PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 3 : COMBINATOIRE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 15 FÉVRIER 2020

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Communs” sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.
contact-pofm@animath.fr

Exercices Juniors

Exercice 1. De combien de façons peut-on placer 7 tours sur un échiquier 7×7 telle qu'aucune tour ne puisse en attaquer une autre ?
Une tour peut attaquer une autre tour si elle se situe sur la même ligne ou la même colonne.

Solution de l'exercice 1
Si on place 7 tours de sorte que deux tours ne soient pas sur la même colonne, sachant qu'il y a 7 colonne, alors il y aura exactement une tour sur chaque colonne (et de même sur chaque ligne).

Il y a 7 positions possibles pour placer une tour sur la première colonne. Il y a ensuite 6 positions possibles pour placer une tour sur la seconde colonne sans qu'elle soit sur la même ligne que la première tour. Ainsi de suite, sur la k-ième colonne il y a $8-k$ manières de placer une tour sans qu'elle soit sur la même ligne qu'une tour déjà placée.

Ainsi il y a $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ manières de disposer les tours de cette manière.

Si on note $\sigma(i)$ le numéro de ligne de la tour présente sur la i-ième colonne dans une des configurations satisfaisant l'énoncé, alors σ est ce que l'on appelle une permutation.
Commentaire des correcteurs
Le problème a été très bien réussi.

Exercice 2. Les entiers de 1 à 2020 sont écris au tableau. Jacques a le droit d'en effacer deux et d'écrire à la place leur différence ou leur somme, et de recommencer jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un entier. Est-il possible que l'entier obtenu à la fin soit 321 ?

Solution de l'exercice 2 L'énoncé présente une suite finie d'opérations et le problème demande s'il est possible de partir de la situation initiale pour arriver à une certaine situation finale. Une première idée à essayer dans ce cas est de chercher un invariant.
Une seconde idée est de tester le problème avec des plus petites valeurs. Par exemple, on peut tester l'énoncé pour les entiers écrits de 1 à 4 et regarder à quelles valeurs ont peut aboutir à la fin du processus décrit dans l'énoncé. On remarque que partant d'une valeur fixée n, les résultats possibles ont tous la même parité, celle de la somme des nombres de 1 à n. Après avoir testé cette conjecture pour les entiers écrits de 1 à 5, on essaye donc de montrer que la parité de la somme des entiers écrits au tableau est invariante sous l'opération décrite.
Si un instant donné, la somme des entiers écrits au tableau vaut S et que Jacques choisit les entiers x et y, alors ces entiers seront remplacés par $x+y$ ou par $x-y$ et alors S sera remplacé par $(S-x-y)+y-x = S-2x$ ou par $(S-y-x)+(x-y) = S-2y$. Ces deux entiers ont la même parité, donc la somme des entiers écrits au tableau garde la même parité tout au long du processus. Puisque dans la situation initiale, la somme des entiers écrits au tableau est

$$1+2+3+\cdots+2020 = \frac{2020 \cdot 2021}{2} = 1010 \cdot 2021$$

et est paire, le nombre écrit au tableau dans la situation finale sera également pair et il ne peut donc pas s'agir du nombre 321.
Commentaire des correcteurs
Il était nécessaire dans ce problème d'évoquer la notion d'invariant. Les explications des élèves qui n'évoquaient pas explicitement l'invariant de parité n'étaient pas toujours très convaincantes. Attention à ne pas faire un raisonnement qui soit trop "avec les mains".

Exercice 3. Andréa, Baptiste et Camille jouent au foot à trois. Un des joueur est aux cages, les deux autres sont sur le terrain et essaient de marquer. Le joueur qui marque devient ensuite gardien pour le tir suivant.

Durant l'après-midi, Andréa a été sur le terrain 12 fois, Baptiste l'a été 21 fois et Camille a été aux cages 8 fois. Leur professeur sait qui a marqué le 6-ième but. Qui était-ce ?

Solution de l'exercice 3

Si on note n le nombre de parties jouées, alors au total il y a eu n fois un gardien. On utilise à présent les hypothèses données par l'énoncé. Si Andréa a été 12 fois sur le terrain, il a donc été $n - 12$ fois aux cages. Si Baptiste a été 21 fois sur le terrain, il a été $n-21$ fois aux cages. Ainsi $n-12+n-21+8 = n$, ce qui nous donne que $n = 25$. Cela veut également dire que Andréa a été aux cages 13 fois. Mais il est impossible d'être aux cages deux fois d'affilée. Ainsi, on sait que Andréa était aux cages au début, et l'a été exactement une fois sur deux. En particulier, il a été aux cages à la septième partie et donc Andréa a marqué le 6-ième but.

Commentaire des correcteurs

L'exercice a été largement réussi. Certaines preuves et rédaction sont particulièrement efficaces.

Exercice 4.

On choisit 5 diviseurs positifs de 10^{2020}. Montrer qu'il y en a deux dont le produit est un carré.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On commence par regarder la forme que peut prendre un éventuel diviseur de 10^{2020}. Les diviseurs de 10^{2020} sont de la forme $2^a 5^b$. Le produit de deux diviseurs est donc également un nombre de la forme $2^a 5^b$ et c'est un carré parfait si et seulement si a et b sont tous les deux pairs. On est donc ramené à montrer le résultat suivant : si on a 5 paires d'entiers (a_i, b_i) avec $1 \leqslant i \leqslant 5$ et les a_i et b_i tous les deux inférieurs ou égaux à 2020, alors on peut trouver deux indices j et k tels que $(a_i + a_j, b_i + b_j)$ est un couple de deux nombres entiers pairs. On s'empresse de regarder si ce résultat est vrai pour quelques paires d'entiers et on cherche désormais à démontrer ce résultat. On est amené à regarder la parité des entiers considérés. Il y a 4 possibilités pour un couple (a, b) : soit a et b sont pairs, soit a et b sont impairs, soit a est pair et b est pair, soit a est impair et b est pair. Ainsi par le principe des tiroirs, si on choisit 5 paires d'entiers (a_i, b_i) avec $1 \leqslant i \leqslant 5$, il y a deux couples (a_j, b_j) et (a_k, b_k) possédant la même caractéristique, c'est-à-dire tels que a_j et a_k soient de le même parité et b_j et b_k soient de même parité. Alors $a_j + a_k$ et $b_j + b_k$ sont tous les deux paires. Ainsi, en choisissant 5 diviseurs de 10^{2020}, on peut en trouver 2 tels que leur produit soit un carré.

<u>Commentaire des correcteurs</u>

Exercice globalement très bien réussi. Certains ont considéré que tout diviseur de 10^2020 était sous la forme 2^x, 5^y ou 10^z ce qui n'est pas vrai (par exemple 20 est un diviseur de 10^{2020} et n'a aucune des formes citées). Certains ont dit que si on avait deux diviseurs sous la forme $2^b 5^c$ et $2^d 5^f$ avec b et d de même parité, c et f de même parité alors leur produit est un carré, il fallait justifier cela en disant que deux nombres de parité différente ont une somme paire. Attention au verbe falloir : beaucoup ont dit que pour que le produit de $2^b 5^c$ et $2^d 5^f$ soit un carré il fallait avoir $b + d$ pair et $c + f$ pair, ce qui est vrai. Néanmoins ils ont utilisé après que si on a $b + d$ pair et $c + f$ pair alors le produit de $2^b 5^c$ et $2^d 5^f$ est un carré, ce qui n'est pas la même chose que ce qui était dit. Quand on affirme "pour A il faut avoir B", on affirme que A implique B, c'est-à-dire que si on a A alors on a B. Pour dire que B implique A, on doit dire "pour A il suffit d'avoir B". "Il faut que" et "il suffit que" ont des sens différents.

Exercice 5. Martin cherche à remplir chaque case d'une grille rectangulaire ayant 8 lignes et n colonnes avec l'une des quatre lettres P, O, F et M de sorte que pour toute paire de lignes distinctes, il existe au plus une colonne telle que ses intersections avec les deux lignes sont des cases ayant la même lettre. Quel est le plus grand entier n tel que cela est possible ?

