PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 19 ET DU 20 FÉVRIER 2020

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Merci de respecter **impérativement** la numérotation des exercices.
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2005 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2004 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- Le **groupe EGMO** est constitué des élèves nées en 2004 ou avant et éligibles à l'EGMO.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 8 à 10.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n'est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies

- soit par voie postale, à l'adresse suivante :

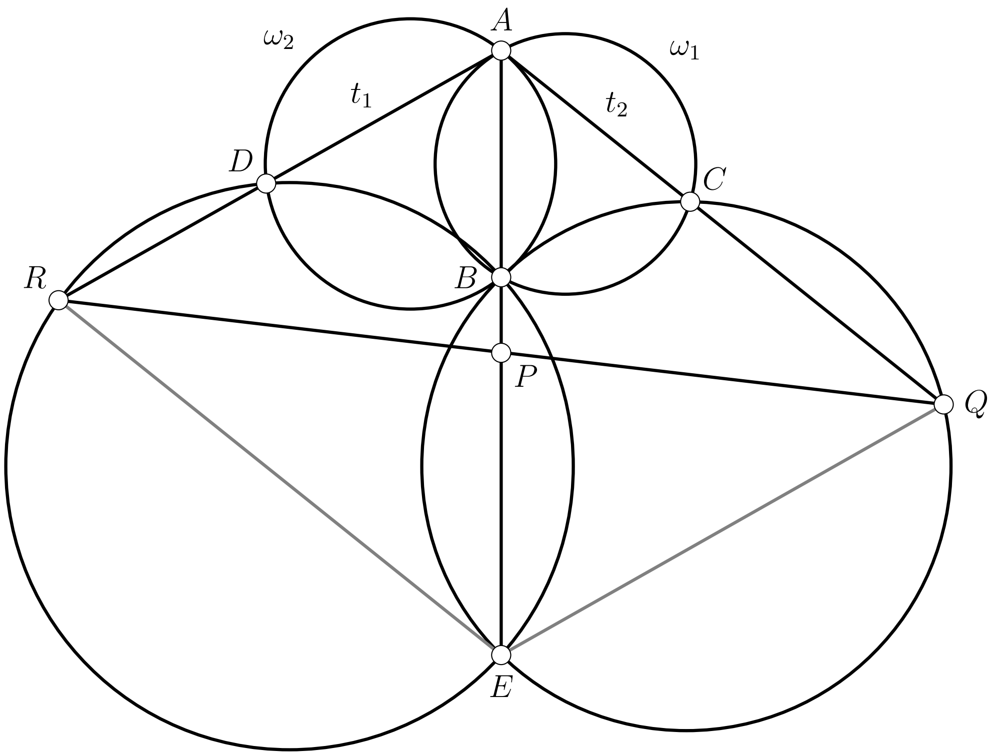
  Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques
  11-13 rue Pierre et Marie Curie
  75005 Paris
- soit par voie électronique, à l'adresse suivante : `copies.ofm@gmail.com`

Exercices Junior

Exercice 1. Soit A, B, E et P quatre points deux à deux distincts, tels que P soit le milieu du segment $[AE]$ et que B appartienne au segment $[AP]$. Soit ω_1 et ω_2 deux cercles passant par A et B. On note t_1 et t_2 les tangentes respectives à ω_1 et à ω_2 passant par A. Soit C le point d'intersection, autre que A, entre t_2 et ω_1, et soit Q le point d'intersection, autre que C, entre t_2 et le cercle circonscrit à BCE. De même, soit D le point d'intersection, autre que A, entre t_1 et ω_2, et soit R le point d'intersection, autre que D, entre t_1 et le cercle circonscrit à BDE.

Démontrer que les points P, Q et R sont alignés.

Solution de l'exercice 1 Commençons par tracer une figure.



Une première remarque que l'on peut faire est que, a priori, une chasse aux angles naïve ne suffira pas : le point P est le seul point de la figure qui n'appartient à aucun cercle ! Il convient donc d'exploiter à fond le fait que P soit au milieu de $[AE]$.

