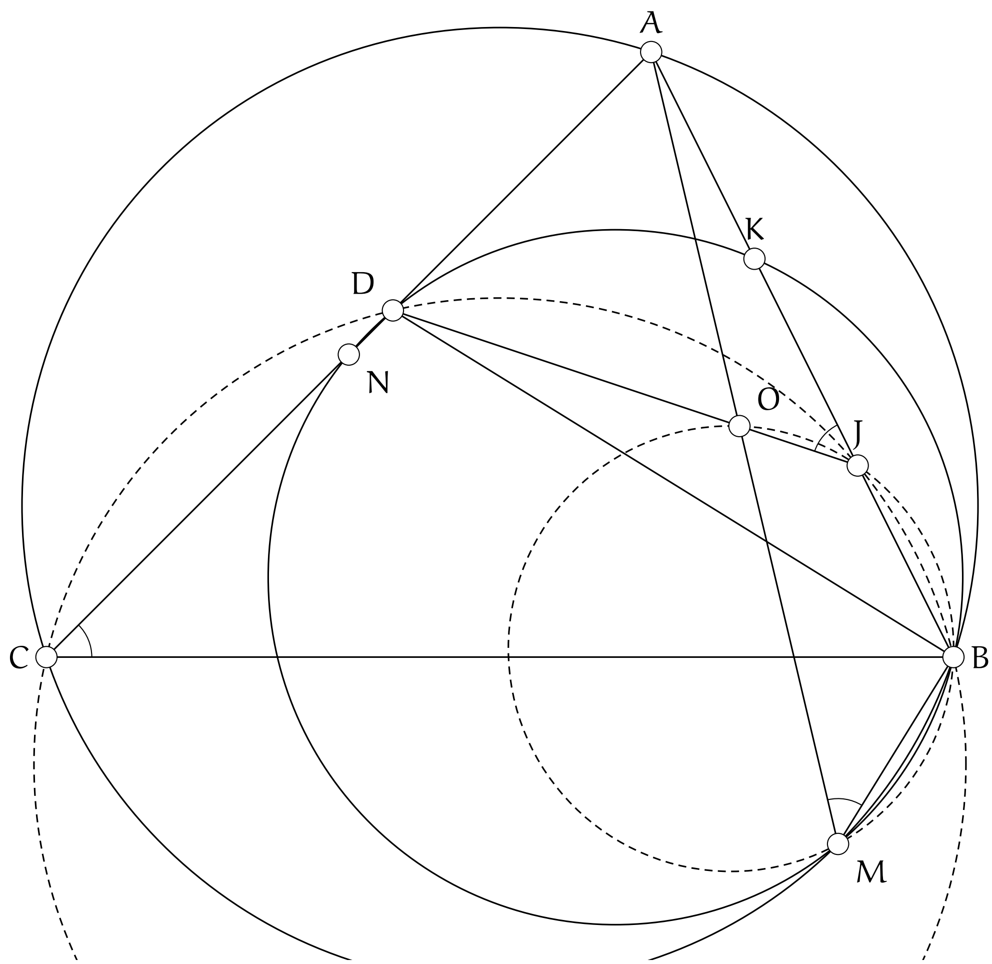
On en déduit que $\sum\limits_{c \in C \cup L} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{c,i} \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} 2\sqrt{c_i l_i} = 2n\sqrt{n}$.

En particulier, comme il y a $2n$ lignes ou colonnes, il existe c colonnes ou lignes telles que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{c,i} \geqslant \sqrt{n}$ i.e. c contient au moins $\sqrt{n}$ numéros différents.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était très dur et seul un élève l'a réussi. Il fallait essayer de relier le nombre de numéros par ligne aux nombres de colonnes/lignes où apparait un numéro et rares sont ceux qui ont eu l'idée.

Exercice 8. Soit ABC un triangle non isocèle en B. Soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Soit M le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ contenant B sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Le cercle circonscrit au triangle BDM coupe la segment $[AB]$ en un point K distinct de B. Soit J le symétrique du point A par rapport au point K. La droite (DJ) intersecte la droite (AM) en un point O. Montrer que les points J, B, M et O sont cocycliques.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>



Tout d'abord, on reconnaît dans la figure quelques points connus : le point M est le milieu de l'arc AC contenant B, il s'agit donc du pôle Nord du point B dans le triangle ABC, c'est-à-dire qu'il est le point d'intersection de la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{ABC}$, de la médiatrice du segment $[AC]$ et du cercle circonscrit au triangle ABC. On obtient donc que l'angle $\widehat{DBM}$ est droit (par définition de la bissectrice extérieure). Le fait que M appartient à la médiatrice du segment $[AC]$ nous invite également à considérer cette médiatrice. Soit N le milieu du segment $[AC]$. Alors $\widehat{DNM} = 90°$. On déduit donc que les points B, M, N et D sont cocycliques et D appartient au cercle passant par les pointe B, K et D.
De nouveaux points cocycliques apportent deux informations : une information sur les angles grâce au théorème de l'angle inscrit et une information sur les longueurs grâce à la puissance d'un point. Puisque la majorité des points se trouve sur deux droites se coupant en le sommet A, nous allons utiliser la puissance du point A par rapport à divers cercles.
Notamment, par puissance d'un point $AK \cdot AB = AD \cdot AN$. Donc

$$AJ \cdot AB = 2AK \cdot AB = 2AD \cdot AN = AD \cdot AC$$

donc les points D, C, B et J sont cocycliques d'après la réciproque de la puissance d'un point. Pour conclure, nous allons utiliser les angles orientés, pour éviter d'avoir à traiter séparément les différentes configurations possibles.
Nous avons à présent tous les outils pour effectuer une chasse aux angles. Des angles difficiles d'accès sont les angles $\widehat{OMJ}, \widehat{OBJ}, \widehat{MJB}$.... En revanche, les angles $\widehat{DJB}$ et $\widehat{OMB}$ semblent plus faciles à obtenir à l'aide des cercles présents sur la figure.
Puisque les points D, C, B et O sont cocycliques, on trouve

$$(JB, JO) = (JB, JD) = (CB, CD) = (CB, CA) = (MB, MA) = (MB, MO)$$

donc le quadrilatère $JBMO$ est bien cyclique.
Commentaire des correcteurs : L'exercice n'a pas été abordé par beaucoup d'élèves et il a été résolu par deux élèves. Quelques élèves ont noté que le point M est le pôle Nord du point B, ce qui est un très bon réflexe.

Exercice 9. Déterminer le plus petit entier $n \geqslant 2$ tel qu'il existe des entiers strictement positifs $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \mid (a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$$

Solution de l'exercice 9 Analysons le problème. Dans ce problème, on cherche le plus petit entier n satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus petit entier recherché est l'entier c. Pour montrer que c'est bien le plus petit entier, on doit d'une part montrer que si un entier n satisfait la propriété, alors $n \geqslant c$ et on doit montrer d'autre part que l'on peut trouver c entiers satisfaisant la relation de divisibilité.