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Dans ce problème, on cherche le plus grand entier satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus grand entier recherché est l'entier c. Pour montrer que c est bien le plus grand entier, on va d'une part montrer que si un entier n satisfait la propriété, alors $n \leqslant c$ et d'autre part on va montrer que l'on peut trouver un tableau possédant exactement c colonnes.
L'énoncé présente une hypothèse portant les lignes et les colonnes d'un tableau.
On commence par regarder les informations que l'on possède sur les lignes de ce tableau. Il y a 8 lignes donc il y a $\binom{8}{2} = 28$ paires de lignes.
On regarde ensuite les informations dont on dispose sur les colonnes du tableau. Puisque l'hypothèse de l'énoncé évoque les lettres identiques au sein d'une même colonne, nous allons compter combien de paires de lettres identiques appartiennent à une même colonne. On fixe donc une colonne du tableau et on regarde combien de paires de lettres indetiques on peut réaliser au minimum. Après plusieurs essais sur une colonne de taille 8, on conjecture qu'il y a toujours au moins 4 paires de lettres identiques au sein d'une même colonne. En effet, dans une colonne il y a 8 lettres donc une lettre apparaît au moins 2 fois.

— Si chaque lettre apparaît au plus 2 fois, alors chaque lettre apparaît exactement 2 fois puisqu'il y a 8 cases dans la colonne et 4 lettres possibles. On a donc 4 paires de lettres identiques dans la colonne.
— Si une lettre apparaît exactement 3 fois, disons la lettre P, alors on peut former 3 paires de lettres P. Parmi les 5 lettres restantes, on a au moins une lettre parmi les lettres O, F et M qui apparaît deux fois d'après le principe des tiroirs, ce qui nous fournit une quatrième paire de lettres identiques.
— Si une lettre apparaît au moins 4 fois dans la colonne, disons la lettre P, on peut former 4 paires de lettres P.

Ainsi, dans une colonne, on peut toujours trouver 4 paires de lettres identiques. Donc pour chaque colonne, il y a au moins 4 paires de lignes telles que les intersections avec la colonne ont la même lettre. Mais d'après l'hypothèse de l'énoncé, une paire de lignes ne peut être associée qu'à au plus une colonne telle que ses intersections avec les deux lignes sont deux cases possédant la même lettre. On déduit qu'il y a au plus $4 \times n$ paires de lignes. Donc $4n \leqslant 28$ et $n \leqslant 7$.

Réciproquement, il existe une configuration avec les 7 colonnes suivantes :

P	P	P	P	P	P	P
O	O	O	O	O	P	O
F	F	F	F	O	O	P
M	M	M	M	P	O	O
P	M	F	O	F	F	F
O	F	M	P	M	F	M
F	P	P	M	M	M	F
M	O	O	F	F	M	M

Le plus grand entier n de colonnes est donc $n = 7$.
<u>Commentaire des correcteurs</u>
L'exercice est globalement bien réussi, les élèves ont bien compris que la contrainte était que chaque colonne rajoutait 4 paires de lettres identiques, mais peu ont fait une preuve totalement rigoureuse de ce fait. Certains ont donné un ensemble de 7 colonnes et justifié le fait que 7 était optimal car il n'était pas possible de rajouter une colonne à ce qu'ils avaient faits. Mais cette justification n'est pas suffisante. En

effet, ce n'est pas parce que la construction ne peut être agrandie que pour autant sa taille est maximale : on peut imaginer qu'il existe une construction plus grande très différente de celle donnée.

Exercice 6. Dans 5 boites se trouvent respectivement $402, 403, 404, 405$ et 406 pierres. La seule opération autorisée est de prendre 4 pierres dans un tas ayant au moins 4 pierres et d'en mettre une dans chacun des autres tas. Quel est le plus grand nombre de pierre qu'il est possible d'avoir dans un seul tas ?

Solution de l'exercice 6 L'énoncé présente une suite d'opérations et décrit une certaine situation initiale. Une première idée à essayer dans ce cas est de chercher un invariant.
Une deuxième idée est de tester l'énoncé pour des valeurs plus petites, par exemple pour des tas de taille $0, 1, 2, 3$ et 4. Après plusieurs essais, on remarque que les tas ont toujours, à permutation près, les tailles $0, 1, 2, 3$ et 4. Après avoir testé sur des tas de taille $1, 2, 3, 4$ et 5, on s'aperçoit que les tas ont toujours des valeurs distinctes deux à deux modulo 5. On s'empresse de démontrer cette conjecture.
Enlever 4 pierres d'un tas revient, modulo 5, à en ajouter 1. Comme on en ajoute une dans chacun des autres tas, les valeurs des tas augmentent toutes de 1 modulo 5. Ainsi, si avant l'opération ces valeurs étaient distinctes deux à deux modulo 5, après l'opération elles resteront distinctes deux à deux modulo 5. On a donc déterminé notre invariant.
Ainsi la somme des tailles de 4 tas quelconques ne pourra jamais dépasser $0 + 1 + 2 + 3 = 6$ et donc un tas quelconque ne pourra jamais contenir plus que $2020 - 6 = 2014$ pierres.

Réciproquement, nous devons désormais démontrer que l'on peut toujours faire en sorte qu'un tas contienne 2014 pierres au bout d'un nombre fini d'opérations. Pour cela, il suffit de ne jamais toucher au tas contenant 404 pierres, et de faire l'opération sur les autres tas jusqu'à ce que ce ne soit plus possible de faire une seule opération. Ainsi les tas restants auront $0, 1, 2, 3$ pierres à la fin du procédé, donc il y aura bien $2020 - (0 + 1 + 2 + 3) = 2014$ pierres sur le même tas.
Commentaire des correcteurs
Un grand nombre d'élèves se contente de la construction de la borne sans montrer qu'elle est effectivement optimale. Dans de plus rares cas, certains élèves ne prouvent que la minimalité sans l'atteignabilité. La majorité des preuves d'optimalité se basent sur un travail modulo 5, mais certaines preuves plus originales s'en passent, avec un travail sur les dernières opérations (travail rarement parfaitement exécuté).

Exercice 7. Un mauvais sorcier a enfermé n mathématiciens. Il dispose de n couleurs. Le sorcier place sur la tête de chaque mathématicien un chapeau d'une des n couleurs ; deux chapeaux peuvent avoir la même couleur. Chaque mathématicien peut voir la couleur du chapeau de chacun de ses collègues mais pas la sienne. Les mathématiciens doivent alors tous en même en temps annoncer la couleur de leur chapeau. Si au moins un des mathématiciens devine correctement, tous les mathématiciens sont libres. Ils peuvent bien sûr se concerter sur une stratégie avant de connaître la couleur des chapeaux des autres mathématiciens.
Proposez une stratégie qui assure que les mathématiciens soient libérés.

Solution de l'exercice 7 Tout d'abord, nous allons coder les différentes informations. Par exemple, on numérote les couleurs de 1 à n et on numérote les mathématiciens de 1 à n également. On note $i_1, \dots i_n$ les couleurs des chapeaux des mathématiciens.
Puisqu'un mathématicien ne peut pas voir son propre chapeau mais uniquement les chapeaux des autres, il va devoir déclarer un nombre qui dépend des chapeaux qu'il observe. On peut par exemple chercher une expression qui va dépendre de façon symétrique de chacun des chapeaux.
Une information importante et qui dépend de façon symétrique de chacun des chapeaux est par exemple la somme des numéros de tous les chapeaux, à savoir $i_1 + i_2 + \dots i_n$. Cette somme admet un certain reste s modulo n. On a donc $i_l \equiv s - \sum_{j \neq l} i_j \mod n$. On doit donc s'assurer qu'il existe un indice l tel que le mathématicien l déclare le numéro $s - \sum_{j \neq l} i_j \mod n$. On reconnaît dans $\sum_{j \neq l} i_j$ la somme des numéros des chapeaux vus par le mathématicien l.
Ainsi, si chaque mathématicien de numéro k déclare le nombre entre 1 et n congru à $k - \sum_{j \neq k} i_j \mod n$, alors le mathématicien dont le numéro est congru à s modulo n déclarera le numéro $s - \sum_{j \neq s} i_j = i_s \mod n$ qui est la couleur de son chapeau. Tous les mathématiciens sont donc libérés !

Exercice 8. Un coloriage des entiers $\{1, 2, \cdots, 2020\}$ en bleu et rouge est dit *agréable* s'il n'existe pas deux entiers distincts dans $\{1, 2, \cdots, 2020\}$ de même couleur dont la somme est une puissance de 2. Combien de tels coloriage existent-ils ?

