PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 1ER AVRIL 2020

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2005 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2004 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n'est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique à l'adresse suivante :

`copies.ofm@gmail.com`

Exercices Junior

Exercice 1. Soit $a_1, a_2, \ldots$ la suite d'entiers telle que $a_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1.$$

Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $a_n^2 + 1$ divise $a_{n+1}^2 + 1$.

Solution de l'exercice 1 Pour tout entier $n \geqslant 1$, posons $b_n = a_n^2 + 1$. On conclut en constatant directement que

$$b_{n+1} \equiv (a_n^2 + a_n + 1)^2 + 1 \equiv (b_n + a_n)^2 + 1 \equiv a_n^2 + 1 \equiv b_n \equiv 0 \pmod{b_n}.$$

Solution alternative n°1 Il suffit de constater, pour tout entier $n \geqslant 1$, que

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^2 + 1 &= (a_n^2 + a_n + 1)^2 + 1 \\
&= a_n^4 + 2a_n^3 + 3a_n^2 + 2a_n + 2 \\
&= a_n^2(a_n^2 + 1) + 2a_n^3 + 2a_n^2 + 2a_n + 2 \\
&= a_n^2(a_n^2 + 1) + 2a_n(a_n^2 + 1) + 2a_n^2 + 2 \\
&= a_n^2(a_n^2 + 1) + 2a_n(a_n^2 + 1) + 2(a_n^2 + 1) \\
&= (a_n^2 + 2a_n + 2)(a_n^2 + 1)
\end{aligned}$$

est effectivement un multiple de $a_n^2 + 1$.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été bien résolu. Certains ont tenté une récurrence, sans grand succès, car il était difficile d'obtenir le résultat par récurrence. Peu de copies ont travaillé modulo $a_n^2 + 1$, ce qui simplifiait pourtant grandement les calculs.

Exercice 2. On répartit les entiers de $1, 2, \ldots, 8$ en deux ensembles A et B, puis on note P_A le produit de tous les éléments de A et P_B le produit de tous les éléments de B.

Quelles sont les valeurs minimale et maximale que peut prendre la somme $P_A + P_B$?

Note : si un ensemble E est vide, on considérera que le produit de ses éléments est égal à 1.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Soit A et B deux ensembles disjoints dont la réunion est égale à l'ensemble $E = \{1, \ldots, 8\}$.

Tâchons tout d'abord de maximiser la somme $P_A + P_B$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $P_A \leqslant P_B$. Puis, si A contient un entier $k \geqslant 2$, on pose $A' = A \setminus \{k\}$ et $B' = B \cup \{k\}$. Alors

$$P_{A'} + P_{B'} \geqslant P_{B'} = kP_B \geqslant 2P_B \geqslant P_A + P_B.$$

Ainsi, lorsque la somme $P_A + P_B$ atteint sa valeur maximale, on sait que $A \subseteq \{1\}$, donc que $P_A = 1$ et que $P_B = 8!$, de sorte que $P_A + P_B = 8! + 1 = 40321$.

Tâchons maintenant de minimiser la somme $P_A + P_B$. L'inégalité arithmético-géométrique indique que $P_A + P_B \geqslant 2c$, où l'on a posé $c = \sqrt{P_A P_B} = \sqrt{8!}$. Comme $401^2 = 160801 < 161280 = 4c^2$, on sait que $2c > 401$, et donc que $P_A + P_B \geqslant \lceil 2c \rceil \geqslant 402$.

Un premier réflexe est donc de rechercher deux ensembles A et B tels que $P_A + P_B = 402$. On formule alors quelques remarques préliminaires à cette recherche. Tout d'abord, savoir quel ensemble contient l'entier 1 ne change rien. Puis on démontre que l'un des deux ensembles contient l'entier 6 et que l'autre contient les entiers 2 et 3. En effet, soit X l'ensemble qui contient 6 et Y celui qui ne contient pas 6 :

- ▹ puisque $P_Y \equiv 402 - P_X \equiv 0 \pmod 6$, c'est que Y contient l'entier 3 ainsi qu'un entier pair ;
- ▹ si c'est X qui contient l'entier 2, alors $P_Y \equiv 402 - P_X \equiv 2 \pmod 4$, donc X contient un entier pair mais pas divisible par 4, ce qui est impossible.

Quitte à supprimer les entiers 1, 2, 3 et 6 des ensembles A et B, on se ramène donc à trouver une partition de l'ensemble $\hat{E} = \{4, 5, 7, 8\}$ en deux sous-ensembles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ tels que $P_{\hat{A}} + P_{\hat{B}} = 402/6 = 67$. Supposons, sans perte de généralité, que $\hat{A}$ contient l'entier 4. Alors $P_{\hat{B}} \equiv 67 - P_{\hat{A}} \equiv 1 \pmod 2$, donc $\hat{A}$ contient aussi l'entier 8. En outre, si $\hat{A}$ contient également l'un des deux entiers 5 ou 7, alors $P_{\hat{A}} + P_{\hat{B}} \geqslant P_{\hat{A}} \geqslant 4 \times 5 \times 8 \geqslant 160 > 67$. On a donc nécessairement $\hat{A} = \{4, 8\}$ et $\hat{B} = \{5, 7\}$, et on est tout heureux de vérifier que, dans ce cas, on a effectivement $P_{\hat{A}} + P_{\hat{B}} = 32 + 35 = 67$.

En conclusion, la valeur maximale de $P_A + P_B$ est égale à $P_\emptyset + P_E = 8! + 1 = 40321$, et la valeur minimale de $P_A + P_B$ est égale à $P_{\{2,3,5,7\}} + P_{\{1,4,6,8\}} = 402$.