Pusiqu'il y a une relation de divisibilité, on peut s'attendre à utiliser divers idées :
- Si $a \mid b$ alors a divise les combinaisons linéaires de a et b
- Si $a \mid b$ et que a et b sont strictement positifs, alors $a \mid b$
- Si $a \mid b$, les diviseurs de a divisent également b

Une fois cette première analyse effectuée, on peut commencer par regarder si on trouve des entiers a_i satisfaisant la propriété pour des petites valeurs de n, par exemple pour $n = 2, 3$ ou même 4 si on est courageux, avant de se convaincre que cette méthode ne permettra pas de déterminer n.

Néanmoins, avoir cherché des a_i pour des petites valeurs de n nous permet de trouver d'éventuelles propriétés que doivent satisfaire les a_i. Par exemple, on a pu remarquer que les entiers a_i ne peuvent pas tous être pairs, puisque dans ce cas la somme des a_i^2 serait paire mais $(a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$ est impair. On se rend alors compte que ce qui importe dans cet argument, ce n'est pas la parité des a_i qui entre en jeu mais la parité de la somme.

On obtient que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ est impair. Dans le cas contraire, puisque $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n \mod 2$, $a_1 + \ldots + a_n$ est pair également mais alors $a_1^2 + \ldots + a_n^2$ est pair et divise $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 1$ qui est impair, ce qui est absurde.

On déduit que $(a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$ est pair. L'argument de parité précédent nous invite à préciser cette étude. On va donc chercher si $(a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$ est divisible par $4, 8 \ldots$. La présence des multiples carré nous invite à regarder chaque terme avec des modulos bien choisis.

Par exemple, modulo 4, $(a_1 + \ldots + a_n)^2 \equiv 1$ donc 4 divise $(a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$. Ne nous arrêtons pas en si bon chemin, nous savons également que les carrés des nombres impairs ne peuvent que valoir 1 modulo 8. Ainsi, $(a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$ est divisible par 8. Or 8 est premier avec $a_1^2 + \ldots + a_n^2$ qui est impair. On déduit de tout cela que

$$8(a_1^2 + \ldots + a_n^2) \mid (a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$$

Enfin, une autre remarque que l'on peut formuler sur l'énoncé est qu'il implique la somme des carrés de nombres d'un côté et le carré de la somme des nombres de l'autre côté. Ceci fait penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ou à l'inégalité des moyennes arithmétiques et quadratiques. On peut donc essayer de comparer les quantités $8(a_1^2 + \ldots + a_n^2)$ et $(a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$.

Cette idée de comparer les termes est cohérente avec ce que l'on cherche à montrer. La divisibilité obtenue donne que $8(a_1^2 + \ldots + a_n^2) \leqslant (a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$. Or, dans l'inégalité des moyennes arithmétique et quadratique, le carré de la somme est plus petit que la somme des carrés des éléments multipliée par le nombre de variables. On se doute donc que l'inégalité obtenue va être fausse pour n trop petit, ce qui va nous fournir la borne souhaitée. Plus précisement,

$$8(a_1^2 + \ldots + a_n^2) \leqslant (a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1 \leqslant n(a_1^2 + \ldots + a_n^2) - 1 < n(a_1^2 + \ldots + a_n^2)$$

où l'inégalité au milieu correspond à l'inégalité des moyennes arithmétiques et quadratiques. On obtient finalement que $n > 8$ donc $n \geqslant 9$.

Réciproquement, on cherche 9 entiers satisfaisant la propriété. On peut s'attendre à ce que de petits entiers fonctionnent. On peut donc chercher des a_i valant 1 ou 2. Finalement, on trouve qu'en prenant $a_1 = \cdots = a_7 = 1$ et $a_8 = a_9 = 2$, on a bien 15 qui divise $11^2 - 1 = 120 = 15 \times 8$.
La réponse attendue est donc $n = 9$.
Commentaire des correcteurs : L'exercice n'a été résolu que par un élève. C'est un exercice instructif et très complet, faisant appel à des arguments arithmétiques et des inégalités.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$. On pose également $y_n = x_n^2 + 2^{n+2}$ pour tout entier naturel n. Montrer que pour tout entier $n > 0$, y_n est le carré d'un entier impair.

Solution de l'exercice 10 On commence par tester l'énoncé pour des petites valeurs de n. On calcule donc les premières valeurs des suites (x_n) et (y_n). On trouve par exemple $x_2 = 3$, $x_4 = 7$, $x_5 = 15$...On peut donc conjecturer que $x_n = 2^n - 1$. On s'empresse de le démontrer par récurrence.
Le résultat est déjà au rang 0 et 1. Si on suppose $x_n = 2^n - 1$ et $x_{n+1} = 2^{n+1} - 1$, on a $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n = 3 \times 2^{n+1} - 3 - 2 \times 2^n + 2 = (3-1) \times 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$ ce qui achève la récurrence.
On injecte alors cette expression de x_n dans l'expression de y_n. Il ne nous reste plus qu'à manipuler algébriquement cette nouvelle expression :

$$y_n = (2^n-1)^2+2^{n+2} = 2^{2n}-2^{n+1}+1+2^{n+2} = 2^{2n}-2^{n+1}+1+2\times 2^{n+1} = 2^{2n}+2^{n+1}+1 = (2^n+1)^2$$

Ceci montre bien que y_n est le carré d'un entier impair.
Commentaire des correcteurs : L'exercice a été résolu par tous les élèves qui l'ont abordé !

Exercice 11. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout couple (x, y) de réels :

$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x - y)$$

Solution de l'exercice 11 Analysons le problème : ici on est face à une équation fonctionnelle, avec deux variables. La première chose à faire est d'essayer les quelques substitutions classiques : $x = y = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $x = y$. Ici comme on a un $f(x - y)$, il est très tentant de regarder ce que ça donne pour $x = y$. Posons donc $C = f(0)$, pour $x = y$, on obtient $2f(f(x)) = 2x + C$ soit $f(f(x)) = x + \frac{C}{2}$.
Maintenant qu'on a une expression plus maniable de $f(f(x))$, on peut la réinjecter dans l'équation et regarder ce que ça donne.
En réinjectant dans l'équation initiale, on a donc $x+y+C = 2y+f(x-y)$ soit $f(x-y) = x-y+C$, pour $y = 0$ on a donc $f(x) = x + C$ pour tout réel x. Maintenant, il faudrait déterminer C avant d'effectuer la vérification, on essaie donc de voir quelle contrainte l'équation $f(f(x)) = x + \frac{C}{2}$ donne sur C.
En particulier $f(f(x)) = f(x + C) = x + 2C$ donc $2C = \frac{C}{2}$ donc $4C = C$, $3C = 0$ donc $C = 0$, on a donc $f(x) = x$ pour tout réel x. Maintenant on n'oublie pas de vérifier que la fonction trouvée est bien solution ! Réciproquement la fonction identité convient car dans ce cas, $f(f(x))+f(f(y)) = f(x)+f(y) = x + y = 2y + x - y = 2y + f(x - y)$ pour tout x, y réels.
Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien réussi. Il faut faire attention à ne pas conclure que f est l'identité lorsque l'on trouve $f(X) = X$ avec X dépendant de x et y (il faut vérifier que X peut prendre toutes les valeurs réelles).