Solution de l'exercice 8 Une première idée est de tester l'énoncé pour des valeurs plus petites, par exemple pour un coloriage des entiers de 1 à 7.
Colorions dans l'ordre les nombres : pour colorier 1, on n'a pas de contrainte apparente, idem pour colorier 2. Par contre comme $3 + 1 = 4$, la couleur de 3 est imposée. Pour colorier 4, il n'y a pas de contrainte apparente car $4+3 = 7$, $4+2 = 6$ et $4+1 = 5$ ne sont pas des puissances de deux. Par contre comme $5 + 3 = 6 + 2 = 7 + 1 = 8$, la couleur de $5, 6$ et 7 est imposée. En testant tous les coloriages possibles, on voit que peu importe les couleurs choisies pour colorier 1, 2 et 4, le coloriage obtenu est agréable. On peut donc supposer qu'un coloriage agréable est fixé une fois la couleur des puissances de 2 est choisie et que tout coloriage des puissances de 2 peut être prolonger en un coloriage agréable.
Nous allons montrer que pour tout coloriage des puissances de 2 entre 1 et 2020, il existe une unique manière de colorier les autres nombres de sorte à obtenir un coloriage agréable.

Pour cela nous allons procéder par récurrence. Montrons que si on colorie les puissances de 2 de 1 à N, alors il existe une unique manière agréable de colorier les autres entiers de 1 à N.

Le résultat est clair pour $N = 1$.
Soit N tel que le résultat soit vrai pour $N - 1$. On colorie les puissances de 2 de 1 à N. Par hypothèse de récurrence, il existe une unique manière agréable de colorier les autres entiers de 1 à $N - 1$.
Si $N = 2^k$ pour un certain entier k, alors N est déjà colorié et le coloriage est agréable : en effet si $1 \leqslant \ell < 2^k$, alors $2^k + \ell$ n'est pas une puissance de 2 car $2^k < 2^k + \ell < 2^{k+1}$. Ainsi dans ce cas il y a une unique manière de compléter le coloriage.
Si N n'est pas une puissance de 2, alors $N = 2^k + n$ avec $1 \leqslant n < 2^k$ et k un entier. Alors N ne peut pas être colorié de la même couleur que $2^k - n$ car $N + 2^k - n = 2^{k+1}$. On colorie donc N de l'autre couleur, et c'est bien l'unique manière de compléter le coloriage de manière agréable. Le coloriage obtenu est agréable : en effet soit t entier tel que $1 \leqslant t < N$ et $t + N$ est une puissance de 2, on a $2^k < N \leqslant t + N < 2N = 2^{k+1} + 2n < 2^{k+1} + 2^{k+1} = 2^{k+2}$, donc $t + N = 2^{k+1}$. On a donc $t = 2^{k+1} - 2^k - n = 2^k - n$. Comme on a colorié N et $2^k - n$ de deux couleurs différentes, le coloriage est agréable.

Il y a 11 puissances de 2 entre 1 et 2020 qui sont $1 = 2^0, 2 = 2^2, \cdots, 1024 = 2^{10}$, et il y a 2^{11} manières de les colorier en bleu et rouge. Ainsi il y a 2^{11} coloriages agréables.
Commentaire des correcteurs
La majorité des élèves a vu l'importance des puissances de 2. Certains ont proposé alternativement de regarder les éléments congrus à 2^n modulo 2^{n+1} ce qui fonctionnait aussi. Nombreux sont ceux qui ont prouvé qu'il y avait au plus 2048 coloriages, mais très peu ont vérifié que les coloriages ainsi produit convenaient, alors que c'était pourtant une partie importante de l'exercice. Il faut penser à détailler les arguments utilisés : par exemple faire une récurrence est une bonne idée quand on veut généraliser quelque chose.

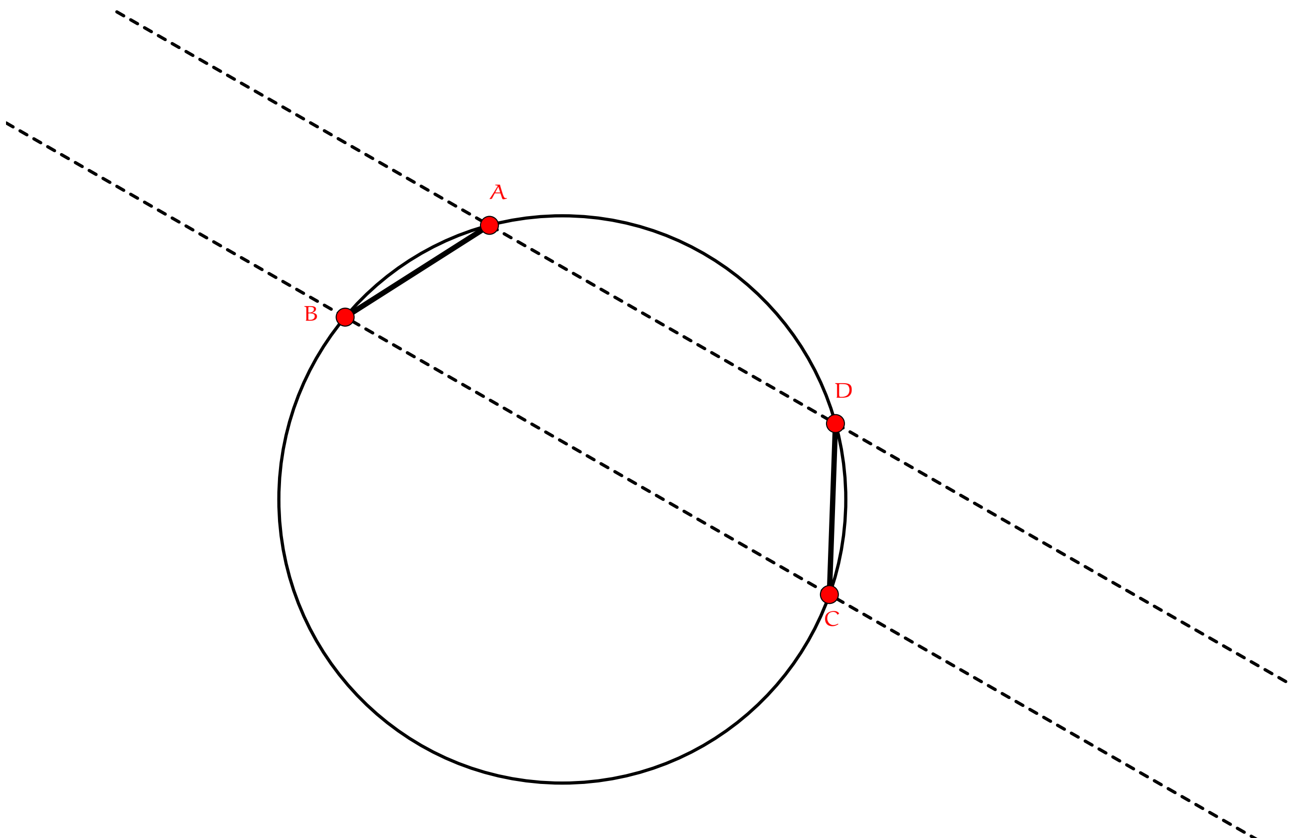
Exercice 9. Soit n un entier. On dispose de n couleurs, et chaque point d'un cercle est colorié de l'une de ces couleurs. Montrer qu'il existe deux droites parallèles qui intersectent le cercle en 4 points distincts de même couleur

Solution de l'exercice 9

L'énoncé nous demande de démontrer une existence, on peut essayer de montrer cette existence à l'aide du principe des tiroirs. Gardant cette information en tête, on essaye de traduire le résultat demandé.

Considérons deux droites parallèles coupant le cercle en 4 points distincts. Ces 4 points délimitent un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles et les médiatrices de ces deux segments sont confondues : en effet, elles sont perpendiculaires à deux côtés parallèles donc elles sont parallèles et elles passent par le centre du cercle donc elles sont bien confondues. Le quadrilatère est donc un trapèze isocèle. il possède donc deux côtés égaux et deux diagonales de même longueur.

Réciproquement, si 4 points A, B, C et D sont dans cet ordre sur un cercle de centre O et délimitent un quadrilatère tels que $AB = CD$, alors la médiatrice du segment $[BC]$ est l'axe de la symétrie envoyant B sur C. Cet axe de symétrie contient O donc la symétrie conserve le cercle. Puisque $AB = CD$, cette symétrie envoye A sur D et donc la médiatrice du segment $[BC]$ est aussi celle du segment $[AD]$ et le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze isocèle.