<u>*Solution alternative n°1*</u> Soit A et B deux ensembles disjoints dont la réunion est égale à l'ensemble $E = \{1, \ldots, 8\}$, et soit $c = \sqrt{8!}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $P_A \leqslant P_B$; puisque $P_A \times P_B = P_E = c^2$, cela signifie que $P_A \leqslant c$.

Mais alors $P_A + P_B = f(P_A)$, où l'on a posé $f(x) = x + c^2/x$, et il nous reste donc à trouver les valeurs minimale et maximale que peut prendre $f(P_A)$. On étudie donc le sens de variation de f : si $x \leqslant y \leqslant c$, alors

$$f(y) - f(x) = \frac{y^2 + c^2}{y} - \frac{x^2 + c^2}{x} = \frac{(c^2 - xy)(x - y)}{xy} \leqslant 0.$$

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $(0, c]$ et, par conséquent :

- ▹ afin de maximiser $f(P_A)$, il suffit de minimiser P_A, c'est-à-dire de choisir A vide, ou encore $P_A = 1$;

- ▷ afin de minimiser $f(P_A)$, il suffit de maximiser P_A, sachant que P_A est un produit d'éléments de E et que $P_A \leqslant c$.

Il nous faut donc calculer la valeur de l'entier $\lfloor c \rfloor$. Puisque $c^2 = 8! = 40320$ et que

$$200^2 = 40000 < 40320 < 40401 = 201^2,$$

c'est donc que $\lfloor c \rfloor = 200$. On étudie donc les entiers $200, 199, 198, \ldots$ jusqu'à tomber sur un entier n que l'on pourra écrire comme un produit d'éléments de E. Au lieu de procéder brutalement, on peut formuler deux remarques préalables :

- ▷ de manière générale, n doit diviser $8! = 2^7 \times 3^2 \times 5 \times 7$;
- ▷ en outre, si n est impair, alors n divise même $3 \times 5 \times 7 = 105$, donc $n \leqslant 105$.

On déduit de la première remarque que n ne peut prendre aucune des valeurs

$$200 = 2^3 \times 5^2,\ 198 = 11 \times 18,\ 196 = 4 \times 7^2,\ 194 = 2 \times 97,$$

de sorte que $n = 192 = 4 \times 6 \times 8$ est en fait l'entier recherché.

Par conséquent, la valeur maximale de $P_A + P_B$ est égale à $f(1) = 8! + 1 = 40321$, et la valeur minimale de $P_A + P_B$ est égale à $f(192) = 192 + 210 = 402$.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été résolu de façon très hétérogène. Beaucoup d'élèves ont trouvé la valeur du maximum, mais peu ont fourni une bonne justification de sa maximalité : on pouvait par exemple utiliser l'inégalité du réordonnement, ou bien affirmer que si $P_A < 8!$, on a forcément $P_a \leqslant 8!/2$.

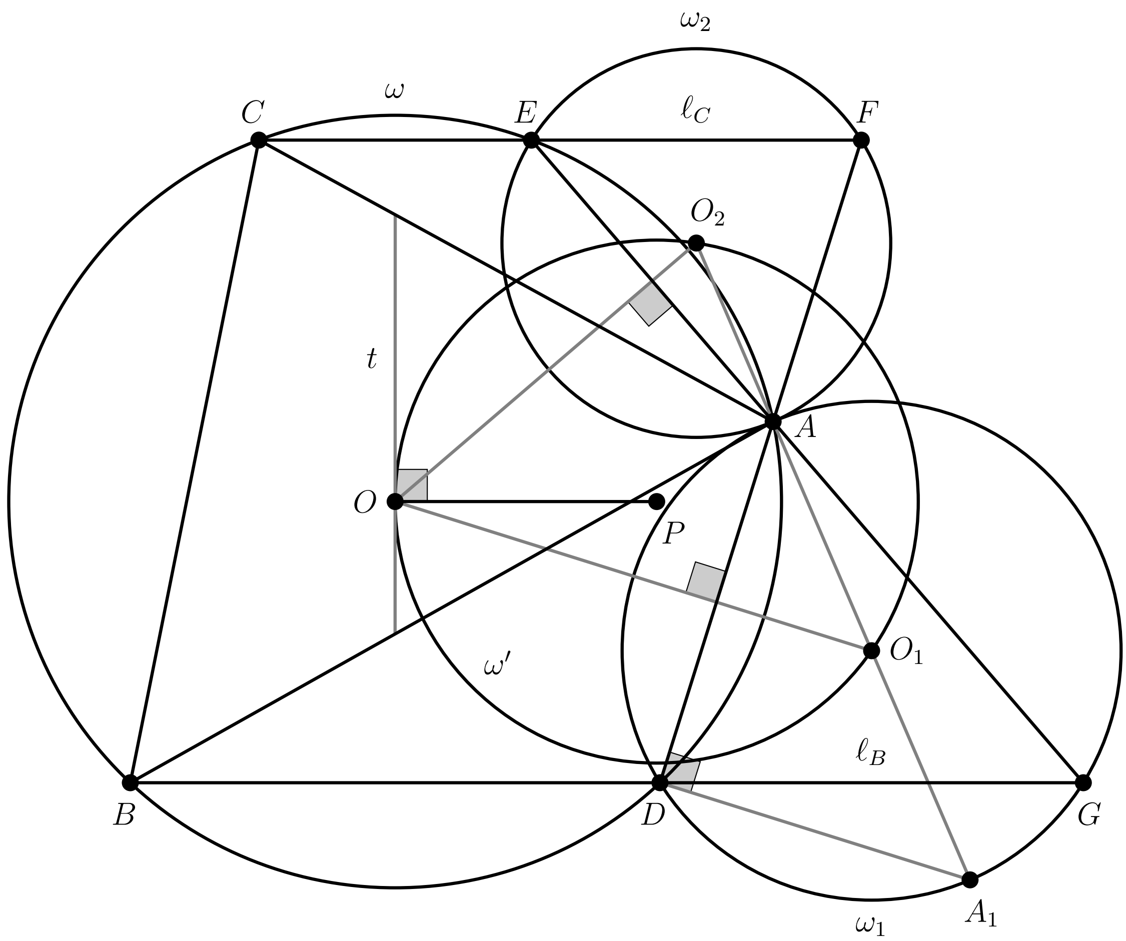
Pour le minimum, il était déjà plus difficile de trouver comment obtenir la valeur minimale de 402, et peu d'élèves ont vu comment utiliser une inégalité arithmético-géométrique permettait de montrer que celle-ci était optimale. Néanmoins, certains ont utilisé des approches plus atypiques et trouvé des résultats, notamment via l'étude de fonctions ou via des comparaisons astucieuses. Nombreux ont dit qu'il fallait obtenir les termes les plus proches possible pour avoir égalité : l'idée est intéressante, mais il fallait formaliser pour obtenir des résultats rigoureux.