Dans ces conditions, on remarque qu'il semble aussi être le milieu de $[RQ]$, ce qui signifierait que $AQER$ est un parallélogramme. On s'empresse donc de placer le milieu du segment $[RQ]$, qui semble effectivement coïncider avec P, et de tracer les droites (EQ) et (ER), qui semblent effectivement parallèles à (AR) et à (AQ).

Nous allons donc nous efforcer de démontrer ces deux relations de parallélisme, à l'aide d'une chasse aux angles et du cas limite du théorème de l'angle inscrit :

$$\begin{aligned}(EQ, AR) &= (EQ, AQ) + (AQ, AB) + (AB, AR) = (EQ, CQ) + (AC, AB) + (AB, AD) \\ &= (EB, CB) + (AC, AB) + (AB, t_1) = (AB, CB) + (AC, AB) + (CB, CA) = 0°.\end{aligned}$$

Les droites (EQ) et (AR) sont donc parallèles. De manière symétrique, les droites (ER) et (AQ) sont elles aussi parallèles. Ainsi, $AQER$ est bien un parallélogramme, donc les diagonales $[AE]$ et $[QR]$ se coupent en leur milieu, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs L'exercice nécessitait une figure exacte pour pouvoir conjecturer plusieurs résultats. Ces éventuelles conjectures, même non démontrées, ont été largement valorisées.

Quelques élèves ont remarqué, à raison, que plusieurs configurations étaient possibles (notemment sur l'ordre des points A, D et R sur la droite t_1) mais que toutes ces configurations se traitent de la même façon. Cependant, aucun n'élève n'a utilisé les angles orientés pour traiter toutes les configurations d'un seul coup.

Le fait de ne pas utiliser les angles orientés n'était pas pénalisé et les élèves qui ont traité correctement une seule configuration se sont vus attribués la note de 7/7.

Exercice 2.

1. Trouver le plus petit entier $k \geqslant 1$ ayant la propriété suivante : pour tous les entiers naturels non nuls x et y tels que x divise y^2 et y divise x^2, le produit xy divise $(x+y)^k$.
2. Trouver le plus petit entier $\ell \geqslant 1$ ayant la propriété suivante : pour tous les entiers naturels non nuls x, y et z tels que x divise y^2, y divise z^2 et z divise x^2, le produit xyz divise $(x+y+z)^\ell$.

Solution de l'exercice 2 Notons tout d'abord que, si un entier k a la propriété désirée, alors tout entier $k' \geqslant k$ aura aussi cette propriété. En effet, si xy divise $(x+y)^k$ et si $k' \geqslant k$, alors xy divise aussi $(x+y)^{k'}$. Par conséquent, il nous suffit de trouver un entier k ayant la propriété désirée, et tel que $k-1$ n'ait pas cette propriété. En outre, cette démarche fonctionnera aussi pour la deuxième question.

1. Étudions les petites valeurs de k. Tout d'abord, pour $k = 1$, on souhaterait que xy divise $x + y$, ce qui est impossible dès lors que x et y sont grands. Par exemple, si $x = y = 3$, alors x divise bien y^2, et y divise x^2, mais $xy = 9$ ne divise pas $x + y$.

   Choisir $x = y$ ne fournit plus un contre-exemple pour $k = 2$, puisque alors xy divise bien sûr $(x + y)^2 = 4xy$. On regarde donc ce qui se passe si l'on choisit $x \neq y$, par exemple si l'on change la valeur de y : dans ce cas, puisque l'on a toujours $x = 3$, on est obligé de choisir $y = 9$. Et là, on constate bien que x divise y^2 et que y divise x^2, mais que $xy = 3^3$ ne divise pas $(x + y)^2 = 2^4 \times 3^2$.