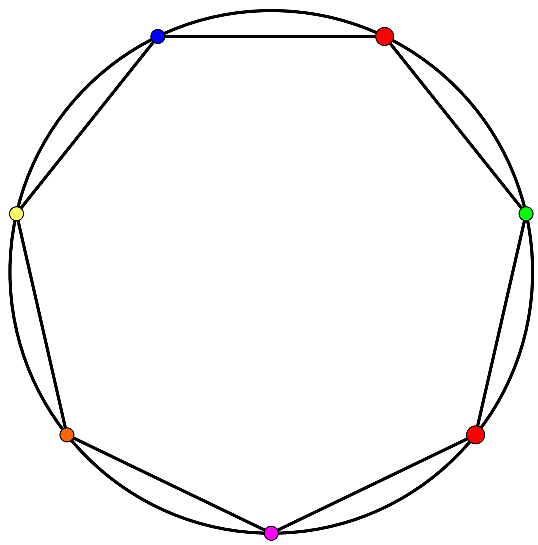


On suppose désormais que $AC = BD$. Alors les triangles AOC et DOB sont isométriques car l'un est obtenu en appliquant une rotation sur l'autre triangle. On déduit que $BC = AD$ et que la quadrilatère $ABCD$ est un trapèze isocèle à nouveau.

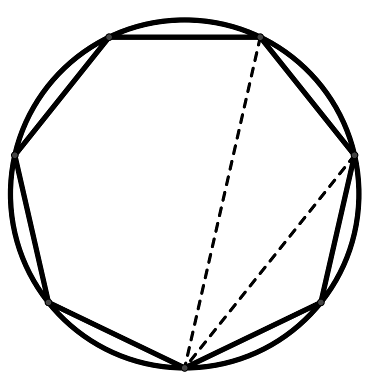
On cherche donc désormais à montrer qu'il existe deux paires de points (A, B) et (C, D), tous de même couleur, telles que $AB = CD$. D'après la discussion précédente, ces points seraient alors les sommets d'un trapèze isocèle.

Pour un tel exercice, dit de géométrie combinatoire, il est bon de penser toujours à des objets réguliers, par exemple à des cercles ou des polygones réguliers. Ici, penser à de tels objets est pertinent puisque les polygones réguliers sont inscriptibles dans un cercle.

Pour combiner cette idée avec celle du principe des tiroirs, nous allons considérer des $n + 1$-gones réguliers. Un $(n + 1)$-gone régulier sur le cercle, d'après le principe des tiroirs, possède deux sommets de même couleur. On a donc obtenu une paire de sommets de même couleur.



On appellera couleur de la paire la couleur commune des deux sommets et distance de la paire la distance entre ses deux sommets. On va créer plus de telles paires. N'oublions pas que nous aimerions que la distance des différentes paires que nous créons soit la même. Or, dans un $n + 1$-gone régulier, il y a $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ distances distinctes possibles entre deux sommets quelconques. Pour obtenir deux paires de même distance, il faut donc $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1$ polygones réguliers.



N'oublions pas que nous désirons également que les couleurs des paires soient identiques. Ainsi, on prend $n \cdot \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1$ $(n+1)$-gones réguliers disjoints inscrits dans le cercle. On obtient alors $n \cdot \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1$ paires de sommets tous distincts et les sommets d'une même paire sont de même couleur et leur distance appartient à un ensemble de taille $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. D'après le principe des tiroirs, il y a donc parmi ces paires $n+1$ paires de sommets de même distance. Comme il y a n couleurs, à nouveau d'après le principe des tiroirs, parmi ces $n+1$ paires de même distance, il y en a au moins 2 de même couleur. On a donc obtenu deux paires de même distance et de même couleur, on a donc 4 points A, B, C et D de même couleur tels que $AB = CD$. Ainsi, on a bien deux droites parallèles coupant le cercle en 4 points de même couleur.

Commentaire des correcteurs

L'exercice, manifestement trop difficile, n'a été résolu par personne. Un seul élève a pensé à utiliser un $n+1$-gone régulier pour appliquer le principe des tiroirs, mais il fallait poursuivre et compter correctement les différentes distances entre deux sommets quelconques d'un $n+1$-gone puis penser à considérer plusieurs $n+1$-gones. Quelques élèves ont pensé à ramener la condition de parallélisme à une condition sur les longueurs d'arc.

Exercices Seniors

Exercice 10.

On choisit 5 diviseurs de 10^{2020}. Montrer qu'il y en a deux dont le produit est un carré.

Solution de l'exercice 10 On commence par regarder la forme que peut prendre un éventuel diviseur de 10^{2020}. Les diviseurs de 10^{2020} sont de la forme $2^a 5^b$. Le produit de deux diviseurs est donc également un nombre de la forme $2^a 5^b$ et c'est un carré parfait si et seulement si a et b sont tous les deux pairs. On est donc ramené à montrer le résultat suivant : si on a 5 paires d'entiers (a_i, b_i) avec $1 \leqslant i \leqslant 5$ et les a_i et b_i tous les deux inférieurs ou égaux à 2020, alors on peut trouver deux indices j et k tels que $(a_i + a_j, b_i + b_j)$ est un couple de deux nombres entiers pairs. On s'empresse de regarder si ce résultat est vrai pour quelques paires d'entiers et on cherche désormais à démontrer ce résultat. On est amené à regarder la parité des entiers considérés. Il y a 4 possibilités pour un couple (a, b) : soit a et b sont pairs, soit a et b sont impairs, soit a est pair et b est pair, soit a est impair et b est pair. Ainsi par le principe des tiroirs, si on choisit 5 paires d'entiers (a_i, b_i) avec $1 \leqslant i \leqslant 5$, il y a deux couples (a_j, b_j) et (a_k, b_k) possédant la même caractéristique, c'est-à-dire tels que a_j et a_k soient de le même parité et b_j et b_k soient de même parité. Alors $a_j + a_k$ et $b_j + b_k$ sont tous les deux paires. Ainsi, en choisissant 5 diviseurs de 10^{2020}, on peut en trouver 2 tels que leur produit soit un carré.

Commentaire des correcteurs

L'exercice est très bien réussi. Une erreur récurrente est de mal identifier les diviseurs de 10^{2020}.

Exercice 11. Lors d'une fête, 2019 personnes s'assoient autour d'une table ronde, en se répartissant de façon régulière. Après s'être assises, elles constatent qu'un carton indiquant un nom est posé à chacune des places et que personne n'est assis à la place où figure son nom. Montrer qu'on peut tourner la table de telle sorte que deux personnes se retrouvent assises en face de leur nom.

Solution de l'exercice 11 On commence par tester l'énoncé sur des valeurs plus petites, par exemple pour une fête de 5 personnes.
Ensuite, on essaye de coder l'information. On appelle rotation une configuration obtenue après avoir tourné la table depuis sa position d'origine. À une rotation r, on associe $n(r)$ le nombre de personnes assises face à leur nom après la rotation.
Comme pour toute personne il existe une unique rotation qui la rend assise face à son nom, $\sum_{r=0}^{2018} n(r) = 2019$. Or il y a 2019 rotations et la rotation nulle vérifie $n(r) = 0$. Donc comme 2018 entiers positifs ont pour somme 2019, l'un d'eux vaut donc au moins 2 par principe des tiroirs, ce qui signifie bien qu'une rotation amène deux noms en face des bonnes personnes.
Commentaire des correcteurs
Le problème est très bien réussi. Lorsque l'on applique le principe des tiroirs, il n'est pas nécessaire de préciser qui sont les chaussettes et qui sont les tiroirs lorsque la situation est suffisamment claire.

Exercice 12. Martin cherche à remplir chaque case d'une grille rectangulaire ayant 8 lignes et n colonnes avec l'une des quatre lettres P, O, F et M de sorte que pour toute paire de lignes distinctes, il existe au plus une colonne telle que ses intersections avec les deux lignes sont des cases ayant la même lettre. Quel est le plus grand entier n tel que cela est possible ?

Solution de l'exercice 12 Dans ce problème, on cherche le plus grand entier satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus grand entier recherché est l'entier c. Pour montrer que c est bien le plus grand entier, on va d'une part montrer que si un entier n satisfait la propriété, alors $n \leqslant c$ et d'autre part on va montrer que l'on peut trouver un tableau possédant exactement c colonnes.
L'énoncé présente une hypothèse portant les lignes et les colonnes d'un tableau.
On commence par regarder les informations que l'on possède sur les lignes de ce tableau. Il y a 8 lignes donc il y a $\binom{8}{2} = 28$ paires de lignes.
On regarde ensuite les informations dont on dispose sur les colonnes du tableau. Puisque l'hypothèse de l'énoncé évoque les lettres identiques au sein d'une même colonne, nous allons compter combien de paires de lettres identiques appartiennent à une même colonne. On fixe donc une colonne du tableau et on regarde combien de paires de lettres indetiques on peut réaliser au minimum. Après plusieurs essais sur une colonne de taille 8, on conjecture qu'il y a toujours au moins 4 paires de lettres identiques au sein d'une même colonne. En effet, dans une colonne il y a 8 lettres donc une lettre apparaît au moins 2 fois.

