PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 8 JANVIER 2020

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2005 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2004 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n'est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies

- soit par voie postale, à l'adresse suivante :

  Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques
  11-13 rue Pierre et Marie Curie
  75005 Paris
- soit par voie électronique, à l'adresse suivante : `copies.ofm@gmail.com`

Exercices Junior

Exercice 1. Clara et Isabelle jouent au jeu suivant. Au début du jeu, elles choisissent un entier $n \geqslant 1$, puis mettent n bonbons dans un saladier. Puis elles jouent à tour de rôle, en commençant par Clara. À chaque tour, si le saladier contient k bonbons, la joueuse dont c'est le tour choisit un entier ℓ premier avec k, tel que $\ell \leqslant k$, puis elle mange ℓ bonbons ; c'est alors à l'autre joueuse de jouer. La joueuse qui mange le dernier bonbon gagne la partie.

Pour quelles valeurs de n Clara dispose-t-elle d'une stratégie gagnante ?

Exercice 2. Soit ABC un triangle et soit Γ son cercle circonscrit. Soit P le point d'intersection de la droite (BC) et de la tangente à Γ en A. Soit D et E les symétriques respectifs des points B et A par rapport à P.

Soit alors ω_1 le cercle circonscrit au triangle DAC et soit ω_2 le cercle circonscrit au triangle APB. On note F le point d'intersection des cercles ω_1 et ω_2 autre que A, puis on note G le point d'intersection, autre que F, du cercle ω_1 avec la droite (BF).

Démontrer que les droites (BC) et (EG) sont parallèles.

Exercice 3. Soit n un entier naturel non nul. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *n-positive* si, pour tous les réels $x_1, \ldots, x_n$ tels que $x_1 + \ldots + x_n = 0$, on a $f(x_1) + \ldots + f(x_n) \geqslant 0$.

a) Toute fonction 2020-positive est-elle nécessairement 1010-positive ?

b) Toute fonction 1010-positive est-elle nécessairement 2020-positive ?

Exercice 4. Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ une suite d'entiers naturels non nuls, et soit $b_0, b_1, b_2, \ldots$ la suite telle que $b_n = \mathrm{PGCD}(a_n, a_{n+1})$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Est-il possible que tout entier naturel non nul soit égal à exactement un des termes $b_0, b_1, b_2, \ldots$?

Exercices Senior

Exercice 5. Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ une suite d'entiers naturels non nuls, et soit $b_0, b_1, b_2, \ldots$ la suite telle que $b_n = \mathrm{PGCD}(a_n, a_{n+1})$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Est-il possible que tout entier naturel non nul soit égal à exactement un des termes $b_0, b_1, b_2, \ldots$?

Exercice 6. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x + f(y)) + x = f(f(2x) + y)$$

pour tous les réels x et y.

Exercice 7. Soit k et n deux entiers naturels non nuls, tels que $k \leqslant 2^n$. Morgane a écrit, sur son cahier, l'ensemble des n-uplets formés de 0 et de 1 : il y en a 2^n. On dit que deux n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont *voisins* s'ils ont $n-1$ termes en commun, c'est-à-dire s'il existe un seul entier i tel que $x_i \neq y_i$. Puis Morgane choisit k de ces n-uplets et les souligne. Elle effectue ensuite les opérations suivantes : lors de chaque opération, elle choisit un n-uplet dont deux voisins sont soulignés, et elle souligne également ce n-uplet.

Pour quelles valeurs de k Morgane peut-elle parvenir à souligner l'ensemble des n-uplets ?