   Enfin, pour $k = 3$, on n'arrive plus à trouver de contre-exemple. On va donc démontrer que $k = 3$ est bien le plus petit entier ayant la propriété désirée. En effet, si l'on pose $a = y^2/x$ et $b = x^2/y$, alors on constate bien que

   $$(x+y)^3 = x^3 + 3xy(x+y) + y^3 = xy(a+b+3x+3y)$$

   est un multiple de xy dès lors que a et b sont entiers.
2. Forts de notre expérience précédente, il semble qu'un cas permettant de trouver autant de contre-exemples que possible soit celui où x et un nombre premier p, puis $z = p^2$ et $y = p^4$. Dans ce cas, on constate bien que x, y et z divisent respectivement y^2, z^2 et x^2. On peut alors écrire $xyz = p^7$ et $(x+y+z)^\ell = p^\ell(1+p+p^3)^\ell$.

   Or, puisque p est premier, on sait que $1 + p + p^3$ est premier avec p, donc $(1+p+p^3)^\ell$ est lui aussi premier avec $xyz = p^7$. Par conséquent, si xyz divise $(x+y+z)^\ell$, c'est que p^7 divise p^ℓ, ou encore que $\ell \geqslant 7$.

   Réciproquement, si $\ell \geqslant 7$, l'expression $(x+y+z)^7$ se décompose comme une somme de termes de la forme $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, où α, β et γ sont des entiers de somme 7. Il suffit donc de démontrer que xyz divise chacun de ces termes dès lors que les nombres $a = y^2/x$, $b = z^2/y$ et $c = x^2/z$ sont des entiers. Or, on peut noter que xyz divise $x^7 = bc^3xyz$ et que, de même, xyz divise y^7 et z^7. Mais alors $(xyz)^7 = (xyz)^\alpha(xyz)^\beta(xyz)^\gamma$ divise $x^{7\alpha}y^{7\beta}z^{7\gamma} = (x^\alpha y^\beta z^\gamma)^7$, ce qui signifie bien que xyz divise $x^\alpha y^\beta z^\gamma$.

   Le plus petit entier recherché est donc $\ell = 7$.

Solution alternative n°1 Ci-dessus, nous avons cherché à expliquer comment on pouvait être amené à découvrir que les valeurs recherchées seraient $k = 3$ et $\ell = 7$. On aurait bien sûr pu parachuter directement des exemples permettant de démontrer que $k \geqslant 3$ et $\ell \geqslant 7$, par exemple en procédant comme suit :

1. pour $x = 2$ et $y = 4$, on voit bien que x divise y^2 et que y divise x^2, mais que $xy = 2^3$ ne divise $(x+y)^k = 2^k \times 3^k$ que si $k \geqslant 3$;

2. pour $x = 2$, $y = 16$ et $z = 4$, on voit bien que x, y et z divisent respectivement y^2, z^2 et x^2, mais que $xyz = 2^7$ ne divise $(x+y+z)^k = 2^\ell \times 11^\ell$ que si $\ell \geqslant 7$.

Solution alternative n°2 On peut également utiliser les valuations p-adiques pour démontrer que $k = 3$ et $\ell = 7$ conviennent, par exemple en procédant comme suit.

1. Nous allons démontrer que, pour tout nombre premier p, si x divise y^2 et y divise x^2, alors $v_p(xy) \leqslant 3v_p(x+y)$. En effet, si l'on suppose, sans perte de généralité, que $v_p(x) \leqslant v_p(y)$, alors

$$3v_p(x+y) \geqslant 3v_p(x) = v_p(x) + v_p(x^2) \geqslant v_p(x) + v_p(y) = v_p(xy).$$

2. De même, pour tout nombre premier p, si x, y et z divisent respectivement y^2, z^2 et x^2, alors $v_p(xyz) \leqslant 7v_p(x+y+z)$. En effet, si l'on suppose, sans perte de généralité, que $v_p(x) = \min\{v_p(x), v_p(y), v_p(z)\}$, alors

$$\begin{aligned} 7v_p(x+y+z) &\geqslant 7v_p(x) = v_p(x) + v_p(x^4) + v_p(x^2) \\ &\geqslant v_p(x) + v_p(z^2) + v_p(z) \\ &\geqslant v_p(x) + v_p(y) + v_p(z) = v_p(xyz). \end{aligned}$$