Exercice 3. Soit ABC un triangle et soit ω son cercle circonscrit. Soit ℓ_B et ℓ_C deux droites parallèles l'une à l'autre, passant respectivement par les points B et C. On note D le point d'intersection, autre que B, entre ω et la droite ℓ_B. De même, on note E le point d'intersection, autre que C, entre ω et la droite ℓ_C.

On suppose que les droites ℓ_C et (AD) se coupent en un point F, et que les droites ℓ_B et (AE) se coupent en un point G. On note alors O, O_1 et O_2 le centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles ABC, ADG et AEF. Enfin, on note P le centre du cercle circonscrit au triangle OO_1O_2.

Démontrer que la droite (OP) est parallèle aux deux droites ℓ_B et ℓ_C.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Commençons par tracer une figure, en prenant soin de faire apparaître le triangle OO_1O_2, puisque P en est le centre du cercle circonscrit. On en profite pour noter ω_1, ω_2 et ω' les cercles circonscrits à ADG, à AEF et à OO_1O_2.



On remarque tout de suite que les points A, O_1 et O_2 semblent alignés, et on s'empresse donc de le démontrer. En effet, les droites (DG) et (EF) sont parallèles l'une à l'autre. Le théorème de Thalès indique alors qu'il existe une homothétie h, de centre A, qui envoie le triangle ADG sur le triangle AFE. On en déduit que $O_2 = h(O_1)$, et donc que les points A, O_1 et O_2 sont bien alignés.

Afin de démontrer que (OP) est parallèle à ℓ_B et à ℓ_C, on va maintenant calculer l'angle de droites (OP, ℓ_B). Pour ce faire, on commence par se débarrasser du point P, en invoquant la tangente en O à ω' : si l'on note t cette tangente, alors

$$\begin{aligned}(OP, \ell_B) &= (OP, t) + (t, OO_2) + (OO_2, \ell_B)\\ &= 90° + (O_1O, O_1O_2) + (OO_2, \ell_B)\\ &= 90° + (O_1O, O_1A) + (OO_2, \ell_B).\end{aligned}$$

Puis, comme (AD) est l'axe radical des cercles ω_1 et ω', les droites (AD) et (OO_1) sont perpendiculaires l'une à l'autre. De même, (AE) et (OO_2) sont perpendiculaires. On en déduit que

$$\begin{aligned}(OP, \ell_B) &= 90° + (O_1O, O_1A) + (OO_2, \ell_B)\\ &= 90° + (O_1O, AD) + (AD, O_1A) + (OO_2, AE) + (AE, \ell_B)\\ &= 90° + 90° + (AD, O_1A) + 90° + (AE, \ell_B)\\ &= 90° + (AD, O_1A) + (AE, \ell_B).\end{aligned}$$

Ce faisant, on s'est déjà débarrassés des points P, O et O_2, ce qui suggère que l'on est sur la bonne voie. Notre prochaine victime sera donc le point O_1. En effet, si l'on note A_1 le symétrique de A par rapport à O_1, alors $[AA_1]$ est un diamètre de ω_1, de sorte que

$$(AD, O_1A) = (AD, AA_1) = (AD, DA_1) + (DA_1, AA_1) = 90° + (DG, AG) = 90° + (BD, AE).$$

Mais alors on a déjà gagné, puisque

$$(OP, \ell_B) = 90° + (AD, O_1A) + (AE, \ell_B) = 90° + 90° + (BD, AE) + (AE, \ell_B) = (BD, \ell_B),$$

ce qui conclut.

<u>*Solution alternative n°1*</u> On réutilise, ci-dessous, les noms des points et cercles introduits dans la solution précédente.

Puisque les droites ℓ_B et ℓ_C sont parallèles, et comme A, B, C, D et E sont cocycliques, on sait tout d'abord que $(GA, GD) = (EA, EF)$ et que, de même, $(FE, FA) = (DG, DA)$. Les triangles AEF et AGD sont donc semblables. Par conséquent, les triangles FO_2A et DO_1A sont également semblables, de sorte que $(AF, AO_2) = (AD, AO_1)$, et donc que les points O_1, A et O_2 sont alignés.

Ensuite, puisque la droite (AD) est l'axe radical des cercles ω et ω_1, elle est perpendiculaire à (OO_1). On en déduit, d'après le théorème de l'angle au centre, et en notant A_1 le symétrique de A par rapport à O_1, que

$$\begin{aligned}(O_1O_2, O_1O) &= (AA_1, AD) + (AD, OO_1) = (AA_1, DA_1) + (DA_1, AD) + 90°\\ &= (AG, DG) + 90° + 90° = (GA, GD).\end{aligned}$$

On montre de même que $(O_2O, O_2O_1) = (FE, FA) = (DG, DA)$. Les triangles OO_1O_2 et AGD sont donc *indirectement* semblables.