Exercice 12. Trouver tous les couples d'entiers positifs (x, y) tels que $2^x + 5^y + 2$ est un carré parfait.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Ici on est face à un problème d'équation diophantienne avec un carré et une puissance de 2. On peut se rendre compte en testant les petits cas que $(x, y) = (0, 0)$ et $(1, 1)$ sont solutions. Comme on a un carré et une puissance de 2, on est très tenté de regarder modulo 4 ou 8. Regardons déjà modulo 4 pour voir s'il y a une contradiction. Pour cela on va d'abord traiter le cas où $x \geqslant 2$.

Déjà notons que si $x \geqslant 2$, $2^x + 5^y + 2 \equiv 1 + 2 \equiv 3 \pmod 4$ et 3 n'est pas un carré modulo 4 (les carrés sont 0 et 11 modulo 4). On a donc forcément $x = 1$ ou $x = 0$.

Maintenant réécrivons l'équation dans le cas $x = 1$. Pour $x = 1$ soit y entier positif tel que $2 + 5^y + 2 = 5^y + 4$ est un carré parfait. Notons que comme 4 est un carré, on va pouvoir factoriser.

Soit k entier positif tel que $k^2 = 5^y + 4$, on a donc $(k - 2)(k + 2) = 5^y$. Notons que comme $k + 2 > 0$, on a $k - 2 > 0$ et $k + 2$ et $k - 2$ sont des puissances de 5. Si $k - 2 > 1$, alors 5 divise $k + 2$ et $k - 2$ donc 5 divise $k + 2 - (k - 2) = 4$ contradiction.

Ainsi $k - 2 = 1$ donc $k = 3$, donc $5^y + 4 = 9$ donc $y = 1$. Réciproquement si $(x, y) = (1, 1)$, $2^x + 5^y + 2 = 9$ est un carré parfait.

Pour $x = 0$, soit y tel que $1 + 5^y + 2 = 5^y + 3$ est un carré, soit $k \geqslant 0$ tel que $k^2 = 5^y + 3$. Ici comme on a des carrés et des puissances de 5, on peut essayer de regarder modulo 5. Si $y \geqslant 1$, alors on a $k^2 \equiv 3 \pmod 5$, or les carrés modulo 5 sont 1 et 4, ce qui est une contradiction. On a donc forcément $y = 0$.

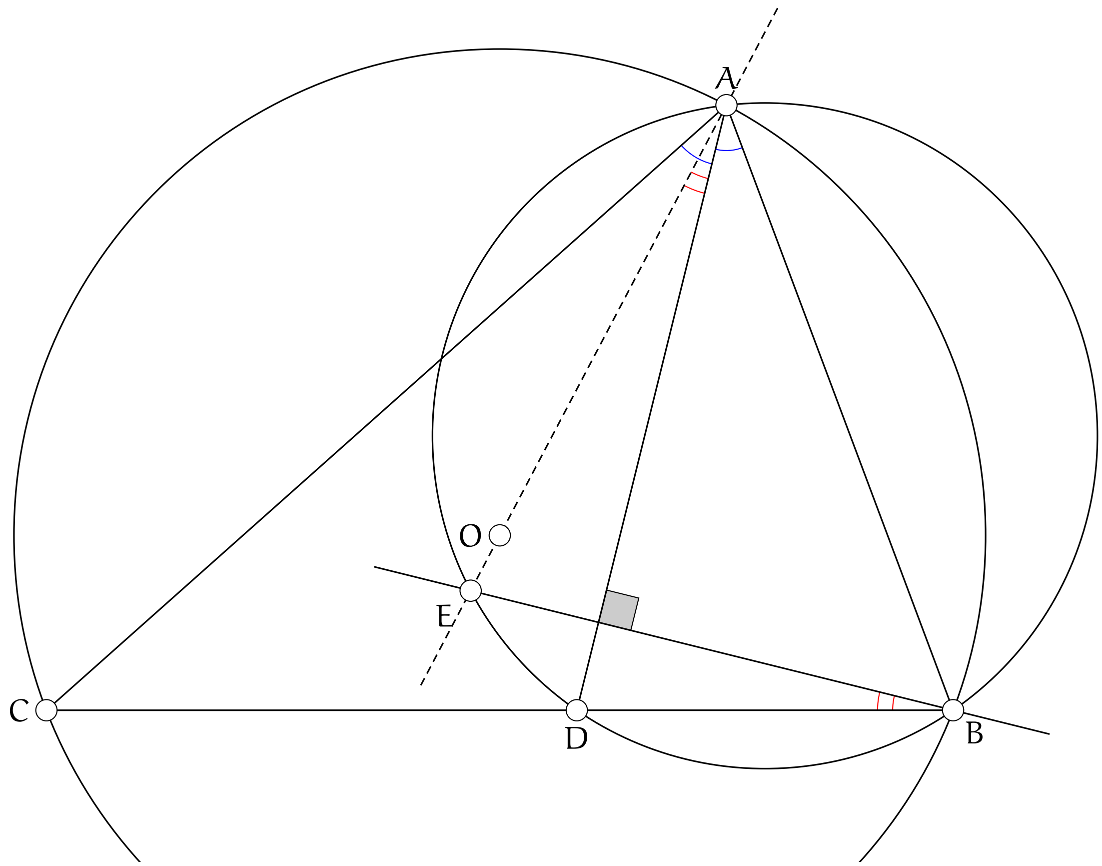
Réciproquement si $(x, y) = (0, 0)$, $2^x + 5^y + 2 = 4$ est un carré parfait.

Les solutions sont donc les couples $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> Cet exercice a été très bien réussi dans l'ensemble. Pour le cas $x = 0$, la majorité des élèves ont utilisé le fait qu'un carré n'est pas congrus à 3 modulo 5, mais il ne fallait pas oublier de traiter à part le cas $y = 0$!

Exercice 13. Soit ABC un triangle aux angles aigus. Soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. La perpendiculaire à la droite (AD) passant par le point B recoupe le cercle circonscrit au triangle ADB en un point E. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que les points A, O et E sont alignés.