Solution alternative n°3 Pour démontrer que xyz divise chaque terme de la forme $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ tel que $\alpha+\beta+\gamma = 7$ (et en déduire que $\ell \geqslant 7$ convient), on peut également utiliser une approche moins systématique mais plus facile d'accès. En effet, sans perte de généralité, supposons que $\alpha = \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$, et posons $a = y^2/x$, $b = z^2/y$ et $c = x^2/z$:

- ▷ Si $\alpha \geqslant 1$, alors $\beta \geqslant 1$ et $\gamma \geqslant 1$ aussi, donc xyz divise bien $x^\alpha y^\beta z^\gamma = xyz \times x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}$. On suppose donc désormais que $\alpha = 0$
- ▷ Si $\alpha = \beta = 0$, on montre comme dans la solution originelle que xyz divise $x^\alpha y^\beta z^\gamma = z^7$ et, si $\alpha = \gamma = 0$, on montre de même que xyz divise $x^\alpha y^\beta z^\gamma = y^7$. On suppose donc désormais que $\beta \geqslant 1$ et $\gamma \geqslant 1$.
- ▷ Si $\alpha = 0$, $\beta \geqslant 3$ et $\gamma \geqslant 1$, alors xyz divise $x^\alpha y^\beta z^\gamma = y^3 z \times y^{\beta-3}z^{\gamma-1} = xyz \times ay^{\beta-3}z^{\gamma-1}$.
- ▷ Si $\alpha = 0$ et $1 \leqslant \beta \leqslant 2$, alors $\gamma \geqslant 5$, et xyz divise, comme prévu, le produit

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = yz^5 \times y^{\beta-1}z^{\gamma-5} = xyz \times ab^2y^{\beta-1}z^{\gamma-5}.$$

Commentaire des correcteurs Cet exercice a été bien réussi par les élèves ayant testé la propriété de l'énoncé pour des petites valeurs de x, y et z. Cela permettait notamment d'éviter de croire que x divisait y ou réciproquement, erreur qui est arrivée fréquemment.

Beaucoup d'élèves ont montré pour la question a) que $k = 3$ convenait et en on conlu que c'était la réponse à la question posée. Attention, cependant ! Il fallait non seulement démontrer que $k = 3$ convient, mais également que c'est le plus petit entier k qui convient. Cela nécessitait donc de trouver un contre-exemple explicite pour $k = 2$ (et $k = 1$) et de ne pas se contenter de dire que « ça ne marche pas dans ces cas là » sans exhiber de contre-exemple démontrer cette affirmation.

Exercice 3. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 4. Soit a, b et c des réels strictement positifs tels que $a+b+c=3$. Démontrer que

$$a^{12}+b^{12}+c^{12}+8(ab+bc+ca) \geqslant 27,$$

et trouver les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 4 Soit $\mathbf{S}$ la quantité $a^{12}+b^{12}+c^{12}+8(ab+bc+ca)-27$: on souhaite démontrer que $\mathbf{S} \geqslant 0$. Tout d'abord, puisque $a+b+c=3$, on constate déjà que

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= (a^{12}+b^{12}+c^{12}) + 4\left((a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\right)-27 \\ &= (a^{12}+b^{12}+c^{12})-4(a^2+b^2+c^2)+9 \\ &= f(a)+f(b)+f(c),\end{aligned}$$

où l'on a posé $f : t \mapsto t^{12}-4t^2+3$.
Or, d'après l'inégalité arithmético-géométrique, on sait, pour tout $t \geqslant 0$, que

$$t^{12}+3 = t^{12}+1+1+1 \geqslant 4t^3,$$

et donc que $f(t) \geqslant 4(t^3-t^2)$.
Enfin, d'après l'inégalité de Tchebychev, puisque les triplets (a,b,c) et (a^2,b^2,c^2) sont ordonnés dans le même ordre, on sait que

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{3} = a^2+b^2+c^2.$$

On en déduit que

$$\mathbf{S} \geqslant 4(a^3+b^3+c^3)-4(a^2+b^2+c^2) \geqslant 0,$$

ce qui conclut.

