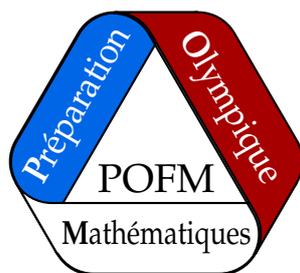


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 8 JANVIER 2020

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2005 ou après. Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2004 ou avant. Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- ▷ Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- ▷ Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n'est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies

- ▷ soit par voie postale, à l'adresse suivante :

Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75005 Paris

- ▷ soit par voie électronique, à l'adresse suivante : copies.ofm@gmail.com

Exercices Junior

Exercice 1. Clara et Isabelle jouent au jeu suivant. Au début du jeu, elles choisissent un entier $n \geq 1$, puis mettent n bonbons dans un saladier. Puis elles jouent à tour de rôle, en commençant par Clara. À chaque tour, si le saladier contient k bonbons, la joueuse dont c'est le tour choisit un entier ℓ premier avec k , tel que $\ell \leq k$, puis elle mange ℓ bonbons ; c'est alors à l'autre joueuse de jouer. La joueuse qui mange le dernier bonbon gagne la partie.

Pour quelles valeurs de n Clara dispose-t-elle d'une stratégie gagnante ?

Exercice 2. Soit ABC un triangle et soit Γ son cercle circonscrit. Soit P le point d'intersection de la droite (BC) et de la tangente à Γ en A . Soit D et E les symétriques respectifs des points B et A par rapport à P .

Soit alors ω_1 le cercle circonscrit au triangle DAC et soit ω_2 le cercle circonscrit au triangle APB . On note F le point d'intersection des cercles ω_1 et ω_2 autre que A , puis on note G le point d'intersection, autre que F , du cercle ω_1 avec la droite (BF) .

Démontrer que les droites (BC) et (EG) sont parallèles.

Exercice 3. Soit n un entier naturel non nul. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est n -positive si, pour tous les réels x_1, \dots, x_n tels que $x_1 + \dots + x_n = 0$, on a $f(x_1) + \dots + f(x_n) \geq 0$.

a) Toute fonction 2020-positive est-elle nécessairement 1010-positive ?

b) Toute fonction 1010-positive est-elle nécessairement 2020-positive ?

Exercice 4. Soit a_0, a_1, a_2, \dots une suite d'entiers naturels non nuls, et soit b_0, b_1, b_2, \dots la suite telle que $b_n = \text{PGCD}(a_n, a_{n+1})$ pour tout entier $n \geq 0$. Est-il possible que tout entier naturel non nul soit égal à exactement un des termes b_0, b_1, b_2, \dots ?

Exercices Senior

Exercice 5. Soit a_0, a_1, a_2, \dots une suite d'entiers naturels non nuls, et soit b_0, b_1, b_2, \dots la suite telle que $b_n = \text{PGCD}(a_n, a_{n+1})$ pour tout entier $n \geq 0$. Est-il possible que tout entier naturel non nul soit égal à exactement un des termes b_0, b_1, b_2, \dots ?

Exercice 6. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x + f(y)) + x = f(f(2x) + y)$$

pour tous les réels x et y .

Exercice 7. Soit k et n deux entiers naturels non nuls, tels que $k \leq 2^n$. Morgane a écrit, sur son cahier, l'ensemble des n -uplets formés de 0 et de 1 : il y en a 2^n . On dit que deux n -uplets (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) sont *voisins* s'ils ont $n - 1$ termes en commun, c'est-à-dire s'il existe un seul entier i tel que $x_i \neq y_i$. Puis Morgane choisit k de ces n -uplets et les souligne. Elle effectue ensuite les opérations suivantes : lors de chaque opération, elle choisit un n -uplet dont deux voisins sont soulignés, et elle souligne également ce n -uplet.

Pour quelles valeurs de k Morgane peut-elle parvenir à souligner l'ensemble des n -uplets ?