PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 5 : POT POURRI
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 15 MARS 2020

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe Junior est constitué des élèves nés en 2005 ou après. Ces élèves doivent chercher les exercices classés « Juniors » et « Communs ».
- Le groupe Senior est constitué des élèves nés en 2004 ou avant. Ces élèves doivent chercher les exercices classés « Communs » et « Seniors ».
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n'est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.
- Bien préciser, sur chaque copie, votre nom en lettres capitales et votre prénom en minuscules.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.
contact-pofm@animath.fr

Exercices Juniors

Exercice 1. Martin et Théo jouent à un jeu : Martin écrit un nombre entier au tableau. Théo a ensuite le droit d'effacer le nombre et de lui ajouter 2, ou d'effacer le nombre et de lui enlever 3, ceci autant de fois qu'il veut. Théo gagne s'il arrive à obtenir 2020 après un nombre fini d'étapes, sinon Martin gagne. Quel joueur a une stratégie gagnante ?

Exercice 2. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 60°$. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, H son orthocentre et I le point d'intersection des bissectrices. Montrer que les points B, O, I, H et C sont cocycliques.

Exercice 3.

1. Existe-t-il des nombres $a_0, \ldots, a_{2020}$ valant -1 ou 1 tels que $a_0 \times a_1 + a_1 \times a_2 + \cdots + a_{2019} \times a_{2020} + a_{2020} \times a_0 = 1010$?
2. Existe-t-il des nombres $a_1, \ldots, a_{2020}$ valant -1 ou 1 tels que $a_1 \times a_2 + a_2 \times a_3 + \cdots + a_{2019} \times a_{2020} + a_{2020} \times a_1 = 1010$?

Exercice 4. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus. La hauteur issue de A recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en un point D. La hauteur issue de B recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en un point E. La droite (ED) coupe les côtés $[AC]$ et $[BC]$ respectivement en les points P et Q. Montrer que les points P, Q, B et A sont cocycliques.

Exercice 5. Les cases d'un échiquier 8×8 sont blanches. Un coup consiste à échanger les couleurs des cases d'un rectangle 3×1 ou 1×3 (les cases blanches deviennent noires et les cases noires deviennent blanches). Est-il possible d'aboutir en un nombre fini de coups à la configuration où toutes les cases de l'échiquier sont noires ?

Exercice 6. Déterminer tous les triplets (x, y, z) d'entiers naturels satisfaisant l'équation :

$$2^x + 3^y = z^2$$

Exercice 7. Une grille de taille $n \times n$ contient n^2 cases. Chaque case contient un entier naturel compris entre 1 et n, de telle sorte que chaque entier de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ apparaît exactement n fois dans la grille. Montrer qu'il existe une colonne ou une ligne de la grille contenant au moins $\sqrt{n}$ nombres différents.

Exercice 8. Soit ABC un triangle non isocèle en B. Soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Soit M le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ contenant B sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Le cercle circonscrit au triangle BDM coupe la segment $[AB]$ en un point K distinct de B. Soit J le symétrique du point A par rapport au point K. La droite (DJ) intersecte la droite (AM) en un point O. Montrer que les points J, B, M et O sont cocycliques.

Exercice 9. Déterminer le plus petit entier $n \geqslant 2$ tel qu'il existe des entiers strictement positifs $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \mid (a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$$

Senior

Exercice 10. Soit (x_n) une suite réelle telle que $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$. On pose également $y_n = x_n^2 + 2^{n+2}$ pour tout entier naturel n. Montrer que pour tout entier $n > 0$, y_n est le carré d'un entier impair.

Exercice 11. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout couple (x, y) de réels :

$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x - y)$$

Exercice 12. Trouver tous les couples d'entiers positifs (x, y) tels que $2^x + 5^y + 2$ est un carré parfait.

Exercice 13. Soit ABC un triangle aux angles aigus. Soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. La perpendiculaire à la droite (AD) passant par le point B recoupe le cercle circonscrit au triangle ADB en un point E. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que les points A, O et E sont alignés.

Exercice 14. Une grille de taille $n \times n$ contient n^2 cases. Chaque case contient un entier naturel compris entre 1 et n, de telle sorte que chaque entier de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ apparaît exactement n fois dans la grille. Montrer qu'il existe une colonne ou une ligne de la grille contenant au moins $\sqrt{n}$ nombres différents.

Exercice 15. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ tel que pour tout nombre pemier $p < n$, $n - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor p$ n'est pas divisible par un carré différent de 1.

Exercice 16. Soient P, Q des polynômes à coefficients réels tels que $P \circ Q = P^{2019}$. On suppose que toutes les racines de P sont réelles. Montrer qu'elles sont toutes égales.

Exercice 17. Soit ABC un triangle, Ω son cercle circonscrit et O le centre de Ω. Soit S le centre du cercle tangent aux côtés AB et AC et tangent intérieurement au cercle Ω en un point K. Le cercle de diamètre $[AS]$ recoupe le cercle Ω en un point T. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Montrer que les points K, T, M et O sont cocycliques.

Exercice 18. Soit G un graphe fini non orienté, $n \in \mathbb{N}^*$, $d \in \mathbb{N}^*$ tel que le degré de tout sommet de G est borné par d, x un sommet de G. On note $a(n, x)$ le nombre de sous-graphes induits connexes de G contenant n sommets dont le sommet x (un sous-graphe induit U est un graphe dont les sommets sont des sommets de G et si x et y sont des sommets de U, x est relié par une arête à y dans U si et seulement si x est relié par une arête à y dans G).

1. Montrer que $a(n, x) \leqslant 2^{nd}$.
2. Montrer que $a(n, x) \leqslant \left(\frac{(d+1)^{d+1}}{d^d}\right)^n$