Solution alternative n°1 On montre de même que précédemment que

$$\mathbf{S} = (a^{12}+b^{12}+c^{12})-4(a^2+b^2+c^2)+9.$$

Or, d'après l'inégalité de Tchebychev, on sait que (a,b,c) et (a^8,b^8,c^8) sont ordonnés dans le même ordre, on sait que

$$a^{12}+b^{12}+c^{12} \geqslant \frac{(a+b+c)^4(a^8+b^8+c^8)}{3^4} = a^8+b^8+c^8.$$

Cela signifie que $\mathbf{S} \geqslant g(a)+g(b)+g(c)$, où l'on a posé $g : t \mapsto t^8-4t^2+3$.
Or, d'après l'inégalité arithmético-géométrique, on sait, pour tout $t \geqslant 0$, que

$$t^8+3 = t^8+1+1+1 \geqslant 4t^2,$$

et donc que $g(t) \geqslant 0$. On en déduit que $\mathbf{S} \geqslant 0$, ce qui conclut.

Remarque On constate ici que, plus l'entier k est petit, plus il risque d'être difficile de démontrer que la somme

$$\mathbf{S}_k = a^k+b^k+c^k+8(ab+bc+ca)-27 = a^k+b^k+c^k-4(a^2+b^2+c^2)+9$$

est positive ou nulle. Pour $k=3$, c'est d'autant plus difficile que $\mathbf{S}_3 = -9/4 < 0$ lorsque $a=b=3/2$ et $c=0$. En revanche, pour $k=4$, on peut tout de même démontrer que $\mathbf{S}_4 \geqslant 0$, par exemple en procédant comme suit.
Puisque a, b et c jouent des rôles symétriques, on suppose, sans perte de généralité, que $a \leqslant b \leqslant c$. On pose aussi $h : t \mapsto t^4-4t^2+3$, de sorte que $\mathbf{S}_4 = h(a)+h(b)+h(c)$. Puis

- ▷ si $b \geqslant 1$, on pose $x = b-1$ et $y = c-b$: on a donc $a = 1-2x-y$, $b = 1+x$ et $c = 1+x+y$, avec x et y positifs ou nuls ;
- ▷ si $b < 1$, on pose $x = b-1$ et $y = a-b$: on a donc $a = 1+x+y$, $b = 1+x$ et $c = 1-2x-y$, avec x et y négatifs ou nuls.

Dans les deux cas, on a donc

$$\mathbf{S}_4 = h(1+x+y) + h(1+x) + h(1-2x-y),$$

avec x et y de même signe.

On peut alors vérifier que

$$\mathbf{S}_4 = 12x^2(x-1)^2 + 6x^4 + 2(3x+y)^2y^2 + 3(3x+y)y(2x-1)^2 + (3x+y)y,$$

par exemple en développant les membres de gauche et de droite. Puisque le membre de droite est une somme de termes positifs, on en déduit bien que $\mathbf{S}_4 \geqslant 0$, et *a fortiori* que $\mathbf{S}_k \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant 4$.

Par ailleurs, le lecteur désireux d'aller plus loin encore, et qui n'aura pas peur des expressions de la forme x^k où x et k sont deux *réels positifs* (pas forcément entiers) pourra en fait se réjouir de la caractérisation suivante, qui fait intervenir la constante

$$\sigma = \ln(9/2)/\ln(3/2) \approx 3.71 :$$

- ▷ si $k < \sigma$, et si $a = b = 3/2$ et $c = 0$, alors $\mathbf{S}_k < 0$;
- ▷ si $k = \sigma$, et si a, b et c sont trois réels positifs tels que $a+b+c = 3$, alors $\mathbf{S}_k \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $a = b = c = 1$ ou bien si (a,b,c) est égal à $(3/2, 3/2, 0)$, à l'ordre près des trois variables ;
- ▷ si $k > \sigma$, et si a, b et c sont trois réels positifs tels que $a+b+c = 3$, alors $\mathbf{S}_k \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $a = b = c = 1$.