Solution de l'exercice 13



Examinons les angles que nous pouvons obtenir facilement. Puisque les points A, E, D et B sont sur un même cercle, on doit pouvoir utilise le théorème de l'angle inscrit pour avoir une égalité portant sur $\widehat{EAD}$. Puisque la droite (BE) est perpendiculaire à la droite (AD), on doit pouvoir calculer l'angle $\widehat{EBA}$. Enfin, on connaît bien sûr l'angle $\widehat{OAB}$. Il semble donc raisonnable de montrer l'alignement des points A, O et E en montrant que $\widehat{OAB} = \widehat{EAB}$. On calcule séparément ces deux angles en fonction des angles du triangle ABC.
D'une part, d'après le théorème de l'angle au centre et puisque le triangle AOB est isocèle en O, on a

$$\widehat{OAB} = \frac{1}{2}(180° - \widehat{AOB}) = 90° - \widehat{ACB}$$

D'autre part, $\widehat{EAB} = \widehat{EAD} + \widehat{DAB}$. On utilise alors le théorème de l'angle inscrit et le fait que $\widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, on obtient :

$$\widehat{EAD} + \widehat{DAB} = \widehat{EBD} + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90° - \widehat{BDA} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

Or la somme des angles du triangle ADC fait $180°$ donc $\widehat{BDA} = \widehat{DCA} + \widehat{DAC} = \widehat{ACB} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Ainsi

$$90° - \widehat{BDA} + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90° - (\widehat{ACB} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}) + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90° - \widehat{ACB}$$

et on trouve bien que $\widehat{OAB} = 90° - \widehat{ACB} = \widehat{EAB}$ donc les points A, O et E sont alignés.
Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien réussi. Cependant, plusieurs élèves ont rendu un preuve très compliquée.

Exercice 14. Une grille de taille $n \times n$ contient n^2 cases. Chaque case contient un entier naturel compris entre 1 et n, de telle sorte que chaque entier de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ apparaît exactement n fois dans la grille. Montrer qu'il existe une colonne ou une ligne de la grille contenant au moins $\sqrt{n}$ nombres différents.

Solution de l'exercice 14 Essayons d'abord de regarder ce qui se passe dans ce qui semble être "le pire cas" : si chaque ligne/colonne ne contient pas beaucoup de numéros, chaque numéro va y être beaucoup présent. En particulier, pour tout i, le nombre de i semble être écrit dans peu de lignes et de colonnes. Mais à priori si le numéro i apparait trop dans une ligne, il apparaitra dans beaucoup de colonnes et inversement. A priori, le pire cas semble être celui où chaque numéro apparaît dans autant de colonnes que de lignes et comme chaque numéro apparaît n fois, le carré doit être de dimension $\sqrt{n}$, donc i apparait dans au moins $2\sqrt{n}$ lignes et colonnes.
Bien sûr, cette analyse ne constitue en rien une preuve, mais on voit deux idées importantes : premièrement, le nombre de numéros distincts dans chaque ligne/colonne semble avoir un lien avec le nombre de lignes/colonnes où chaque numéro apparaît. Deuxièmement, pour tout i entre 1 et n, le nombre i apparait au moins sur $2\sqrt{n}$ lignes et colonnes. On va donc essayer de formaliser ça.
Notons $a_{c,i}$ pour c une colonne ou une ligne et i un entier entre 1 et n le nombre de fois qu'apparait i dans c, notons c_i (resp. l_i) le nombre de colonnes (resp. lignes) à laquelle i appartient. On note C l'ensemble des colonnes L celui des lignes.
Notons que l'hypothèse du fait que i apparait n fois se traduit comme $c_i \times l_i \geqslant n$ car i apparait dans au plus $c_i l_i$ cases.
Notons que pour tout i, $l_i + c_i$ étant le nombre de ligne ou de colonne où apparait i, il vaut $\sum\limits_{c \in C \cup L} a_{c,i}$.
Le nombre d'éléments distincts dans la colonne c vaut, quant à lui, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{c,i}$. En particulier, on voit bien que les $a_{c,i}$ jouent un rôle important dans le problème.
Maintenant il reste à relier le nombre d'apparitions de i dans les différentes lignes/colonnes au nombre de numéros dans chaque ligne. Pour cela on va regarder la somme des $a_{c,i}$ (on somme sur i entre 1 et n et sur c colonne et ligne) et utiliser les deux interprétations précédentes.
On obtient ainsi $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{c \in C \cup L} a_{c,i} = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i + l_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} 2\sqrt{c_i l_i} \geqslant 2n\sqrt{n}$.
On en déduit que $\sum\limits_{c \in C \cup L} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{c,i} \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} 2\sqrt{c_i l_i} = 2n\sqrt{n}$.
En particulier, comme il y a $2n$ lignes ou colonnes, il existe c colonnes ou lignes telles que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{c,i} \geqslant \sqrt{n}$ i.e. c contient au moins $\sqrt{n}$ numéros différents.
Commentaire des correcteurs : L'exercice a été globalement bien réussi par ceux qui l'ont traité, mais il faut faire attention à être clair dans ses explications et être précis dans les définitions des différents objets introduits.

Exercice 15. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ tel que pour tout nombre premier $p < n$, $n - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor p$ n'est pas divisible par un carré différent de 1.

<u>*Solution de l'exercice 15*</u> Analysons le problème : on cherche les entiers n vérifiant une certaine propriété. On peut déjà commencer par chercher les petites valeurs de n qui conviennent : en testant les entiers n entre 1 et 20 on trouve $\{1, 2, 3, 5, 7, 13\}$.
Une des premières choses à faire devant ce problème est de réussir à donner un sens à $n - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor p$. $\frac{n}{p}$ étant la division de n par p on peut essayer de regarder si cette quantité ne s'interprète pas à partir de la division euclidienne.
Notons que $n - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor p$ est le reste de la division euclidienne de n par p. En effet si $n = pq + r$ avec q entier et $0 \leqslant r \leqslant p - 1$, on a $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor = \lfloor q + \frac{r}{p} \rfloor = q$ donc $n - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor p = r$.
Ensuite, on note que toutes les solutions trouvées sauf 1 sont des nombres premiers : on va donc essayer de montrer qu'un entier n vérifiant la propriété est forcément premier, par exemple en prenant p un de ses diviseurs.
Soit $n > 1$ un entier vérifiant la propriété. On déduit de ceci que si n n'est pas premier, si $p < n$ est un diviseur premier de n, alors $n - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor p = 0$ est divisible par 4 qui est un carré parfait, contradiction.
Maintenant que peut-on faire pour avancer : analysons ce que la propriété peut nous donner. Si $n \geqslant 12$, pour $p = 2$ le reste de la division euclidienne vaut 1, pour $p = 3$ il vaut 1 ou 2, donc cela n'apporte rien. Pour $p = 5$, on obtient que le reste ne peut valoir 4, pour $p = 7$, le reste ne peut valoir 4, pour $p = 8$ le reste ne peut valoir ni 4 ni 8 ni 9. A priori, continuer comme ça indéfiniment semble compliqué, vu qu'on aura juste un très gros système, qui admettra probablement des solutions (comme il y a une infinité de nombre congru à 1 modulo $p_1 \times \dots p_k$, le fait de regarder les restes par les k premiers nombre premiers semble peu utile). Par contre, 4 semble jouer un rôle important : 4 ne peut pas être un reste de la divison de n par p. En particulier si $p \geqslant 5$, p ne peut diviser $n - 4$! Il semble donc intéressant de regarder ce que peut valoir $n - 4$, et de même ce que peuvent valoir $n - 8$ et $n - 9$ car ceux-ci ne peuvent pas avoir de facteur premier plus grand que 10. Pour éviter les cas où ces quantités sont négatives, on supposer $n \geqslant 11$.
Soit n premier supérieur ou égal à 11 vérifiant l'énoncé. Soit p divisant $n - 4$, on a $p < n$. Si $p \geqslant 5$, le reste de la division euclidienne de p par 5 vaut 4 et il est divisible par 4 qui est un carré différent de 1, ce qui donne une contradiction. De plus, p ne peut valoir 2 car sinon 2 divise $n - 4$ donc 2 divise n, n n'est dans ce cas pas premier. Ainsi $n - 4 = 3^x$ avec x un entier strictement positif car $n - 4 > 1$.
En faisant le même raisonnement $n - 8$ et $n - 9$ ne sont pas divisibles par p si $p \geqslant 10$.
Maintenant analysons les facteurs premiers de $n - 8$ et $n - 9$: ils peuvent être divisibles par $2, 3, 5, 7$. Pour le facteur 3, comme 3 divise $n - 4$, $n \equiv 1 \pmod 3$, donc $n - 8 \equiv 2 \pmod 3$ et $n - 9 \equiv 1 \pmod 3$, ceux-ci ne sont pas divisibles par 3.
De plus $n - 8$ n'est pas divisible par 2 car n ne l'est pas. Comme $n - 8$ et $n - 9$ sont premiers entre eux, trois cas se présentent à nous : soit $n - 8$ est une puissance de 5, soit c'est une puissance de 7, soit $n - 8$ est divisible par 5 et 7, dans ce cas $n - 9$ est une puissance de 2.