Mais alors les triangles OO_1P et AGO_1 sont, aux aussi, indirectement semblables. On en conclut que

$$(OP, O_1O_2) = (GD, AO_1) = (GD, O_1O_2),$$

ce qui signifie bien que (OP) est parallèle à la droite $(GD) = \ell_B$, donc à ℓ_C également.

Remarque : Si l'on entreprend d'utiliser des angles de droites, il est important de ne *jamais* diviser brutalement les angles par deux, par exemple pour utiliser le théorème de l'angle au centre ou bien quand on rencontre un triangle isocèle ou une bissectrice. En effet, voici un exemple d'horreur à laquelle on pourrait aboutir si on ne prend pas cette peine :

> « Puisque la droite (OO_1) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AO_1D}$, on sait que $(O_1O, O_1A) = (O_1D, O_1A)/2$. Puisque AO_1D est isocèle en O_1, on en déduit que
>
> $$(AD, AO_1) = \left((DO_1, DA) + (AD, AO_1) \right)/2 = (DO_1, AO_1)/2 = (O_1O, O_1A).$$
>
> Mais cette égalité est bien sûr complètement fausse, puisque l'on a en fait $(AD, AO_1) = (O_1O, O_1A) + 90°$. Oups ! »

La raison pour laquelle le raisonnement ci-dessus est *faux* est que les angles de droites sont des angles modulo $180°$. Par conséquent, si on divise un angle de droite par deux, on récupère une relation qui n'est valide que modulo $90°$. On s'abstiendra donc à tout prix, si on décide d'utiliser des angles de droites, de diviser des angles par deux.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été résolu par un faible nombre de personnes. Cependant, de nombreux élèves ont réussi à avancer significativement dans le problème, en essayant de démontrer ce qu'ils pouvaient conjecturer à partir de leur figure, ce qui est une excellente démarche. Des remarques simples, comme le fait que les droites (OO_1) et (AD) sont perpendiculaires, étaient en fait précieuses pour la résolution du problème et étaient alors récompensées. N'hésitez pas à écrire toutes vos idées, même les remarques qui pourraient sembler anodines.

Exercice 4. Au pays des merveilles se trouvent n villes. Chaque paire de villes est reliée par une route à sens unique, qui part d'une des deux villes et arrive à l'autre. Afin de s'y retrouver, Alice interroge le roi de cœur : à chaque question, Alice choisit une paire de villes, et le roi de cœur lui dit quelle est la ville de départ de la route qui relie ces deux villes.

Démontrer que, en $5n$ questions ou moins, Alice peut arriver à savoir s'il existe une ville d'où part au plus une route.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Nous allons décrire une stratégie qu'Alice peut mettre en place pour aboutir à ses fins en $5n$ questions ou moins. À tout moment, on dira qu'une ville v est *mauvaise* si Alice a déjà trouvé deux routes qui partent de v, et que v est *bonne* sinon. De même, on dira qu'une paire de villes $\{v, w\}$ est *explorée* si Alice a déjà interrogé le roi de cœur sur cette paire-là, et *inexplorée* sinon.

Enfin, en parallèle de ces questions, Alice a dessiné une carte sur laquelle les n villes sont représentées par n sommets, et elle ajoute une arête sur cette carte, entre les villes v et w à chaque question qu'elle pose sur la paire $\{v, w\}$. Dans la suite, nous allons identifier le pays des merveilles au graphe qu'Alice est en train de construire.

Tout d'abord, Alice n'a manifestement jamais intérêt à interroger le roi de cœur sur une paire de villes qui seraient toutes deux mauvaises, ou sur une paire de villes déjà explorée. La stratégie d'Alice débute donc comme suit. Tant qu'il existe une paire inexplorée $\{v, w\}$ formée de deux bonnes villes, Alice choisit une telle paire et interroge le roi de cœur sur cette paire. À la fin de cette première étape, nul sommet de notre graphe n'a strictement plus de deux arêtes sortantes. Alice a donc posé au plus $2n$ questions.

En outre, soit X l'ensemble des villes toujours bonnes à l'issue de cette étape, et soit x le cardinal de X, de sorte qu'il y a $x(x-1)/2$ routes entre villes de X. Toute paire $\{v, w\}$ formée de deux villes de X est manifestement explorée ; et toute ville de X, puisqu'elle est bonne, est donc à l'origine d'au plus une route allant vers une autre ville de X. Il y a donc au plus x routes entre villes de X, ce qui signifie que $x \leqslant 3$.

Alice n'a donc plus qu'à interroger le roi de cœur sur toutes les paires $\{v, x\}$ où $x \in X$: cela fera $nx \leqslant 3n$ questions supplémentaires, à l'issue desquelles Alice saura exactement combien de routes partent de chacune des villes de X. Si, à cette étape de l'algorithme, il reste une bonne ville v, c'est qu'il n'y avait effectivement pas plus d'une route qui partait de v.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Du fait de sa difficulté, cet exercice a été résolu par un faible nombre d'élèves. Nombreux sont ceux qui ont remarqué que, pour $n \leqslant 11$, Alice pouvait se contenter de demander le sens de toutes les routes ; malheureusement, cela ne faisait pas avancer le problème. La clé consistait à s'apercevoir que, en général, il fallait éviter de poser une question sur une ville dont deux routes sortaient.

