PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 1ER AVRIL 2020

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2005 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2004 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n'est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique à l'adresse suivante :

`copies.ofm@gmail.com`

Exercices Junior

Exercice 1. Soit $a_1, a_2, \ldots$ la suite d'entiers telle que $a_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1.$$

Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $a_n^2 + 1$ divise $a_{n+1}^2 + 1$.

Solution de l'exercice 1 Pour tout entier $n \geqslant 1$, posons $b_n = a_n^2 + 1$. On conclut en constatant directement que

$$b_{n+1} \equiv (a_n^2 + a_n + 1)^2 + 1 \equiv (b_n + a_n)^2 + 1 \equiv a_n^2 + 1 \equiv b_n \equiv 0 \pmod{b_n}.$$

Solution alternative n°1 Il suffit de constater, pour tout entier $n \geqslant 1$, que

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^2 + 1 &= (a_n^2 + a_n + 1)^2 + 1 \\
&= a_n^4 + 2a_n^3 + 3a_n^2 + 2a_n + 2 \\
&= a_n^2(a_n^2 + 1) + 2a_n^3 + 2a_n^2 + 2a_n + 2 \\
&= a_n^2(a_n^2 + 1) + 2a_n(a_n^2 + 1) + 2a_n^2 + 2 \\
&= a_n^2(a_n^2 + 1) + 2a_n(a_n^2 + 1) + 2(a_n^2 + 1) \\
&= (a_n^2 + 2a_n + 2)(a_n^2 + 1)
\end{aligned}$$

est effectivement un multiple de $a_n^2 + 1$.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été bien résolu. Certains ont tenté une récurrence, sans grand succès, car il était difficile d'obtenir le résultat par récurrence. Peu de copies ont travaillé modulo $a_n^2 + 1$, ce qui simplifiait pourtant grandement les calculs.

Exercice 2. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 3. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 4. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercices Senior

Exercice 5. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

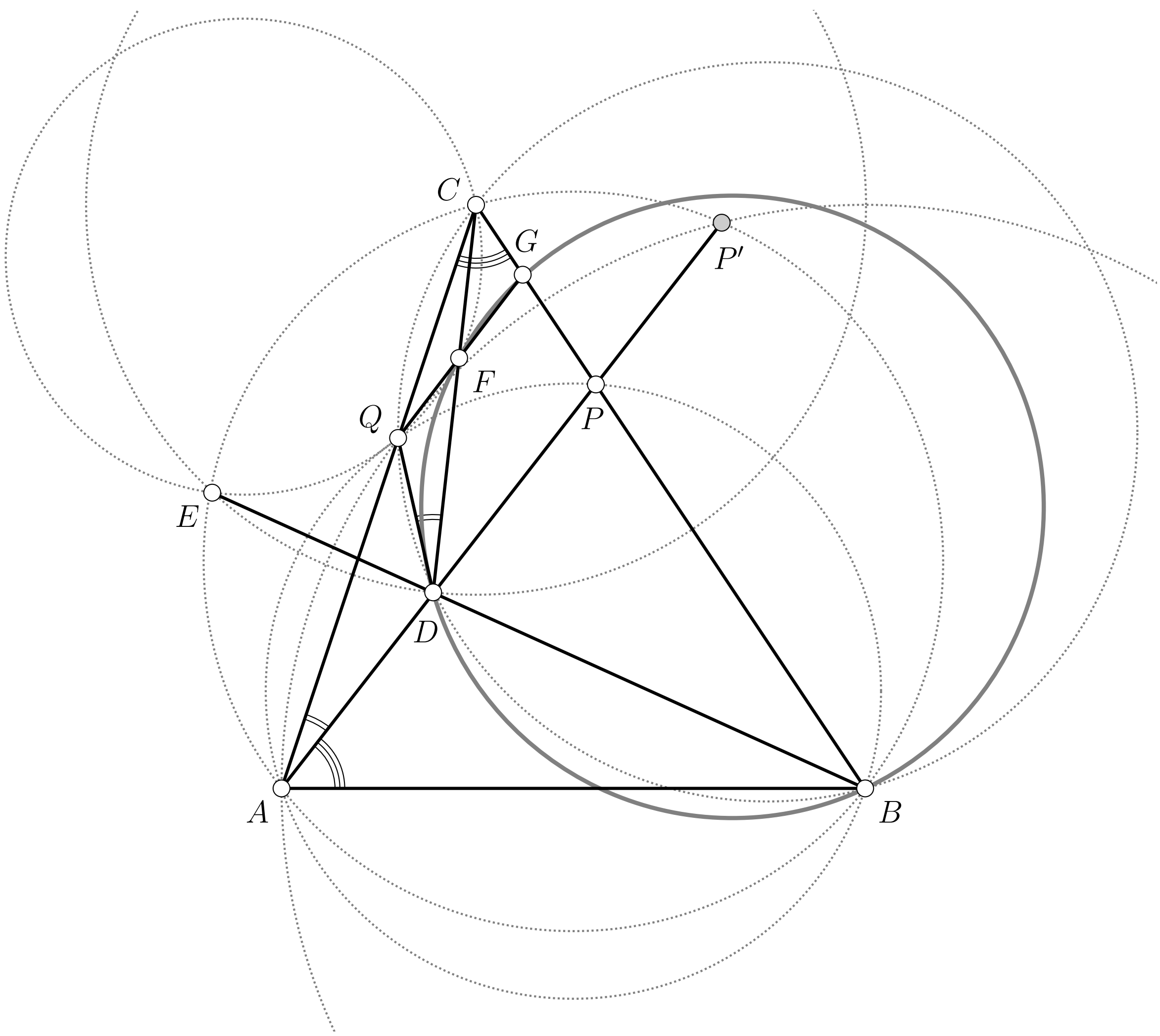
Exercice 6. Soit ABC un triangle acutangle tel que $\widehat{CAB} > \widehat{BCA}$ et soit P le point du segment $[BC]$ tel que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$. Soit Q le point d'intersection, autre que A, entre le cercle circonscrit à ABP et la droite (AC). Soit ensuite D le point du segment $[AP]$ tel que $\widehat{QDC} = \widehat{CAP}$, puis E le point de (BD), autre que D, tel que $CE = CD$. Enfin, soit F le point d'intersection, autre que C, entre le cercle circonscrit à CQE et la droite (CD), et soit G le point d'intersection des droites (QF) et (BC).