— Si $n - 8 = 5^y$ avec y entier positif, on a $n - 4 = 5^y + 4 = 3^x$.
  Ici 4 étant un carré, on aimerait montrer que 3^x est un carré pour factoriser l'équation. Pour cela, on regarde modulo 4 car on a des carrés et $5 \equiv 1 \pmod 4$.
  Regardons modulo 4, on a $3^x \equiv 1^y \equiv \pmod 4$. Sinon comme l'ordre de 3 modulo 4 est 2, 2 divise x donc x est pair. Posons $x = 2k$, on a $(3^k - 2)(3^k + 2) = 5^y$ donc $3^k - 2$ est positif et $3^k - 2$ et $3^k + 2$ sont des puissances de 5. Ici on a un produit de terme valant une puissance de 2, on essaie donc de calculer leur pgcd pour espérer borner un des termes. En particulier, le pgcd de $3^k + 2$ et $3^k - 2$ divise $(3^k + 2) - (3^k - 2) = 4$ qui n'est pas divisible par 5, et il divise leur produit c'est-à-dire 5^y, il vaut donc 1. Comme $3^k - 2$ et $3^k + 2$ sont des puissances de 2 de pgcd 1, la plus petite vaut 1, on a donc $3^k - 2 = 1$ soit $k = 1$ soit $x = 2$. On obtient $n = 3^x + 4 = 9 + 4 = 13$.

— Si $n-8=7^y$ avec y entier positif, on a $n-4=7^y+4=3^x$.
Comme 4 est un carré, on aimerait réussir à montrer que x est pair pour factoriser, pour cela on regarde modulo 7. Notons que si $y=0$, il n'y a pas de solution à cette équation. Sinon on a $3^x \equiv 4 \pmod 7$, or les puissances de 3 modulo 7 valent $1, 3, 2, 6, 4, 5, 1$, l'ordre de 3 vaut donc 6 et on a forcément $x \equiv 4 \pmod 6$ donc x est pair. Posons $x=2k$, on a $(3^k-2)(3^k+2)=7^y$ donc 3^k-2 est positif et 3^k-2 et 3^k+2 sont des puissances de 7.
En particulier, le pgcd de 3^l+2 et 3^k-2 divise $(3^k+2)-(3^k-2)=4$ qui n'est pas divisible par 7, il divise aussi 7^y et vaut donc 1. Comme 3^k-2 et 3^k+2 sont des puissances de 2 de pgcd 1, la plus petite vaut 1, on a donc $3^k-2=1$ donc $k=1$ donc $x=2$, on a donc $7^y=3^x-4=5$ ce qui est impossible.

— Sinon $n-9=2^y$ avec y entier positif, on a $n-4=2^y+5=3^x$. Notons que comme $n-4 \geqslant 7$, on a $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$
Ici on n'a pas de carré à priori, mais on peut essayer d'obtenir des informations sur la parité de x et y. Vu qu'on a des puissances de 2 et 3 on va donc regarder modulo 3 et 4. Notons que si $y=1$, l'équation devient $3^x=7$, il n'y a pas de solution. Comme $x \geqslant 1$ en regardant modulo 3, on a $2^y \equiv -5 \equiv 1 \pmod 3$ et l'ordre de 2 modulo 3 est 2, on obtient que y est pair. Comme $y \geqslant 2$, on a $3^x \equiv 1 \pmod 4$ et comme l'ordre de 3 modulo 4 est 2, x est pair. On écrit donc $x=2b$, $y=2c$, on a $5=(3^b-2^c)(3^b+2^c)$ donc 3^b-2^c est positif et comme $3^b-2^c<3^b+2^c$, 3^b-2^c et 3^b+2^c valent respectivement 1 et 5. On en déduit que $3^b \times 2=(3^b+2^c)+(3^b-2^c)=6$ donc $b=1$ donc $x=2$, on retombe dans le cas précédent $n=13$.

En particulier, on a obtenu que $n=13$ ou $n<11$ et n premier, i.e. n vaut 2, 3, 5, 7 ou 13. Vérifions que ce sont des solutions :

— Il n'y a pas de nombre premier strictement inférieur à 1 et 2 donc 1 et 2 sont solutions.
— Le reste de la division de 3 par 2 est 1 qui n'a pas de facteurs carrés, donc 3 est solution.
— Les restes des divisions euclidiennes de 5 par 2 et 3 sont 1 et 2 qui sont sans facteurs carrés donc 5 est solution.
— Les restes des divisions euclidiennes de 7 par 2, 3 et 5 sont 1, 1 et 2 qui sont sans facteurs carrés donc 7 est solution.
— Les restes des divisions euclidiennes de 13 par 2, 3, 5, 7 et 11 sont 1, 1, 3, 6 et 2 qui sont sans facteurs carrés donc 13 est solution.

L'ensemble des solutions est donc $\{1, 2, 3, 5, 7, 13\}$.

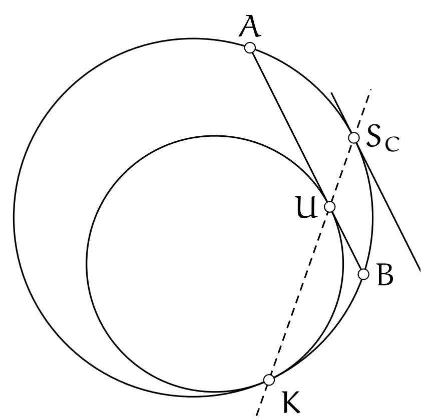
Commentaire des correcteurs : Cet exercice d'arithmétique a été résolu par peu d'élèves, qui ont tous montré qu'ils sont extrêmement à l'aise. Les autres élèves qui ont abordé le problème ont simplement remarqué que si $n \geqslant 2$ était solution alors il était premier, ce qui était un bon début, mais il manquait encore de nombreuses étapes avant d'arriver à la solution.