Commentaire des correcteurs Même si cet exercice admet une solution relativement courte, il s'agit d'un exercice très difficile, sur lequel peu d'élèves ont obtenu des avancées majeures.

Certains ont voulu utiliser l'inégalité de Tchebychev pour démontrer que $ab+bc+ca \geqslant 3$, ce qui est faux dans le cas où $a = b = 0$ et $c = 3$: pour utiliser l'inégalité de Tchebychev, il faut s'assurer que les termes apparaissant dans le membre que l'on souhaite minorer sont dans le bon ordre !

Exercices Senior

Exercice 5. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 6. Trouver les triplets (a, b, c) d'entiers naturels non nuls tels que $\mathrm{PGCD}(a, b, c) = 1$ et que $a + b + c$ divise chacun des entiers

$$a^{12} + b^{12} + c^{12}, a^{23} + b^{23} + c^{23} \text{ et } a^{11004} + b^{11004} + c^{11004}.$$

Solution de l'exercice 6 Considérons un triplet d'entiers (a, b, c) premiers entre eux dans leur ensemble, et posons $\mathbf{S}_k = a^k + b^k + c^k$.

Tout d'abord, si $\mathbf{S}_1$ est pair, alors au moins l'un des entiers a, b et c est pair ; on suppose donc que c est pair. Mais alors, si a est pair, b l'est aussi, et réciproquement. Comme a, b et c ne peuvent pas être pairs tous les trois, c'est donc que a et b sont impairs. Dans ces conditions, on sait que

$$\mathbf{S}_{12} \equiv (a^2)^6 + (b^2)^6 + (c^2)^6 \equiv 1 + 1 + 0 \equiv 2 \pmod 4,$$

et donc que 4 ne divise pas $\mathbf{S}_1$. Ainsi, dans tous les cas, on sait que $v_2(\mathbf{S}_1) \leqslant 1$.

Supposons maintenant que l'on dispose d'un facteur premier p de $\mathbf{S}_1$. De nouveau, si p divise c, il ne peut pas diviser a ni b. Mais alors

$$\mathbf{S}_{12} \equiv a^{12} + (-a)^{12} \equiv 2a^{12} \pmod p,$$

ce qui est impossible. Ainsi, on sait que p ne divise ni a, ni b ni c.

On pose alors $\alpha \equiv a/c \pmod p$ et $\beta \equiv b/c \pmod p$, de sorte que p divise $\alpha^k + \beta^k + 1$ pour $k = 1$, 12, 23 et 11004. Avec ces notations, on constate que

$$\begin{aligned}\alpha^{24} &\equiv (\alpha^{12})^2 \equiv (-1 - \beta^{12})^2 \equiv 1 + 2\beta^{12} + \beta^{24} \\ &\equiv \alpha \times \alpha^{23} \equiv (-1 - \beta)(-1 - \beta^{23}) \equiv 1 + \beta + \beta^{23} + \beta^{24} \pmod p.\end{aligned}$$

et donc que p divise $(1 + \beta + \beta^{23} + \beta^{24}) - (1 + 2\beta^{12} + \beta^{24}) = \beta - 2\beta^{12} + \beta^{23} \equiv \beta(\beta^{11} - 1)^2$. Puisque p et β sont premiers entre eux, c'est donc que $\beta^{11} \equiv 1 \pmod p$.

On en déduit de même que $\alpha^{11} \equiv 1 \pmod p$, donc que $\mathbf{S}_{k+11} \equiv c^{11}\mathbf{S}_k \pmod p$ pour tout $k \geqslant 0$. Et, comme p divise $\mathbf{S}_{11004}$, il divise aussi $\mathbf{S}_4$. Ainsi, $\alpha^4 + \beta^4 + 1 \equiv 0 \pmod p$.