Quelques élèves ont proposé des stratégies qui ne marchaient pas en $5n$ questions, mais en $6n$ questions ou plus (par exemple $10n$ questions) et cela a été valorisé. Quelques élèves ont également obtenu des points en montrant qu'au plus 3 villes pouvaient avoir moins de 2 routes sortantes.

Exercices Senior

Exercice 5. Au pays des merveilles se trouvent n villes. Chaque paire de villes est reliée par une route à sens unique, qui part d'une des deux villes et arrive à l'autre. Afin de s'y retrouver, Alice interroge le roi de cœur : à chaque question, Alice choisit une paire de villes, et le roi de cœur lui dit quelle est la ville de départ de la route qui relie ces deux villes.

Démontrer que, en $5n$ questions ou moins, Alice peut arriver à savoir s'il existe une ville d'où part au plus une route.

Solution de l'exercice 5 Nous allons décrire une stratégie qu'Alice peut mettre en place pour aboutir à ses fins en $5n$ questions ou moins. À tout moment, on dira qu'une ville v est *mauvaise* si Alice a déjà trouvé deux routes qui partent de v, et que v est *bonne* sinon. De même, on dira qu'une paire de villes $\{v, w\}$ est *explorée* si Alice a déjà interrogé le roi de cœur sur cette paire-là, et *inexplorée* sinon.

Enfin, en parallèle de ces questions, Alice a dessiné une carte sur laquelle les n villes sont représentées par n sommets, et elle ajoute une arête sur cette carte, entre les villes v et w à chaque question qu'elle pose sur la paire $\{v, w\}$. Dans la suite, nous allons identifier le pays des merveilles au graphe qu'Alice est en train de construire.

Tout d'abord, Alice n'a manifestement jamais intérêt à interroger le roi de cœur sur une paire de villes qui seraient toutes deux mauvaises, ou sur une paire de villes déjà explorée. La stratégie d'Alice débute donc comme suit. Tant qu'il existe une paire inexplorée $\{v, w\}$ formée de deux bonnes villes, Alice choisit une telle paire et interroge le roi de cœur sur cette paire. À la fin de cette première étape, nul sommet de notre graphe n'a strictement plus de deux arêtes sortantes. Alice a donc posé au plus $2n$ questions.

En outre, soit X l'ensemble des villes toujours bonnes à l'issue de cette étape, et soit x le cardinal de X, de sorte qu'il y a $x(x-1)/2$ routes entre villes de X. Toute paire $\{v, w\}$ formée de deux villes de X est manifestement explorée ; et toute ville de X, puisqu'elle est bonne, est donc à l'origine d'au plus une route allant vers une autre ville de X. Il y a donc au plus x routes entre villes de X, ce qui signifie que $x \leqslant 3$.

Alice n'a donc plus qu'à interroger le roi de cœur sur toutes les paires $\{v, x\}$ où $x \in X$: cela fera $nx \leqslant 3n$ questions supplémentaires, à l'issue desquelles Alice saura exactement combien de routes partent de chacune des villes de X. Si, à cette étape de l'algorithme, il reste une bonne ville v, c'est qu'il n'y avait effectivement pas plus d'une route qui partait de v.

Commentaire des correcteurs Du fait de sa difficulté, cet exercice a été résolu par un faible nombre d'élèves. Nombreux sont ceux qui ont remarqué que, pour $n \leqslant 11$, Alice pouvait se contenter de demander le sens de toutes les routes ; malheureusement, cela ne faisait pas avancer le problème. La clé consistait à s'apercevoir que, en général, il fallait éviter de poser une question sur une ville dont deux routes sortaient.

Quelques élèves ont proposé des stratégies qui ne marchaient pas en $5n$ questions, mais en $6n$ questions ou plus (par exemple $10n$ questions) et cela a été valorisé. Quelques élèves ont également obtenu des points en montrant qu'au plus 3 villes pouvaient avoir moins de 2 routes sortantes.