Exercice 16. Soient P, Q des polynômes à coefficients réels tels que $P \circ Q = P^{2019}$. On suppose que toutes les racines de P sont réelles. Montrer qu'elles sont toutes égales.

<u>*Solution de l'exercice 16*</u> Face à un problème de polynôme, un premier réflexe peut être de regarder les différents degrés. Ici, on voit que Q est un polynôme de degré 2019 car $2019\deg(P) = \deg(P^{2019})\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$.
Maintenant, il faut utiliser l'hypothèse du fait que les racines de P sont réelles. On écrit $P(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - x_i)^{a_i}$ où les racines $x_1, \ldots, x_k$ sont deux à deux distinctes.
Réécrivons ainsi l'équation : $\prod_{i=1}^{l}(Q(X) - x_i)^{a_i} = \prod_{i=1}^{k}(X - x_i)^{2019a_i}$.
A priori, on sait que le terme de droite va être nul si on l'évalue en x_j, on regarde donc ce qu'on en déduit pour le terme de gauche. Posons $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, on a alors nécessairement $Q(x_j) \in \{x_1, \ldots, x_k\} = X$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$.
De plus comme le terme de droite de l'égalité est un polynôme scindé réel, forcément pour tout j, comme le polynôme $Q(X) - x_j$ divise un polynôme scindé, lui aussi est scindé et de degré 2019 donc admet 2019 racines réelles dans X.
Notons de plus que si $i \neq j$, $Q - x_i$ et $Q - x_j$ ont nécessairement des racines disjointes : en effet on ne peut avoir $Q(x) = x_i$ et $Q(x) = x_j$. Ainsi les polynômes $Q - x_i$ sont $|X| = k$ polynômes distincts scindés dont les racines sont dans X et qui n'ont aucune racine en commun. Nécessairement, chacun de ces polynômes n'a qu'une racine : ainsi pour tout i il existe $j(i)$ tel que $Q(X) - x_i = c(X - x_{j(i)})^{2019}$ avec c le coefficient dominant de Q. De plus, l'application de $\{1, \ldots, k\}$ dans $\{1, \ldots, k\}$ quià i associe $j(i)$ est bijective.
Maintenant on a une expression très précise des $Q - x_i$, rappelons que l'on veut montrer qu'il n'y a qu'un seul x_i. Pour cela, on peut essayer de regarder les coefficients de $Q - x_i$ qui sont quasiment ceux de Q. Le coefficient de X^{2018} dans Q vaut donc celui de $Q - x_i$, c'est-à-dire $-2019x_{j(i)}c$ pour tout i. Puisque $i \mapsto j(i)$ est une bijection de $\{1, \ldots, k\}$, on a $x_j = x_1$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$, et donc par hypothèse sur les x_i, $k = 1$. C'est exactement ce que l'on voulait prouver.
<u>Commentaire des correcteurs :</u> Ce problème concernant des polynômes a été cherché peu cherché. Rares sont ceux qui ont eu la note de 7, cependant certains avaient bien compris l'idée mais ont omis quelques détails dans leur copie.

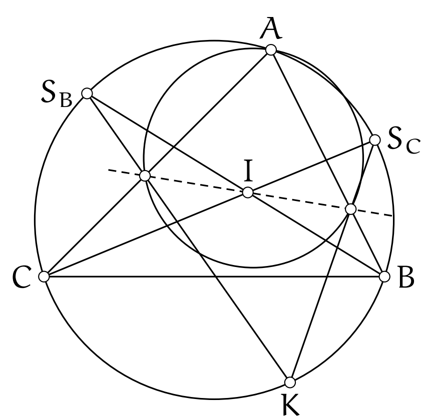
Exercice 17. Soit ABC un triangle, Ω son cercle circonscrit et O le centre de Ω. Soit S le centre du cercle tangent aux côtés AB et AC et tangent intérieurement au cercle Ω en un point K. Le cercle de diamètre $[AS]$ recoupe le cercle Ω en un point T. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Montrer que les points K, T, M et O sont cocycliques.

Solution de l'exercice 17 Dans ce problème, nous allons utiliser divers résultats autour du cercle tangent aux côtés AB et AC au cercle Ω. Ce cercle est appelé le cercle A-mixtilinéaire, on le notera ω. On note U le point de contact de ce cercle avec le côté AB et V le point de contact avec le côté AC. On note également I le centre du cercle inscrit du triangle ABC.
Résultat n° 1 : La droite (KU) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AKB}$.