— Si chaque lettre apparaît au plus 2 fois, alors chaque lettre apparaît exactement 2 fois puisqu'il y a 8 cases dans la colonne et 4 lettres possibles. On a donc 4 paires de lettres identiques dans la colonne.
— Si une lettre apparaît exactement 3 fois, disons la lettre P, alors on peut former 3 paires de lettres P. Parmi les 5 lettres restantes, on a au moins une lettre parmi les lettres O, F et M qui apparaît deux fois d'après le principe des tiroirs, ce qui nous fournit une quatrième paire de lettres identiques.
— Si une lettre apparaît au moins 4 fois dans la colonne, disons la lettre P, on peut former 4 paires de lettres P.

Ainsi, dans une colonne, on peut toujours trouver 4 paires de lettres identiques. Donc pour chaque colonne, il y a au moins 4 paires de lignes telles que les intersections avec la colonne ont la même lettre. Mais d'après l'hypothèse de l'énoncé, une paire de lignes ne peut être associée qu'à au plus une colonne telle que ses intersections avec les deux lignes sont deux cases possédant la même lettre. On déduit qu'il y a au plus $4 \times n$ paires de lignes. Donc $4n \leqslant 28$ et $n \leqslant 7$.

Réciproquement, il existe une configuration avec les 7 colonnes suivantes :

P	P	P	P	P	P	P
O	O	O	O	O	P	O
F	F	F	F	O	O	P
M	M	M	M	P	O	O
P	M	F	O	F	F	F
O	F	M	P	M	F	M
F	P	P	M	M	M	F
M	O	O	F	F	M	M

Le plus grand entier n de colonnes est donc $n = 7$.
Commentaire des correcteurs
De nombreux élèves ont réussi à trouver la réponse $n = 7$ et ont exhibé un exemple. La plupart proposent un argument correct pour montrer que c'est optimal, mais parfois ce raisonnement est rédigé de façon peu claire.

Exercice 13. Soit $N > 1$. Alice et Bob jouent au jeu suivant. $2N$ cartes numérotées de 1 à $2N$ sont mélangées puis disposées dans une ligne, de manière à ce que les faces numérotées soient visibles. Chacun à leur tour, Alice et Bob choisissent une carte, soit celle tout à droite soit celle soit à gauche de la ligne, et la garde pour eux, jusqu'à ce que toutes les cartes aient été prises. Alice commence. A la fin du jeu, chaque joueur calcule la somme des numéros des cartes qu'il a prises. Le joueur ayant la plus grande somme gagne. Un joueur dispose-t-il d'une façon de ne pas perdre ?

Solution de l'exercice 13 On commence par tester le jeu pour des petites valeurs, par exemple pour un jeu composé de $2 \cdot 3$ cartes. Après plusieurs essais, on s'aperçoit par exemple que la stratégie qui consiste à prendre toujours la plus grande carte parmi la carte située la plus à gauche et la carte située la plus à droite ne fonctionne pas toujours, pour aucun des deux joueurs.
Testons le cas $N = 2$. Chacun des deux joueurs ne pourra prendre que deux cartes. Dans ce type de problème, une première idée est d'essayer de chercher une stratégie qui permet à un joueur de jouer comme il le souhaite, quelque soit les coups de l'adversaire. Regardons donc les cartes qu'Alice et Bob peuvent s'assurer d'obtenir. On note $XYZW$ les cartes étalées sur la rangée dans cet ordre. Supposons qu'Alice prenne la carte X. Si Bob choisit la carte Y, Alice a le choix entre les cartes Z et W. Si Bob choisit la carte W, Alice a le choix entre les cartes Z et Y. Ainsi, en choisissant la carte X, Alice s'assure de pouvoir prendre la carte Z si elle le souhaite. En revanche, avant le premier coup d'Alice, Bob ne peut pas garantir de prendre une des quatre cartes.
On désire désormais généraliser ce processus. On regarde alors le cas $N = 3$. Les cartes sont $XYZWUV$. On s'aperçoit alors que si Alice prend la carte X au premier tour, elle s'assure de pouvoir prendre les cartes Z et U si elle le veut. Ces remarques sont suffisantes pour penser qu'Alice dispose d'une stratégie gagnante en récupérant les cartes X, Z, U si $X + Z + U > Y + W + V$ et en récupérant les cartes Y, W, V dans le cas contraire. On prouve à présent que cette stratégie fonctionne dans le cas général.
Alice colorie une carte sur deux en noir (la carte toute à droite est blanche, celle toute à gauche est noire). Elle calcule la somme des numéros des cartes blanches et celle de numéros des cartes noires.

Si la somme des blanches est plus grande, elle choisit la carte blanche tout à droite. Bob prendra obligatoirement une carte noire ensuite. A chaque tour Alice peut choisir entre une carte blanche ou noire et en prenant la blanche, elle ne laisse pas la choix à Bob, qui prendra forcément une carte noire.

Ainsi à la fin Alice aura toutes les cartes blanches et Bob toutes les cartes noires. Donc elle aura un score supérieur ou égal à celui de Bob. Elle procède de même si la somme des cartes noires est plus grande.
Commentaire des correcteurs
La majorité des élèves a su trouver la bonne stratégie. Parmi ceux qui ne l'ont pas trouvée, beaucoup ont proposé une stratégie "au tour par tour", sans justifier qu'elle permettait de ne pas perdre. Une telle approche ne peut pas permettre de résoudre l'exercice.

Exercice 14. On considère une grille de taille 2019×2019. Sur cette grille sont posés des cailloux. Une configuration est dite belle s'il n'existe pas de parallélogramme formé par quatre cailloux $ABCD$, tels que A,B,C, et D ne soient pas tous alignés.
Quel est le plus grand nombre de cailloux qu'il est possible de mettre dans une grille ?

Solution de l'exercice 14 Dans ce problème, on cherche le plus grand entier satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus grand entier recherché est l'entier c. Pour montrer que c est bien le plus grand entier, on va d'une part montrer que si un entier n satisfait la propriété, alors $n \leqslant c$ et d'autre part on va montrer que l'on peut trouver une grille possédant exactement c cailloux satisfaisant la propriété.
On s'empresse de tester l'énoncé pour des valeurs plus petites, par exemple pour une grille de taille 3×3, 4×4 ou même 5×5, afin de deviner la valeur. On trouve dans ces petits cas que les plus grands entiers sont respectivement $5, 7$ et 9. On peut conjecturer que la valeur recherchée sera donc $2 \times 2019 - 1 = 4037$.
En testant ces petites valeurs, on a pu remarquer que la présence de cailloux sur une colonne forçait que certains emplacements soient vides. Nous allons donc essayer de formaliser ce raisonnement.

On considère les paires de cailloux qui sont sur la même colonne. S'il y a deux telles paires dont les cailloux sont à même distance sur des colonnes différentes alors on obtient un parallélogramme, ce que l'on veut éviter.

Soit n_i le nombre de cailloux dans la i-ième colonne. Sur la colonne i il y a par conséquent au moins $n_i - 1$ paires à distances distinctes. Puisque pour deux colonnes fixées, la distance entre deux quelconques cailloux de la première colonne doit être différente de la distance entre deux quelconques cailloux de la deuxième colonne, toutes les distances entre deux paires de cailloux appartenant à la même colonne doivent être distinctes. Cela fait en tout $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_{2019} - 1) = n - 2019$ distances distinctes avec n le nombre total de cailloux. Or il y a au plus 2018 distances possibles, puisqu'il y a 2019 emplacements pour un cailloux dans une colonne. Ceci montre que $n \leqslant 2018 + 2019 = 4037$.
Réciproquement, si on remplit chaque case de la première ligne par un caillou et chaque case de la première colonne par un caillou et on laisse les autres cases vides, on a alors placé $2 \times 2019 - 1 = 4037$ cailloux sans créer de parallélogrammes.
Le plus grand entier recherché est donc 4037.
Commentaire des correcteurs
Une grande partie des élèves a eu la bonne idée pour résoudre l'exercice, mais beaucoup ont eu du mal à formaliser le résultat correctement. Si on tente de résoudre cet exercice par récurrence, il faut expliciter les grilles que l'on manipule et faire attention au fait qu'une sous-grille d'une grille "maximale" n'est pas forcément maximale.