Comme précédemment, on en déduit que

$$\begin{aligned}1 + \beta^{12} &\equiv -\alpha^{12} \equiv (-\alpha^4)^3 \equiv (1 + \beta^4)^3 \equiv (1 + \beta^{12}) + 3\beta^4(1 + \beta^4) \\ &\equiv (1 + \beta^{12}) - 3\alpha^4\beta^4 \pmod p,\end{aligned}$$

et donc que p divise $3\alpha^4\beta^4$. Comme p est premier avec α et β, c'est donc que p divise 3, c'est-à-dire que $p = 3$.

Dans ces conditions, puisque a, b et c sont tous premiers avec 3, leur ordre modulo 9 divise $\varphi(9) = 6$, donc $\mathbf{S}_{12} \equiv (a^6)^2 + (b^6)^2 + (c^6)^2 \equiv 3 \pmod 9$. Cela signifie que 9 ne divise pas $\mathbf{S}_1$, et donc que $v_3(\mathbf{S}_1) \leqslant 1$.

On vient donc de montrer que $\mathbf{S}_1 \in \{1, 2, 3, 6\}$. Puis, quitte à réordonner a, b et c de sorte que $a \leqslant b \leqslant c$, il reste plusieurs cas à vérifier.

- ▷ Si $\mathbf{S}_1 = 3$, alors $(a, b, c) = 1$, et effectivement $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_k$ pour tout $k \geqslant 1$.
- ▷ Si $\mathbf{S}_1 = 6$, alors $(a, b, c) = (1, 1, 4)$, $(1, 2, 3)$ ou $(2, 2, 2)$. Or, on a montré plus haut qu'aucun des entiers a, b et c n'est divisible par 3 ; de plus, ils sont premiers entre eux dans leur ensemble, donc pas tous pairs. Ainsi, on sait que $(a, b, c) = (1, 1, 4)$, et alors $\mathbf{S}_k \equiv 0 \pmod 2$ et $\mathbf{S}_k \equiv 0 \pmod 3$ pour tout $k \geqslant 1$, donc $\mathbf{S}_1$ divise $\mathbf{S}_k$.

En conclusion, les solutions recherchées sont $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 4)$, $(1, 4, 1)$ et $(4, 1, 1)$.

Commentaire des correcteurs L'exercice était très difficile. Une bonne partie des élèves traite la divisibilité de S_1 par 2 et parvient à montrer que, si p est un diviseur impair de S_1, alors p ne divise aucun des entiers a, b et c.

Quelques élèves ont significativement avancé dans le problème, notemment pour montrer que le seul diviseur impair possible de S_1 était 3, grâce à d'astucieuses manipulations des congruences. Ainsi, plusieurs ont réussi à montrer que, si p est un diviseur impair de S_1, on avait $a^{11} \equiv b^{11} \equiv c^{11} \pmod p$.

Exercice 7. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercices EGMO

Exercice 8. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 9. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 10. Jean dispose de 503 pièces, qu'il a réparties dans deux saladiers, chaque saladier contenant au moins une pièce. Puis, tant que chacun des deux saladiers contient deux pièces ou plus, il effectue l'opération suivante : à chaque opération, il choisit le saladier qui contient un nombre pair de pièces, prend la moitié de ces pièces, et les met dans l'autre saladier ; si l'un des deux saladiers contient une pièce ou moins, il s'arrête.
Est-il possible que ce processus ne s'arrête jamais ?

Solution de l'exercice 10 Dans la suite, on pose $n = 503$, et on va démontrer que ce processus va nécessairement finir par s'arrêter.
On numérote alors nos saladiers, et on note a_ℓ le nombre de pièces dans le saladier n°1 après ℓ opérations. On remarque alors que :

- ▷ si a_ℓ est pair, alors $a_{\ell+1} = a_\ell/2$;
- ▷ sinon, $a_{\ell+1} = a_\ell + (n - a_\ell)/2 = (n + a_\ell)/2$.

