PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 3 : ARITHMÉTIQUE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 15 JANVIER 2020

Consignes

- Le groupe Junior est constitué des élèves nés en 2005 ou après, et cherche les exercices Juniors.
- Le groupe Senior est constitué des élèves nés en 2004 ou avant, et cherche les exercices Seniors.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- **Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.**
- Respecter la numérotation des exercices.
- **Bien préciser, sur chaque copie, votre nom en majuscules et votre prénom en minuscules.**

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

contact-pofm@animath.fr

Exercices Juniors

Exercice 1. Trouver tous les entiers p tels que les entiers p, $p+2$ et $p+4$ soient tous les 3 des nombres premiers.

Un nombre premier est un entier supérieur ou égal à 2 qui n'est divisible que par 1 et lui-même.

Exercice 2. Déterminer tous les couples d'entiers (n, p) strictement positifs où p est un nombre premier et tels que $n + p$ soit une puissance de n.

Une puissance de n est un entier de la forme n^k pour k un entier naturel.

Exercice 3. Antoine et Baptiste jouent à un jeu : on pose 23 allumettes sur une table et chacun, à son tour, retire entre 1 et 4 allumettes. Antoine commence et celui qui prend la dernière allumette gagne. Existe-t-il une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs ?

Une stratégie gagnante est une manière de jouer qui permet à l'un des deux joueurs de gagner peu importe comment son adversaire joue.

Exercice 4. Déterminer tous les triplets d'entiers (a, b, n) strictement positifs vérifiant l'équation :

$$a! + b! = 2^n$$

Exercice 5. Existe-t-il un couple de nombres premiers (p, q) tels que :

$$p^2(p^3 - 1) = q(q + 1)$$

Exercice 6. Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (m, n) pour lesquels :

$$1 + 2^n + 3^n + 4^n = 10^m$$

Exercice 7. Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier. Pour $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $1 \leqslant k \leqslant p-1$, le nombre de diviseurs de $kp + 1$ qui sont compris strictement entre k et p est noté a_k.
Que vaut $a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}$?

Exercice 8. Déterminer tous les entiers $n \geqslant 1$ tels qu'il existe une permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $(1, 2, \ldots, n)$ vérifiant la condition suivante :

$$k \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercice 9. Existe-t-il des entiers a et b pour lesquels $a^5b + 3$ et $ab^5 + 3$ sont tous deux des cubes parfaits ?

Un cube parfait est un entier n pour lequel il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que : $n = m^3$.

Exercices Seniors

Exercice 10. Trouver tous les triplets (p, q, r) de nombres premiers tels que les 3 différences

$$|p-q|,\ |q-r|,\ |r-p|$$

soient également des nombres premiers.

Exercice 11. Trouver tous les couples (z, r) avec $z \in \mathbb{Z}$ un entier et $r \in \mathbb{Q}$ un nombre rationnel tels que

$$2^z + 2 = r^2$$

Un nombre rationnel est un nombre qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a, b des entiers et $b \neq 0$.

Exercice 12. Déterminer tous les triplets d'entiers (a, b, n) strictement positifs vérifiant l'équation :

$$a! + b! = 2^n$$

Exercice 13. Déterminer tous les triplets d'entiers (x, y, z) vérifiant la propriété suivante :

$$\mathrm{pgcd}(x,\ y,\ z) < \mathrm{pgcd}(x+y,\ y+z,\ z+x)$$

Exercice 14. Existe-t-il des entiers a et b pour lesquels $a^5b + 3$ et $ab^5 + 3$ sont tous les deux des cubes parfaits ?

Un cube parfait est un entier n pour lequel il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que : $n = m^3$.

Exercice 15. Soit p un nombre premier impair, $h < p$ un entier, $e \in \{1,\ 2\}$.
On pose $n = h \cdot p^e + 1$ et on suppose que :

$$\begin{cases} n \mid 2^{n-1} - 1 \\ n \nmid 2^h - 1 \end{cases}$$

Montrer que n est premier.

Exercice 16. Soit $m, n \geqslant 2$ des entiers vérifiant la propriété suivante :

$$a^n \equiv 1 \pmod{m} \quad a = 1, ..., n$$

Prouver que m est un nombre premier et que $n = m - 1$.

Exercice 17. Soit S un ensemble non vide d'entiers strictement positifs vérifiant la propriété suivante :
Pour tous entiers $a, b \in S$, l'entier $ab + 1$ appartient aussi à S.
Montrer que l'ensemble des nombres premiers ne divisant aucun des éléments de S est fini.

Exercice 18. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels la fonction $x \longmapsto x^x$ soit une surjection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
i.e. prenne toutes les valeurs possibles modulo n lorsque x parcourt $\mathbb{N}^*$.