Exercice 15. Un lycée comporte un nombre impair de classes, et, dans chaque classe, un nombre impair d'élèves. Un élève est choisi dans chaque classe pour faire parti du comité des élèves. Si le nombre de classes avec le plus de garçons que de filles est impair, montrer que le nombre de façons de former un comité des élèves contenant un nombre impair de garçons excède le nombre de façons de former un comité d'élèves contenant un nombre impair de filles.

Solution de l'exercice 15 En l'absence d'idées face au problème, on peut essayer de démontrer le résultat par récurrence. Pour regarder si cela pourrait fonctionner, on peut regarder ce qu'il advient du résultat si l'on passe d'un lycée avec 3 élèves à un lycée avec 4 élèves. On vérifie également que les hypothèses de l'énoncé sont adaptées à une récurrence. On s'aperçoit que nous allons devoir distinguer plusieurs cas, selon la répartition garçon/filles dans les différentes classes. On démarre donc la récurrence.
Nous allons montrer le résultat par récurrence forte sur le nombre d'élèves au total. S'il n'y a aucun élève, alors le résultat est vrai, de même s'il n'y a qu'un élève dans le lycée.

Supposons qu'il y ait n élèves en tout dans des classes satisfaisant l'énoncé. Supposons que l'énoncé de l'exercice est vrai dès lors qu'il y a strictement moins que n élèves. Il y a deux cas à étudier :

- S'il n'y a de classe avec une fille et un garçon, alors il y a un nombre impair de classe avec que des garçons et les autres classes n'ont que des filles, donc le comité aura nécessairement un nombre impair de garçons, l'énoncé est vérifié.
- S'il existe une classe avec une fille et un garçon, appelons-les respectivement Alice et Bob. Si on enlève Alice et Bob de la classe alors il y a plus de manières de choisir le comité avec un nombre impair de garçons. Si on considère uniquement les comités avec soit Alice soit Bob, alors on a autant de comité avec un nombre impair de garçons qu'avec un nombre impair de filles : en effet, échanger Alice et Bob change la parité du nombre de garçons et de filles. Ainsi l'énoncé est vérifié.

Par récurrence forte, l'énoncé est vérifié quelque soit le nombre total d'élèves.

Une solution un peu plus astucieuse consiste à procéder différemment : soit n le nombre de classes, et soient f_i et g_i les nombres de filles et garçons dans la classe i pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors la quantité suivante, lorsqu'on la développ,e compte le nombre de façons de faire un comité avec un nombre impair de garçons moins celui de faire un comité avec un nombre impair de filles :

$$\prod_{i=1}^{n}(g_i - f_i)$$

Mais ce produit est positif s'il y a un nombre impair de classes avec plus de garçons que de filles, ce qui donne bien le résultat voulu.
Commentaire des correcteurs
Les élèves ont pour la plupart procédé par récurrence sur le nombre de classes, en utilisant l'inégalité de réordonnement. La plupart ont procédé de manière correcte, mais certains ont écrit des inégalités strictes sans justifier pourquoi le cas d'égalité ne se présente pas (qui demande de citer une des hypothèses de l'énoncé : le nombre impair d'élèves par classe).

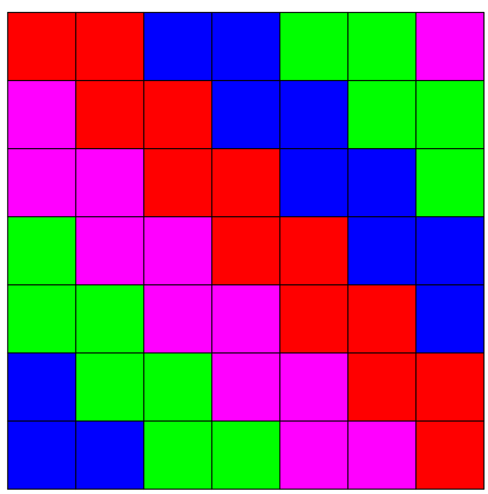
Exercice 16. On considère une grille 2019×2019. On note $C_{i,j}$ la case sur la i-ième colonne et la j-ième ligne pour $1 \leqslant i, j \leqslant 2019$. Un coloriage de la grille est *formidable* s'il n'existe pas $1 \leqslant i < \ell \leqslant 2019$ et $1 \leqslant j < k \leqslant 2019$ tels que les cases $C_{i,j}$, $C_{i,k}$ et $C_{\ell,j}$ soient de la même couleur. Quel est le plus petit entier N tel qu'il existe un coloriage formidable avec N couleurs ?

<u>*Solution de l'exercice 16*</u> Dans ce problème, on cherche le plus petit entier satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus petit entier recherché est l'entier c. Pour montrer que c est bien le plus petit entier recherché, on va d'une part montrer que si un entier n satisfait la propriété, alors $n \geqslant c$ et d'autre part on va montrer que l'on peut trouver un coloriage avec exactement c couleurs satisfaisant la propriété.
On s'empresse de tester l'énoncé sur des plus petites valeurs, par exemple pour des grilles de taille 3×3, 4×4 ou même 5×5, afin de deviner la valeur minimale dans le cas général, ainsi qu'une éventuelle construction. On s'aperçoit que pour une grille 3×3, on a besoin d'au moins 2 couleurs pour une coloriage formidable. Pour une grille 5×5, on remarque que l'on a besoin de 3 couleurs au moins. On conjecture donc que pour N impair, on a besoin d'au moins $\frac{N+1}{2}$.
La difficulté de l'exercice repose dans le fait qu'il faut d'abord essayer de deviner la valeur minimale avant de faire la preuve. En l'absence d'idée d'une preuve directe qu'il faut bien au moins $\frac{N+1}{2}$ couleurs, on peut essayer de montrer par l'absurde qu'un coloriage possédant $\frac{N-1}{2}$ ne sera pas formidable.
Pour cela, on remarque que la donnée de deux cases $C_{i,j}$ $C_{l,j}$ (avec $i < l$) de couleur rouge sur une colonne j empêche les cases de ligne i et sur une colonne $k \geqslant j$ d'être de la couleur rouges. On peut dire que ces deux cases génèrent une interdiction sur la ligne i. On peut essayer de compter ces interdictions. Ce comptage dépend du nombre de couleurs que l'on utilise, ce qui nous encourage bien à résonner par l'absurde pour montrer qu'un coloriage avec $\frac{N-1}{2}$ couleurs générera trop d'interdictions.
Où chercher les interdictions ? On peut commencer par procéder manuellement : on regarde le nombre minimal d'interdictions générées par la colonne 1, puis les interdictions générées par la ligne 2 etc... Cette opération manuelle s'effectue à nouveau sur des petits cas, comme une grille 5×5 ou 7×7. On s'aperçoit au terme de ces opérations sur des petits cas que la contradiction s'obtient en regardant la colonne N, sur laquelle se trouvent toujours trop d'interdictions. Nous allons donc formaliser ce raisonnement en regardant le nombre d'interdictions.