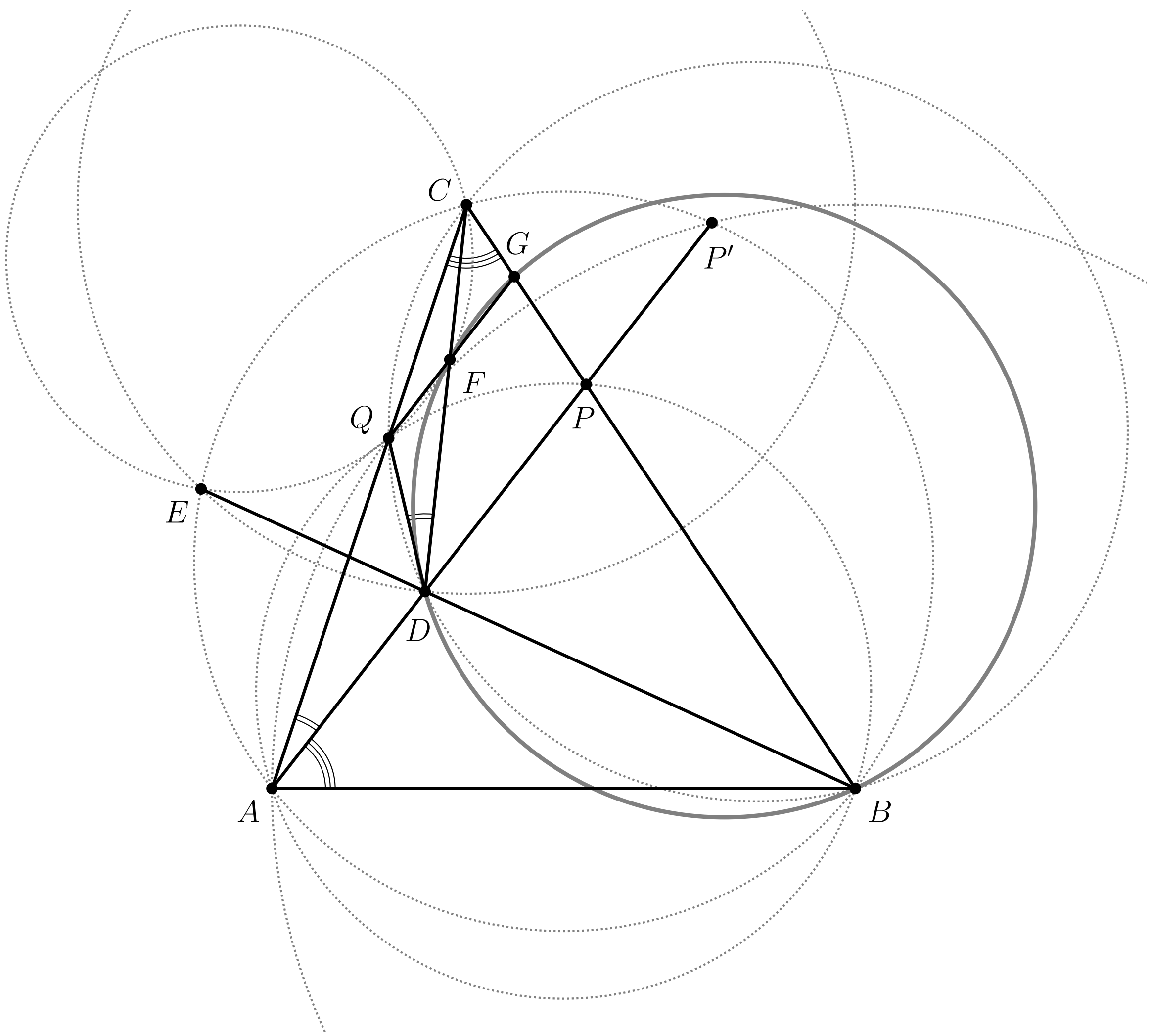
Exercice 6. Soit ABC un triangle acutangle tel que $\widehat{CAB} > \widehat{BCA}$ et soit P le point du segment $[BC]$ tel que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$. Soit Q le point d'intersection, autre que A, entre le cercle circonscrit à ABP et la droite (AC). Soit ensuite D le point du segment $[AP]$ tel que $\widehat{QDC} = \widehat{CAP}$, puis E le point de (BD), autre que D, tel que $CE = CD$. Enfin, soit F le point d'intersection, autre que C, entre le cercle circonscrit à CQE et la droite (CD), et soit G le point d'intersection des droites (QF) et (BC).

Démontrer que les points B, D, F et G sont cocycliques.

Solution de l'exercice 6 Commençons par tracer une figure. Une première difficulté est de construire le point P : une manière simple de procéder est alors de construire le point d'intersection, autre que A, entre le cercle circonscrit à ABC et le cercle de centre B et de rayon A. En effet, si l'on note P' ce point, les arcs $\overline{AB}$ et $\overline{BP'}$ ont même mesure, donc $\widehat{BCA} = \widehat{P'AB} = \widehat{PAB}$, et il suffit de construire P comme le point d'intersection des droites (BC) et (AP').

De même, puisque l'on souhaite que $\widehat{QDC} = \widehat{CAP} = \widehat{QAP} = \widehat{QBP} = \widehat{QBC}$, on peut construire le point D comme le point d'intersection entre la droite (AP) et le cercle circonscrit à BCQ.

On obtient alors la figure suivante, où l'on a tracé en pointillés tous les cercle utiles à notre construction, en gris le cercle dont on souhaite montrer qu'il existe, et où l'on a bien sûr marqué les angles $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{QDC} = \widehat{CAP}$, qui ont de fortes chances d'avoir un rôle à jouer dans la suite.



Une première remarque qui apparaît nettement sur la figure est que les points A, B, P', C et E semblent cocycliques. On commence donc par le démontrer, au moyen de la chasse aux angles de droites suivante :

$$\begin{aligned}(EC, EB) &= (DB, DC) = (QB, QC) = (QB, QA) = (PB, PA) \\ &= (CB, PA) = (CB, AB) + (AB, PA) \\ &= (CB, AB) + (AC, CB) = (AC, AB).\end{aligned}$$

Puisque aucune autre remarque ne saute manifestement aux yeux, on se concentre alors sur la propriété à démontrer, dans le but de la transformer en une propriété équivalente qui aura des chances d'être plus facile à observer. Ainsi, il s'agit de démontrer que

$$(DF, DB) = (GF, GB) = (QF, BC) = (QF, CF) + (CF, BC) = (QE, CE) + (DF, BC),$$

c'est-à-dire que $(QE, CE) = (BC, DB) = (BC, BE) = (AC, AE)$, ou encore que les triangles ACE et ECQ sont (indirectement) semblables, puisqu'ils ont déjà même angle en $\widehat{C}$.

Au vu de la relation $CD^2 = CE^2$, notre objectif devient donc de démontrer que $CA \cdot CQ = CE^2 = CD^2$. Mais l'égalité $CA \cdot CQ = CD^2$ découle justement du fait que les triangles CAD et CDQ sont semblables, puisqu'ils ont même angle en $\widehat{C}$ et que $\widehat{CAD} = \widehat{QDC}$. Ceci conclut donc notre solution.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> L'exercice a été très réussi ! Plusieurs approches étaient possibles. Quelques élèves étaient, sans le savoir, très proches de la conclusion. D'autres ont effectué une chasse aux angles intéressante sans pour autant voir que cela impliquait que des points étaient cocycliques ou que des droites étaient parallèles, ce qui est toujours dommage.