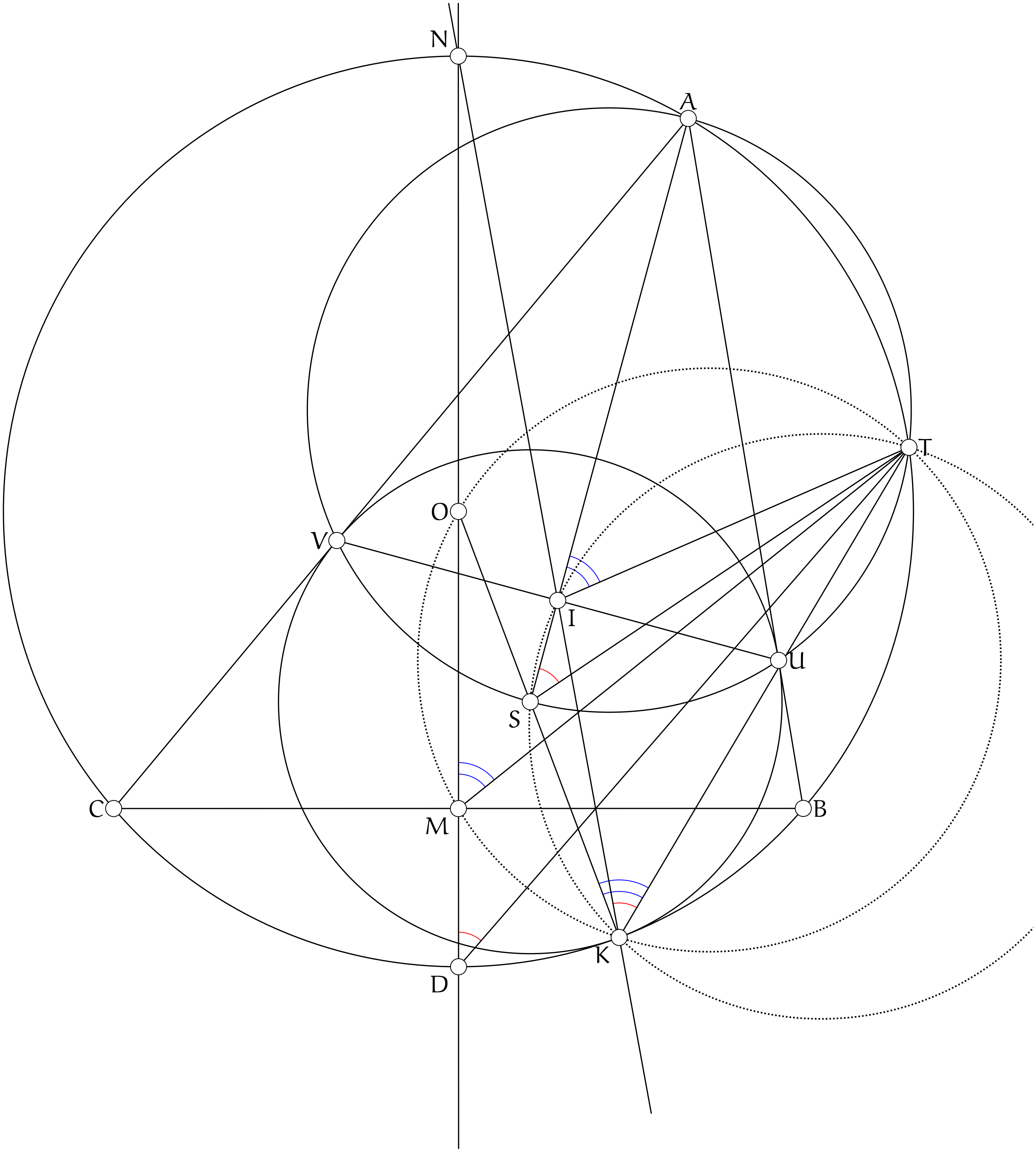


Pour montrer ce résultat, on peut par exemple considérer l'homothétie h de centre K qui envoie ω sur Ω. Soit S_C l'image de U par h. Alors $h((AB))$ est la droite tangente au cercle Ω en le point S_C, et cette droite est parallèle à la droite (AB). Ceci signifie que le triangle AS_CB est isocèle donc S_C est le pôle sud de K dans le triangle ABK donc la droite (UK) est bien la bissectrice de l'angle $\widehat{AKB}$.
De même la droite (VK) est la bissectrice de l'angle AKC et elle coupe le cercle Ω en un point noté S_B.

Résultat n° 2 : Le point I est le milieu du segment $[UV]$.



Notons que le triangle UAV est isocèle donc la droite (AI) est la médiatrice du segment $[UV]$. Dès lors, il suffit de démontrer que le point I appartient au segment $[UV]$.
Pour cela, on applique le théorème de Pascal à l'hexagone ACS_CKS_BB. Ce théorème nous dit que les points $U = (AB) \cap (KS_C)$, $V = (AC) \cap (KS_B)$ et $I = (BS_B) \cap (CS_C)$ sont alignés, comme nous le voulions. (On a ici utilisé le résultat n° 1 pour avoir l'alignement des points K, U et S_C et K, V et S_B.)



Nous pouvons désormais passer à la résolution de l'exercice, maintenant que ces rappels sont faits.
Tout d'abord, en traçant la figure on s'aperçoit que les points U et V appartiennent au cercle de diamètre $[AS]$. On s'empresse de démontrer ce résultat. Puisque la droite (AB) au cercle ω de centre S en le point U, on a $\widehat{SUA} = 90°$. De même $\widehat{SVA} = 90°$, les points A, U, S et V sont donc bien sur un même cercle dont $[AS]$ est un diamètre.
Une première idée qui nous vient ensuite à l'esprit est d'utiliser la définition du point T comme second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et AUV. En effet, cette définition nous

indique que T est le centre de la similitude qui envoie le point U sur le point B et le point V sur le point C. Regardons ce qui deviennent les autres points après cette similitude. Le point I est le milieu du segment $[UV]$, il est donc envoyé sur le milieu du segment $[BC]$, à savoir M. Le point S est le milieu de l'arc UV du cercle ω, il est donc envoyé sur le milieu de l'arc BC du cercle Ω, à savoir le pôle Sud du point A dans le triangle ABC, que l'on notera D.
Le point A devient le pôle Nord du point T dans le triangle TVU. Il est donc envoyé sur le pôle Nord du point T dans le triangle TBC, on notera N ce point.
Considérer cette similitude a donc permis d'introduire naturellement de nouveaux points qui seront sans doute utiles à la résolution du problème. On note de plus que si s est cette similitude et X et Y deux points quelconques, alors les triangles $TXs(X)$ et $TYs(Y)$ sont semblables. On a donc obtenu de nombreux triangles semblables et donc de nombreuses égalités d'angles.
On a introduit le point N. Il semble aligné avec les points K et I, nous allons donc tenter de démontrer ce résultat. La façon la plus raisonnable de le faire est de procéder par chasse aux angles. Par exemple on peut essayer de démontrer que $\widehat{VKI} = \widehat{VKN}$. Cette idée a du sens puisque les points S_B, V et K sont alignés et cet alignement permettrait de passer d'un calcul d'angle dans le triangle UKV à un calcul d'angle dans le triangle ABC, que l'on connaît bien.
Comment calculer l'angle $\widehat{VKI}$? Comme I est le milieu du segment $[UV]$ et que l'on a déjà les tangentes au cercle ω en U et V, on est fortement invités à utiliser la symédiane issue du sommet K, qui n'est autre que la droite (AK). Ainsi, $\widehat{VKI} = \widehat{UKA}$. Les points K, U, S_C sont alignés donc

$$\widehat{UKA} = \widehat{S_CKA} = \widehat{ABS_C} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$$

On s'est donc débarrassé des points U, V et K ce qui est encourageant. Il nous reste à montrer que $\frac{1}{2}\widehat{ACB} = \widehat{S_BKN} = \widehat{S_BBN}$, ce qui résulte de la chasse aux angles suivante :

$$\widehat{S_BBN} = \widehat{CBN} - \widehat{S_BBC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC} - \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{BCA}$$

En résumé, $\widehat{VKI} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} = \widehat{S_BBN} = \widehat{S_BKN} = \widehat{VKN}$ donc les points K, I et N sont alignés.

Utilisons ce que nous venons de trouver. D'après cet alignement : $\widehat{IKT} = \widehat{NKT} = \widehat{NDT}$. Or les triangles NDT et IST sont semblables, donc $\widehat{NDT} = \widehat{IST}$. On a obtenu $\widehat{IKT} = \widehat{IST}$ donc les points T, I, S et K sont cocycliques.
Un autre alignement que nous n'avons pas encore utilisé est celui des points O, S et K, qui est vrai car l'homothétie de centre K envoyant le cercle ω sur Ω envoie le point S sur le point O. Cet alignement ainsi que le fait que les points T, I, S et K sont cocycliques nous donne

$$\widehat{OKT} = \widehat{SKT} = 180^\circ - \widehat{SIT} = \widehat{AIT}$$

Mais les triangles AIT et NMT sont semblables. Ainsi :

$$\widehat{OKT} = \widehat{AIT} = \widehat{NMT} = \widehat{OMT}$$

et les points O, M, K et T sont bien cocycliques.
<u>Commentaire des correcteurs :</u> L'exercice était plutôt corsé. Les quelques élèves l'ayant résolu ont montré une belle maitrise de divers outils comme l'inversion, la manipulation de birapports, les théorèmes de Ménélaüs et Céva... et une bonne culture des propriétés du cercle mixti-linéaire. Quelques élèves, même s'ils n'ont pas résolu le problème, ont tout de même renvoyé leurs avancées dans le problème et cela a été très apprécié.