On suppose donc que l'on dispose d'un coloriage formidable de la grille possédant 1009 couleurs (quitte à avoir des couleurs qui ne sont pas utilisées pour le coloriage en question).
Dans la suite, on dira que la paire $(C_{i,j}, C_{l,j})$ génère une interdiction pour la case $C_{i,k}$ pour la couleur c si les cases $C_{i,j}$ et $C_{l,j}$ sont de la couleur c, ce qui empêche la case $C_{i,k}$ d'être de la couleur c par hypothèse.
Soit $j \leqslant 2018$ une colonne fixée et soit k_j le nombre de couleurs apparaissant sur au moins deux cases de la colonnes j. Pour une couleur de numéro c, on note n_c le nombre de cases de la colonne j coloriées avec la couleur c. Quitte à renuméroter les couleurs, on peut supposer que ce sont les couleurs $1, \ldots, k_j$ qui apparaissent au moins 2 fois et que les couleurs $k_{j+1}, \ldots, 1009$ apparaissent au plus une fois dans la colonne.
Etant donnée une couleur $c \leqslant k_j$, il y a au moins $n_c - 1$ paires de cases de la couleur c dans la colonne j. En effet, la case de la couleur c située la plus basse dans la colonne forme une paire avec chacune des $n_c - 1$ autres cases de la colonne. Chacune de ces paires génère une interdiction pour l'une des cases de la colonne 2019 : la paire de cases $(C_{i,j}, C_{l,j})$ $(i < l)$ génère une interdiction pour la case $C_{i,2019}$. Ainsi, les cases de la colonne j génère $\sum_{c=1}^{k_j}(n_c - 1)$ interdictions dans la dernière colonne. Or, puisque les couleurs $k_{j+1}, \ldots, 1009$ occupent au plus une case dans la colonne j, on a au moins

$$\sum_{c=1}^{k_j}(n_c - 1) = \sum_{c=1}^{k_j} n_c - k_j \geqslant 2019 - (1009 - k_j) - k_j = 1010$$

interdictions générées dans la colonne 2019.
Ainsi, chaque colonne de numéro $k \leqslant 2018$ génère au moins 1010 interdictions pour les cases de la colonne 2019, ce qui donne au total au moins $2018 \cdot 1010$ interdictions pour la colonne 2019.
A présent, on note que si la case de ligne i de la colonne 2019 reçoit 2 interdictions pour la même couleur c, cela signifie qu'il existe des cases $C_{i,j}, C_{l,j}, C_{i,j'}, C_{l',j'}$ avec $j < j'$, toutes de couleurs c, dont les paires $(C_{i,j}, C_{l,j}), (C_{i,j'}, C_{l',j'})$ génèrent la même interdiction pour la case $C_{i,2019}$ pour la couleur c. Mais le fait que les cases $C_{i,j}, C_{l,j}, C_{i,j'}$ est interdit par hypothèses. Ainsi, si une case possède m interdictions, ces interdictions concernent m couleurs différentes.
Enfin, ces interdictions ne peuvent pas concerner la case $C_{2019,2019}$. Ainsi, d'après le principe des tiroirs, puisqu'il y a $2018 \cdot 1010$ interdictions sur la colonne 2019 au moins, il y a une case parmi les cases $C_{1,2019}, \ldots, C_{2018,2019}$ qui possède au moins 1010 interdictions, elle est donc interdite pour au moins 1010 couleurs différentes, ce qui est absurde puisque l'on ne peut utiliser que 1009 couleurs différentes.
En conclusion, un coloriage formidable possède au moins 1010 couleurs différentes.
Réciproquement, si l'on dispose de 1010 couleurs, on peut construire un coloriage formidable, en s'inspirant de la configuration suivante pour $N = 7$.



Commentaire des correcteurs
Très peu d'élèves ont rendu une copie pour cet exercice. Quelques élèves ayant traité l'exercice ont mal compris l'énoncé et ont donné des explications peu claires. La construction a été assez largement trouvée parmi les élèves qui ont cherché l'exercice.

Exercice 17.

Un super-domino est un pavé droit dans une grille en trois dimensions de l'une des trois formes suivantes : $1 \times 1 \times 2$, $1 \times 2 \times 1$ et $2 \times 1 \times 1$. Quels sont les entiers $a, b, c > 1$ tels qu'il est possible de paver un pavé droit de dimensions $a \times b \times c$ dans un grille en trois dimensions avec des super-dominos de sorte qu'il y ait autant de super-dominos de chacun des 3 types ?

Solution de l'exercice 17 Dans ce problème, on cherche tous les entiers a, b, c satisfaisant certaines propriétés. Nous allons donc établir que si a, b et c satisfont la propriété alors a, b et c sont d'une certaine forme, et d'autre part montrer que si a, b et c sont de la forme trouvée, alors ils satisfont bien la propriété.

On peut également noter qu'il s'agit d'un problème de pavage, nous pouvons donc nous attendre à devoir utiliser un coloriage adroit du pavé droit. Si l'on n'a à priori pas d'idée sur la forme des entiers a, b et c, on peut commencer par effectuer quelques remarques.

Si on parvient à paver un pavé droit $a \times b \times c$ avec N super-dominos de chacun des trois types, alors nécessairement il y aura $2N + 2N + 2N = abc$ cases pavées, donc 6 divise abc. Ainsi une coordonnée est paire. Supposons donc sans perte de généralité que a est pair.

Pour simplifier, on supposera que le pavé est composé de abc cases de coordonnées (i, j, k), où i est l'abscisse, j l'ordonnée de la case et k la profondeur.

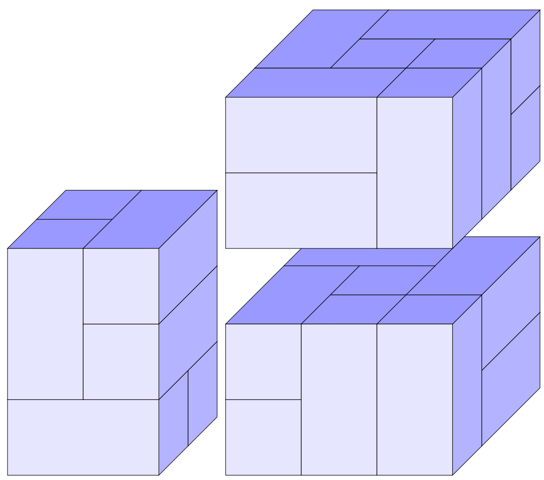
On cherche désormais un coloriage de notre pavé. Tout d'abord, les objets manipulés sont des dominos, composés de 2 cubes ; On va donc chercher un coloriage à 2 couleurs, du type damier. Regardons les caractéristiques d'un éventuel coloriage. On peut commencer par se concentrer sur une face, par exemple sur les cases de profondeur 1. Un domino $1 \times 1 \times 2$ occupe au maximum une case sur cette face tandis que les deux autres types de dominos occupent 0 ou 2 cases de cette face. On peut donc essayer d'adapter notre coloriage à cette remarque en appliquant le même coloriage à chacune des tranches (par tranche, on entend ici l'ensemble des cases possédant la même profondeur), c'est-à-dire un coloriage où la couleur d'une case (i, j, k) dépend de i et de j mais pas de k. L'avantage sera que les deux cubes d'un quelconque domino $1\times1\times2$ seront de la même couleur. De ce constat, on peut chercher à faire en sorte que les 2 cubes des dominos $1 \times 2 \times 1$ et $2 \times 1 \times 1$ soient de couleur différentes. Ceci nous fait penser à un coloriage en damier, que l'on applique uniformément à chacune des tranches. Formalisons donc ce coloriage et voyons l'information qu'il nous apporte.

On colorie en blanc les cases (i, j, k) telles que $i + j$ est paire, et en noir les autres. Ainsi, les cubes d'un super-domino $1 \times 1 \times 2$ sont de la même couleur, noir ou blanc, tandis qu'un super-domino $1 \times 2 \times 1$ contient exactement un cube blanc et un cube noir, de même pour un super-domino $2 \times 1 \times 1$. On déduit que lorsque l'on pave notre pavé droit avec le même nombre de super-domino de chaque type, le nombre total de cases blanches recouvertes est pair : en effet un super-domino $1 \times 1 \times 2$ en recouvre 2 ou 0, et un super-domino d'un des deux autres type en recouvre 1. Ainsi pour pouvoir paver le pavé droit $a \times b \times c$ avec autant de super-dominos de chaque type, il faut qu'il y ait un nombre pair de cases blanches. Or, la tranche constituée des cases de profondeur 1 contient exactement $\frac{ab}{2}$ cases blanches et toutes les tranches sont coloriées de la même façon et il y a c tranches. Il y a donc $\frac{ab}{2} \times c$ cases blanches et ce nombre doit être pair. On déduit que 4 divise abc. Comme 6 et 4 divisent abc, on a que 12 divise abc si un pavé $a \times b \times c$ satisfait l'énoncé.