Plusieurs élèves ont tenté de réduire le problème ou de le ramener à la démonstration d'une autre propriété de la figure. C'est une bonne idée mais, la plupart du temps, démontrer cette autre propriété n'est pas spécialement plus simple que le problème de départ.

On notera qu'il n'était pas nécessaire de déployer des outils techniques pour cet exercice et qu'une simple chasse aux angles ou l'usage de la puissance d'un point par rapport à un cercle était largement suffisants.

Une fois de plus, on déplore le cas d'élèves n'ayant pas respecté la consigne concernant les figures. On insiste sur l'intérêt de figures propres et exactes qui sont la base de la réflexion en géométrie, surtout lorsque l'exercice devient rééllement corsé. L'habitude de tracer des figures exactes est donc essentiel. À l'inverse, de nombreux élèves ont su utiliser leur figure pour conjecturer diverses propriétés et en fournir un début de démonstration.

Exercice 7. Soit C un entier naturel non nul. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tous les entiers a et b de somme $a+b \geqslant C$, l'entier $a+f(b)$ divise $a^2+bf(a)$.

Solution de l'exercice 7 Tout d'abord, toute fonction linéaire strictement croissante est solution. En effet, pour tout entier $k \geqslant 1$, l'entier $a+kb$ divise bien $a^2+b\times(ka) = a(a+kb)$. Réciproquement, montrons que toute solution est une fonction linéaire (qui sera strictement croissante, puisque à valeurs dans $\mathbb{N}^*$).

Considérons un entier $n \geqslant C$, et posons $\varphi = f(1)$. Alors

$$\varphi^2 + f(n) \equiv n^2 + f(n) \equiv 0 \pmod{n+\varphi},$$

donc $f(n)+\varphi^2$ est un multiple non nul de $n+\varphi$, de sorte que $f(n) \geqslant n+\varphi-\varphi^2$.

D'autre part, puisque $1+f(n)$ divise $1+\varphi n$, soit $g(n) = (1+\varphi n)/(1+f(n))$. Alors

$$\varphi(1+f(n)) \geqslant \varphi(n+1+\varphi-\varphi^2) = (1+f(n))g(n) - 1 + (1+\varphi-\varphi^2)\varphi.$$

Cela signifie que $\Phi \geqslant (1+f(n))(g(n)-\varphi)$, où l'on a posé $\Phi = \varphi^3-\varphi^2-\varphi+1$. Par conséquent, si $n \geqslant \Phi+\varphi^2-\varphi$, on sait que $1+f(n) > \Phi$, et donc que $g(n) \leqslant \varphi$.

Choisissons maintenant un entier $a \geqslant 1$, et démontrons que $f(a) = \varphi a$. Pour ce faire, on construit un entier $n \geqslant \max\{\Phi+\varphi^2-\varphi, C\}$ comme suit :

- ▷ on prend $n \equiv 2 \pmod 4$ si φ est impair, et n impair si φ est pair : dans tous les cas, $n\varphi+1$ est impair ;
- ▷ pour tout nombre premier $p \leqslant \max\{a,\varphi\}$ impair, on choisit $n \equiv 1 \pmod p$ ou $n \equiv 2 \pmod p$ de sorte que $n\varphi \not\equiv -1 \pmod p$.

D'après le théorème chinois, un tel choix est bien faisable, et ce pour une infinité d'entiers n. Sans perte de généralité, on suppose donc même que $n \geqslant 2\max\{\varphi a, f(a)\}$.

Alors $g(n)$ est un diviseur de $1+\varphi n$, et l'on sait que $g(n) \leqslant \varphi$. Par construction, l'entier $1+\varphi n$ n'a aucun facteur premier $p \leqslant \varphi$, de sorte que $g(n) = 1$, et donc que $f(n) = \varphi n$. Mais alors $a+\varphi n = a+f(n)$ divise

$$(a^2+nf(a)) + (a+\varphi n)(\varphi n - a) = (\varphi n)^2 + nf(a) = (\varphi^2 n + f(a))n.$$

Or, on a construit n de sorte qu'il n'ait aucun facteur premier impair commun avec a, et ne soit pas divisible par 4. Par conséquent, si l'on pose $d = \mathrm{PGCD}(a+\varphi n, n)$, alors $d = \mathrm{PGCD}(a,n)$ divise 2. Puis, si l'on pose $\alpha = (a+\varphi n)/d$ et $n' = n/d$, on constate que $\mathrm{PGCD}(\alpha, n') = 1$ et que α divise $(\varphi^2 n + f(a))n'$, de sorte que α divise $\varphi^2 n + f(a)$. L'entier α divise donc également

$$(\varphi^2 n + f(a)) - d\varphi\alpha = f(a) - \varphi a.$$

Or, comme $n \geqslant 2\max\{\varphi a, f(a)\}$, on sait que

$$\alpha > \varphi n/d \geqslant \varphi n/2 \geqslant \max\{\varphi a, f(a)\} \geqslant |f(a) - \varphi a|.$$

C'est donc que $f(a) = \varphi a$, ce qui conclut.

Solution alternative n°1 Comme précédemment, on pose $\varphi = f(1)$, et on démontre que, si f est une fonction solution, alors $f(n) = \varphi n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Tout d'abord, pour tout entier $n \geqslant C$, l'énoncé indique que $1+f(n)$ divise $1+n\varphi$. On en déduit que $1+f(n) \leqslant 1+n\varphi$, donc que $f(n) \leqslant n\varphi$.