Démontrer que les points B, D, F et G sont cocycliques.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Commençons par tracer une figure. Une première difficulté est de construire le point P : une manière simple de procéder est alors de construire le point d'intersection, autre que A, entre le cercle circonscrit à ABC et le cercle de centre B et de rayon A. En effet, si l'on note P' ce point, les arcs $\overline{AB}$ et $\overline{BP'}$ ont même mesure, donc $\widehat{BCA} = \widehat{P'AB} = \widehat{PAB}$, et il suffit de construire P comme le point d'intersection des droites (BC) et (AP').

De même, puisque l'on souhaite que $\widehat{QDC} = \widehat{CAP} = \widehat{QAP} = \widehat{QBP} = \widehat{QBC}$, on peut construire le point D comme le point d'intersection entre la droite (AP) et le cercle circonscrit à BCQ.

On obtient alors la figure suivante, où l'on a tracé en pointillés tous les cercle utiles à notre construction, en gris le cercle dont on souhaite montrer qu'il existe, et où l'on a bien sûr marqué les angles $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{QDC} = \widehat{CAP}$, qui ont de fortes chances d'avoir un rôle à jouer dans la suite.



Une première remarque qui apparaît nettement sur la figure est que les points A, B, P', C et E semblent cocycliques. On commence donc par le démontrer, au moyen de la chasse aux angles de droites suivante :

$$\begin{aligned}(EC, EB) = (DB, DC) = (QB, QC) = (QB, QA) = (PB, PA)\\ = (CB, PA) = (CB, AB) + (AB, PA)\\ = (CB, AB) + (AC, CB) = (AC, AB).\end{aligned}$$

Puisque aucune autre remarque ne saute manifestement aux yeux, on se concentre alors sur la propriété à démontrer, dans le but de la transformer en une propriété équivalente qui aura des chances d'être plus facile à observer. Ainsi, il s'agit de démontrer que

$$(DF, DB) = (GF, GB) = (QF, BC) = (QF, CF) + (CF, BC) = (QE, CE) + (DF, BC),$$

c'est-à-dire que $(QE, CE) = (BC, DB) = (BC, BE) = (AC, AE)$, ou encore que les triangles ACE et ECQ sont (indirectement) semblables, puisqu'ils ont déjà même angle en $\widehat{C}$.

Au vu de la relation $CD^2 = CE^2$, notre objectif devient donc de démontrer que $CA \cdot CQ = CE^2 = CD^2$. Mais l'égalité $CA \cdot CQ = CD^2$ découle justement du fait que les triangles CAD et CDQ sont semblables, puisqu'ils ont même angle en $\widehat{C}$ et que $\widehat{CAD} = \widehat{QDC}$. Ceci conclut donc notre solution.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> L'exercice a été très réussi ! Plusieurs approches étaient possibles. Quelques élèves étaient, sans le savoir, très proches de la conclusion. D'autres ont effectué une chasse aux angles intéressante sans pour autant voir que cela impliquait que des points étaient cocycliques ou que des droites étaient parallèles, ce qui est toujours dommage.

Plusieurs élèves ont tenté de réduire le problème ou de le ramener à la démonstration d'une autre propriété de la figure. C'est une bonne idée mais, la plupart du temps, démontrer cette autre propriété n'est pas spécialement plus simple que le problème de départ.

On notera qu'il n'était pas nécessaire de déployer des outils techniques pour cet exercice et qu'une simple chasse aux angles ou l'usage de la puissance d'un point par rapport à un cercle était largement suffisants.

Une fois de plus, on déplore le cas d'élèves n'ayant pas respecté la consigne concernant les figures. On insiste sur l'intérêt de figures propres et exactes qui sont la base de la réflexion en géométrie, surtout lorsque l'exercice devient réellement corsé. L'habitude de tracer des figures exactes est donc essentiel. À l'inverse, de nombreux élèves ont su utiliser leur figure pour conjecturer diverses propriétés et en fournir un début de démonstration.

Exercice 7. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**