On s'attaque désormais à la réciproque en montrant que l'on peut paver correctement un pavé $a \times b \times c$ si 12 divise abc. Pour trouver un tel pavage, on commence toujours par regarder les pavés de petites dimensions, par exemple un pavé $2 \times 2 \times 3$. Ces essais sont plus utiles qu'on ne le croit. En effet, si l'on parvient à paver ce pavé, on pourra paver correctement des pavés plus gros en découpant ces gros pavés en petits pavés de dimension $2 \times 2 \times 3$ par exemple. Or, on remarque qu'avec deux dominos de chaque type, on peut paver un pavé $2 \times 2 \times 3$ et $3 \times 4 \times 3$ (voir la figure, le pavage de droite est découpé en deux parties pour être plus lisible). De plus, cela permet de paver un pavé $2 \times 4 \times 3$ en recollant selon la largeur deux pavés $2 \times 2 \times 3$ en recollant deux $3 \times 2 \times 3$ selon la largeur. Puisque tout entier $a > 1$ s'écrit comme somme de 2 et de 3, en recollant le bon nombre de pavés de la forme $2 \times 4 \times 3$ et $3 \times 4 \times 3$, on peut paver n'importe quel pavé $a \times 4 \times 3$ pour $a > 1$. De même, on peut paver les pavés de la forme $a \times 2 \times 6$, avec $a > 1$. Or si 12 divise abc alors il y a deux possibilités :

— Une dimension du pavé droit est divisible par 6 et une autre dimension est paire. Dans ce cas on sait comment paver ce pavé droit à l'aide des pavés $a \times 2 \times 6$, $a > 1$.
— Une dimension du pavé droit est divisible par 4 et une autre dimension est divisible par 3. Dans ce cas on sait comment paver ce pavé droit à l'aide des pavés $a \times 4 \times 3$, $a > 1$.
— Deux dimensions du pavé sont paires, et la dernière est divisible par 3. Dans ce cas on sait comment paver ce pavé droit à l'aide des pavés $2 \times 2 \times 3$.
— Une dimension du pavé droit est divisible par 12 et les autres sont impaires, non divisibles par 3, supérieures ou égales à 5. Alors on décompose le pavé droit $12a \times b \times c$ en un pavé $12a \times 3 \times c$ et $12a \times (b-3) \times c$, et on pave chacun comme précédemment cas $b-3$ est pair.

Ceci achève la construction et montre que les pavé droits qui peuvent être ainsi pavés sont ceux tels que 12 divise abc.



<u>Commentaire des correcteurs</u>

L'exercice était difficile et a été résolu par un faible nombre d'élèves, mais un certain nombre d'élèves a réussi à avancer sur le problème, en montrant que certains pavés étaient pavables.

Exercice 18. 2019 élèves participent à un concours et répondent chacun à 6 questions. A la fin du concours, on remarque que, parmi les bonnes réponses données par un quelconque groupe de 3 élèves, il y a au moins une réponse correcte à au moins 5 des 6 questions du concours. Quelle est la valeur minimale du nombre total de réponses correctes aux questions du concours ?

Solution de l'exercice 18 Dans ce problème, on cherche le plus petit entier satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus petit entier recherché est l'entier c. Pour montrer que c est bien le plus petit entier recherché, on va d'une part montrer que si un entier n satisfait la propriété, alors $n \geqslant c$ et d'autre part on va montrer que l'on peut trouver une configuration avec exactement c réponses correctes données.
On peut commencer par ranger les données dans un tableau 2019×6, où les 2019 lignes représentent les 2019 élèves et les 6 colonnes les 6 problèmes. Dans la case (i, j), on inscrit un 1 si l'élève i a répondu correctement à la question j et on inscrit un 0 sinon. Le problème nous invite à effectuer un double-comptage, cette présentation sous forme de tableau permet de voir quel double-comptage est intéressant. Les hypothèses concernant les triplets d'élèves invitent à tenter d'effectuer un double comptage. Mais d'abord, on effectue quelques remarques simples. On peut noter que si trois élèves ont répondu tous les trois faux aux questions 5 et 6, alors on a un triplet d'élèves dont les réponses ne sont pas correctes pour au moins 5 exercices. Ainsi, si q_1 et q_2 sont deux questions du concours, il y a au plus 2 élèves qui ont répondu faux à ces questions. Comme il y a $\binom{6}{2} = 15$ façons de choisir une paire de questions $\{q_1, q_2\}$, et pour chaque paire il y a au plus deux élèves qui ont mal répondu à ces deux questions donc il y a au plus $2 \cdot 15 = 30$ paires $(\{q_1, q_2\}, e)$ telles que l'élève e a mal répondu aux questions q_1 et q_2. Dans le tableau, cela se traduit par le fait qu'il y a au plus 30 paires de 0 tels que les deux 0 appartiennent à la même ligne. Cette majoration du nombre de paires de 0 appartenant à la même ligne nous permet de deviner le double comptage que nous allons effectuer : nous allons compter de deux façons différentes le nombre N de paires de 0 tels que les deux 0 appartiennent à la même ligne. Une telle paire sera dite mauvaise dans la suite. On a déjà compté "selon les colonnes", ce qui nous a donné $N \leqslant 30$. On va chercher à présent à compter "selon les lignes".
On note E l'ensemble des élèves qui ont répondu à au plus 4 questions. A chacun des élèves de E, on peut associer au moins un couple de réponses fausses donc $|E| \leqslant N \leqslant 30$

Pour un élève $e \in E$ on note $n(e)$ le nombre de questions auxquelles il a répondu faux. Alors $N = \sum_{e \in E} \binom{n(e)}{2}$, puisque les seuls mauvaises paires appartiennent à des lignes associées à des éléments de E et que s'il y a $n(e)$ 0 dans une lignes, il y a $\binom{n(e)}{2}$ façons de créer des paires de 0 de cette lignes. On utilise à présent la convexité de la fonction $x \mapsto \frac{x(x-1)}{2} = \binom{x}{2}$ pour appliquer l'inégalité de Jensen et obtenir une minoration de N :

$$N = \sum_{e \in E} \binom{n(e)}{2} \geqslant |E| \binom{\frac{\sum_{e \in E} n(e)}{|E|}}{2}$$

On note f le nombre total de réponses fausses proposées par les élèves de E, et v le nombre total de réponses justes, de telles sorte que $f + v = 6|E|$. On a donc $\sum_{e \in E} n(e) = f$. Ainsi :

$$30 \geqslant N \geqslant \frac{f(f - |E|)}{2|E|}$$

$$f^2 - f|E| - 60|E| \leqslant 0$$

Cette dernière équation fournit que $f \leqslant \frac{|E| + \sqrt{|E|^2 + 240|E|}}{2}$.
Soit V le nombre total de réponses justes données par l'ensembe des élèves, alors V est la somme du nombre de bonnes réponses des élèves de E et la somme des bonnes réponses des élèves qui ne sont pas

dans E. Par définition, les élèves qui ne sont pas dans E ont répondu correctement à au moins 5 questions. Donc

$$V \geqslant \nu + (2019 - |E|)5 = 2019 \times 5 - 5|E| + \nu = 2019 \times 5 - 5|E| + 6|E| - f = 5 \times 2019 + |E| - f$$

.
Mais en utilisant l'inégalité obtenue en f plus haut on obtient

$$V \geqslant 2019 \times 5 + \frac{|E| - \sqrt{|E|^2 + 240|E|}}{2}$$

Le côté droit est décroissant en $|E|$ et puisque $|E| \leqslant 30$, donc $V \geqslant 2019 \times 5 + \frac{30 - \sqrt{30^2 + 240 \times 30}}{2} = 10065$. Donc $V \geqslant 10065$.

Réciproquement, il est possible que $2019 - 30$ élèves aient répondu à 5 problèmes, et que 30 élèves aient répondu à 4 problèmes : il suffit que pour chacun des 15 ensembles de 4 questions parmi les 6 il y ait deux élèves qui ont répondu exactement à celles là. Cette configuration satisfait l'énoncé, et est telle que le nombre de bonnes réponses est exactement 10065.

Commentaire des correcteurs

L'exercice, difficile, n'a été résolu que par très peu d'élèves. Cependant, il est appréciable de voir que plusieurs élèves ont rendu quelques éléments de réponses même s'ils ne disposaient pas d'une preuve complète. Quelques erreurs à éviter :

1. Ce n'est pas parce qu'on dispose d'une configuration à 10065 bonnes réponses et qu'on ne peut pas enlever de bonne réponse dans cette configuration que c'est forcément la configuration optimale et que 10065 est la valeur optimale.
2. Ce n'est pas parce qu'on a un minimum de bonnes réponses sur les élèves qui ont répondu correctement à au plus 4 questions ET qu'on a un minimum de bonnes réponses sur les élèves ayant répondu correctement à au moins 5 questions que le minimum pour le nombre global d'élèves est la somme de ces deux minimums. Autrement dit, le minimum global n'est pas forcément la somme des deux minimums locaux, surtout lorsque les deux groupes d'élèves et leur taille ne sont pas indépendants.