On considère maintenant un entier $m \geqslant 2$ quelconque, puis un entier $k \geqslant 1$ tel que $km - f(m) \geqslant C$. Si l'on pose $a = km - f(m)$, et puique $a+m \geqslant a \geqslant C$, l'énoncé indique que

$$f(m)^2 + nf(a) \equiv f(m)^2 + bf(a) \equiv (-a)^2 + mf(a) \equiv 0 \pmod{a+f(m)}.$$

L'entier $f(m)^2 + mf(a)$ est donc divisible par $a + f(m) = km$, et par m également. On en conclut que $f(m)^2$ est lui aussi divisible par m ; bien sûr, cette relation de divisibilité également valable pour $m = 1$, mais on n'en aura pas besoin.

En particulier, si p est un nombre premier, et comme p divise $f(p)^2$, l'entier p divise aussi $f(p)$: dans la suite, on pose $g(p) = f(p)/p$, et l'on sait que $1 \leqslant g(p) \leqslant \varphi$. Si, en outre, $p \geqslant \max\{C, \varphi+1\}$, alors $p+1 \geqslant C$, et l'énoncé indique donc que $p+\varphi$ divise $p^2+f(p) = p(p+g(p))$. Puisque $p > \varphi$, c'est que p et $p + \varphi$ sont premiers entre eux, donc que $p + \varphi$ divise $p + g(p)$. Comme $1 \leqslant g(p) \leqslant \varphi$, on en déduit que $g(p) = \varphi$, c'est-à-dire que $f(p) = \varphi p$.

Enfin, soit $\ell \geqslant 1$ un entier quelconque, et soit p un nombre premier tel que $p \geqslant \max\{C, \varphi + 1, \ell + 1\}$. On vient de voir que $f(p) = \varphi p$. En outre, puisque $\ell + p \geqslant p \geqslant C$, l'énoncé indique que

$$p(f(\ell) - \varphi\ell) \equiv pf(\ell) - \ell f(p) \equiv pf(\ell) + \ell^2 \equiv 0 \pmod{\ell + f(p)}.$$

Or, comme $1 \leqslant \ell \leqslant p - 1$, on sait que p est premier avec ℓ, donc avec $\ell + \varphi p = \ell + f(p)$ également. On en déduit que $\ell + \varphi p = \ell + f(p)$ divise $f(\ell) - \varphi\ell$. Ceci étant valable pour des nombres premiers p arbitrairement grands, on en déduit que $f(\ell) = \ell\varphi$, ce qui conclut.

Solution alternative n°2 On présente une autre façon, légèrement différente, de conclure une fois que l'on a montré que p divise $f(p)$ pour tout nombre premier p.

Soit p un nombre premier, et soit $g(p)$ l'entier $f(p)/p$. Puisque $g(p) \leqslant \varphi$ dès lors que $p \geqslant C$, la fonction g est bornée. Il existe donc un entier γ et une infinité de nombres premiers p pour lesquels $g(p) = \gamma$.

Soit alors ℓ un entier, puis $p \geqslant \max\{C, \ell + 1\}$ un nombre premier pour lequel $g(p) = \gamma$. Alors p est premier avec ℓ, donc avec $\ell + \gamma p = \ell + f(p)$. Or, puisque $\ell + p \geqslant p \geqslant C$, l'énoncé indique que

$$p(f(\ell) - \gamma\ell) \equiv pf(\ell) - \ell f(p) \equiv pf(\ell) + \ell^2 \equiv 0 \pmod{\ell + f(p)}.$$

On en déduit que $\ell + \gamma p = \ell + f(p)$ divise $f(\ell) - \gamma\ell$. Ceci étant valable pour des nombres premiers p arbitrairement grands, on en déduit que $f(\ell) = \gamma\ell$, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs Cet exercice difficile a été résolu entièrement par cinq élèves, ce qui est très satisfaisant, d'autant que deux autres élèves avaient presque une solution complète !

Il y avait de très nombreuses preuves différentes, certaines ne contenant même presque aucune manipulation arithmétique. Beaucoup d'élèves mentionnent le théorème de Dirichlet, de manière très judicieuse, soit pour démontrer que tout nombre p premier divise $f(p)$, soit pour démontrer directement qu'il existe une infinité d'entiers b tels que $f(b) = bf(1)$. D'autres élèves ne connaissaient manifestement pas ce théorème : ce n'est pas grave, et c'est le moment de le découvrir !

De très loin, l'erreur la plus fréquente est de ne pas faire dépendre les variables que vous introduisez des paramètres a et b. Par exemple, mieux vaut écrire $a^2 + bf(a) = k_{a,b}(a + f(b))$ plutôt que simplement $a^2 + bf(a) = k(a + f(b))$. En effet, dans la suite, et à cause de cette notation, de nombreux élèves ont oublié que k dépendait à la fois de a et de b, et ont alors utilisé le raisonnement *faux* suivant :

> « En choisissant $a = b$, on obtient $(a - k)(a + f(a))$, donc $k = a$. Par conséquent, dans le cas général, puisque $k = a$, cela signifie que $a^2 + bf(a) = a^2 + af(b)$, c'est-à-dire que f est linéaire ! »

Évidemment, on avait bien $k_{a,a} = a$, mais rien n'indiquait que $k_{a,b} = a$ quand $a \neq b$.

Autre conseil : même si conjecturer que les fonctions affines étaient solutions n'était pas valorisé directement ici, rechercher des solutions simples, telles que l'identité, est toujours une bonne idée. En effet, plusieurs élèves ont perdu du temps à essayer de voir ce qu'impliquerait un défaut d'injectivité de f et ont fondé leur copie là-dessus ; s'ils avaient remarqué que l'identité était solution, ils en auraient vite conclu que se focaliser sur les cas des fonctions non injectives était en fait loin de suffire, et qu'il fallait donc se concentrer sur d'autres approches.