Dans tous les cas, on constate que $2a_{\ell+1} \equiv a_\ell \pmod{n}$, donc que $2^\ell a_\ell \equiv a_0 \pmod{n}$.
Or, on souhaite démontrer qu'il existe un entier ℓ tel que a_ℓ soit égal à 1 ou à $n-1$, c'est-à-dire tel que $a_\ell \equiv \pm 1 \pmod{n}$. Il nous faut donc démontrer que tout entier a_0 compris entre 1 et $n-1$ peut s'exprimer sous la forme $\pm 2^\ell \pmod{n}$ pour un certain ℓ : notons $(*)$ cette propriété.
Une première chose à faire est de décomposer n en produit de facteurs premiers. Puisque $23^2 = 529 > 503$, il nous suffit de tester si n est divisible par un nombre premier $p \leqslant 19$. On constate alors aisément que

$$\begin{aligned} n &= 1 + 2 \times 251 = 2 + 3 \times 167 = 3 + 5 \times 100 = 6 + 7 \times 71 \\ &= 8 + 11 \times 45 = 9 + 2 \times 13 \times 19 = 10 + 17 \times 29, \end{aligned}$$

ce qui démontre bien que n est premier.
Soit alors ω l'ordre de 2 modulo n. Afin de calculer ω, et comme ω divise $n-1$, on commence par factoriser $n - 1 = 2 \times 251$. Puisque $17^2 = 289^2 > 251$ et que

$$251 = 1 + 2 \times 5^3 = 2 + 3 \times 83 = 6 + 7 \times 35 = 9 + 11 \times 22 = 4 + 13 \times 19,$$

les deux facteurs premiers de $n-1$ sont bien 2 et 251, de sorte que $\omega \in \{1, 2, (n-1)/2, n-1\}$.
Or, ω n'est manifestement pas égal à 1 ni à 2, donc $\omega \in \{(n-1)/2, n-1\}$. Mais alors :

- ▷ si $\omega = n - 1$, alors tout entier compris entre 1 et $n-1$ s'exprime même sous la forme $2^\ell \pmod{n}$, donc $(*)$ est vérifiée ;
- ▷ si $\omega = (n-1)/2$, tout carré s'exprime également sous la forme $2^\ell \pmod{n}$; en outre, comme $n \equiv 3 \pmod{4}$, on sait que -1 n'est pas un carré modulo n, et donc que tout non carré est l'opposé d'un carré ; ainsi, $(*)$ est vérifiée dans ce cas également, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs Trois élèves ont résolu cet exercice difficile, mais beaucoup ont réussi à formuler des remarques utiles pour la suite, qui ont systématiquement été valorisées.
La difficulté principale de cet exercice consistait à trouver un cadre agréable pour exprimer la dynamique de notre système : ici, il s'agissait du fait que $a_0 = 2^\ell a_\ell$. Plusieurs élèves ont réussi à démontrer que le processus était injectif (ou réversible), de sorte qu'il se décomposerait nécessairement en un ou plusieurs cycles, mais très peu ont alors pensé à la notion d'ordre.

Enfin, plusieurs élèves ont entrepris de traiter à la main les 503 cas de départ possibles (réduits à 251 après symétrie), mais n'ont jamais abouti ; si de telles tentatives, bien que désespérées en apparence, permettaient bien sûr d'aboutir, elles n'ont en pratique jamais porté leurs fruits, car les élèves ont soit abandonné en cours de route, soit ont fait une erreur de calcul qui condamnait cette approche en l'absence de prise de recul par l'élève. Ainsi, et comme dans le cas de problèmes de géométrie que l'on traiterait en utilisant une approche analytique, ce genre de techniques purement calculatoires ne pouvait être valorisé que si l'élève en déduisait une propriété qui aurait un sens dans le cadre de l'exercice.