Exercice 18. Soit G un graphe fini non orienté, $n \in \mathbb{N}^*$, $d \in \mathbb{N}^*$ tel que le degré de tout sommet de G est borné par d, x un sommet de G. On note $a(n,x)$ le nombre de sous-graphes induits connexes de G contenant n sommets dont le sommet x (un sous-graphe induit U est un graphe dont les sommets sont des sommets de G et si x et y sont des sommets de U, x est relié par une arête à y dans U si et seulement si x est relié par une arête à y dans G).

1. Montrer que $a(n,x) \leqslant 2^{nd}$.
2. Montrer que $a(n,x) \leqslant \left(\frac{(d+1)^{d+1}}{d^d}\right)^n$

<u>*Solution de l'exercice 18*</u> Ici, on est face à un problème de graphe, plus précisément on compter les sous-graphes induits contenant n éléments dont un fixé. On aimerait majorer cela, autant la première question semble pouvoir se faire potentiellement en comptant, autant la seconde n'a pas l'air très interprétable : $\frac{(d+1)^{d+1}}{d^d}$ ne correspond à rien de spécial. A priori, il n'y a pas d'argument combinatoire clair pour faire apparaître cette quantité.
Comme à priori, on n'a pas de bonnes idées pour voir commencer avancer, on peut tenter de faire cela au hasard ! On va donc essayer d'introduire des probabilités. On aimerait construire aléatoirement un sous-graphe induit connexe de G. On pourrait prendre des sommets au hasard mais ça se comporte très mal avec la connexité, il est difficile d'obtenir des informations faciles sur les composantes connexes d'un tel graphe. Plutôt que de choisir des sommets on va donc choisir des arêtes ! Ici il sera plus facile de voir quels points sont reliés. L'objectif sera donc d'étudier la composante connexe de x dans le graphe formé des arêtes choisies.
On colorie chaque arête en blanc de G indépendamment avec probabilité $p \in [0,1]$. On note X l'ensemble des sommets reliés à x dans le graphe dont les arêtes sont les blanches, i.e. la composante connexe de x dans le graphe aléatoire. Posons $A_n(x)$ l'ensemble des sous-graphes induits connexes de G contenant n sommets dont le sommet x (on peut voir un sous-graphe induit comme un ensemble de sommets). Notons que comme les évènements $X = H$ pour H dans $A_n(x)$ sont disjoints $1 \geqslant \sum_{H \in A_n(x)} P(X = H)$.
A priori, il suffit donc d'estimer $P(X = G)$ pour avoir une borne sur $a(n,x)$, on va donc essayer de comprendre comment on peut avoir $X = H$. Une solution simple est que toutes les arêtes de H soient bien blanches, et les arêtes allant de H à son complémentaire ne le soient pas. Il va donc falloir évaluer la probabilité de cet évènement, en dénombrant le nombre d'arête de chaque catégorie
Soit H dans $A_n(x)$, on a $P(X = H) \geqslant \mathbb{P}(A_H)$ où A_H est l'évènement "toutes les arêtes internes à H sont coloriées, et les arêtes reliant H à l'extérieur ne sont pas coloriées". Par indépendance, si on note l le nombre d'arêtes internes à H et k le nombre d'arêtes reliant G à l'extérieur, $\mathbb{P}(A_H) = p^l(1-p)^k$. Or comme G est de taille n et le degré de chaque sommet est borné par d, $l + k \leqslant nd$.
Ici pour la première borne, il est assez naturel de prendre $p = \frac{1}{2}$ vu qu'on veut une borne par une puissance de 2.
Pour $p = \frac{1}{2}$, on obtient donc $\mathbb{P}(A_G) = 2^{-(l+k)} \geqslant \frac{1}{2^{nd}}$. Ainsi, on a $1 \geqslant \sum_{G \in A_n(x)} \frac{1}{2^{nd}} = a(n,x)\frac{1}{2^{nd}}$, donc $a(n,x) \leqslant 2^{nd}$.
Ici le raisonnement effectué tient si on change sous-graphe induit par sous-graphe car la probabilité d'avoir comme composante connexe le sous-graphe H est la probabilité que les arêtes de H soient blanches, et les arêtes qui ne sont pas dans H ne le soient pas, on a au plus nd arêtes concernées, donc $\mathbb{P}(A_H) \geqslant 2^{-nd}$ et on obtient le même résultat.

Pour la seconde inégalité, on aimerait avoir une meilleure minoration de $\mathbb{P}(X = H)$. A priori, ce qu'on a fait dans la première partie était assez symétrique, on mettait autant de probabilité pour une arête blanche et une arête non blanche. On aimerait bien déséquilibrer cela, par exemple mettre une faible probabilité pour les arêtes blanches. Ainsi, on a envie d'avoir peu d'arêtes blanches à colorier pour obtenir H. A priori, à nombre de sommets fixé, le graphe ayant le minimum d'arête est un arbre : il est donc naturel de considérer un sous-arbre couvrant.

Pour cela, on va utiliser le fait que H contient un sous-arbre T avec le même nombre de sommet (et $n-1$ arêtes). En particulier, $P(X=H) \geqslant P(B_H)$ avec B_G l'évènement : les arêtes de T sont coloriées, les autres ne le sont pas. Comme il y a au plus dn arêtes avec une extrémité dans H, on a donc $P(B_H) \geqslant p^{n-1}(1-p)^{dn} \geqslant p^n(1-p)^{dn}$.
Maintenant on aimerait obtenir l'inégalité voulue, pour cela il est naturel d'essayer d'optimiser la quantité précédente en p. Si on pose $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ qui à p associe $p^n(1-p)^{dn}$, f est C^1 et de dérivée $np^{n-1}(1-p)^{dn} - dnp^n(1-p)^{dn-1} = np^{n-1}(1-p)^{dn-1}(1-p-dp)$ qui s'annule et admet un minimum pour $1-p-dp=0$ c'est-à-dire $p=\frac{1}{d+1}$.
Prenons donc $p=\frac{1}{d+1}$, on a $P(A_H) \geqslant (d+1)^{-n}\left(\frac{d}{d+1}\right)^{dn} = \left(\frac{d^d}{(d+1)^{d+1}}\right)^n$. On obtient

$$1 \geqslant \sum_{G \in A_n(x)} P(B_G) \geqslant a(n,x) \times \left(\frac{d^d}{(d+1)^{d+1}}\right)^n$$

Donc $a(n,x) \leqslant \left(\frac{(d+1)^{d+1}}{d^d}\right)^n$.
Notons que à d fixé, la seconde borne est bornée par $(e(d+1))^n$ donc bien meilleure pour d grand.
Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile, seuls 2 élèves ont réussi la deuxième question. Une approche non probabiliste était possible en se ramenant à compter les sous-abres de l'arbre d-aire complet.