PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

POFM

TEST DU 8 JANVIER 2020

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2005 ou après.
Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2004 ou avant.
Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n'est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies

- soit par voie postale, à l'adresse suivante :

Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75005 Paris

- soit par voie électronique, à l'adresse suivante : `copies.ofm@gmail.com`

Exercices Junior

Exercice 1. Clara et Isabelle jouent au jeu suivant. Au début du jeu, elles choisissent un entier $n \geqslant 1$, puis mettent n bonbons dans un saladier. Puis elles jouent à tour de rôle, en commençant par Clara. À chaque tour, si le saladier contient k bonbons, la joueuse dont c'est le tour choisit un entier ℓ premier avec k, tel que $\ell \leqslant k$, puis elle mange ℓ bonbons ; c'est alors à l'autre joueuse de jouer. La joueuse qui mange le dernier bonbon gagne la partie.

Pour quelles valeurs de n Clara dispose-t-elle d'une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 1 Tout d'abord, si n est impair, Clara peut commencer par choisir $\ell = n-2$. En effet, puisque n est impair, on sait que $\mathrm{PGCD}(n, n-2) = \mathrm{PGCD}(n, 2) = 1$. Mais alors Isabelle se retrouve avec deux bonbons, elle est obligée d'en manger un seul, et laisse le dernier bonbon à Clara, qui gagne donc.

Au contraire, si n est pair, Clara est obligée de choisir un entier ℓ impair, et elle laisse donc $k = n - \ell$ bonbons à Isabelle, l'entier k étant donc impair. Si $k = 1$, Isabelle a déjà gagné, et si $k \geqslant 3$, Isabelle peut copier la stratégie présentée ci-dessus, et manger $k-2$ bonbons, s'assurant ainsi la victoire.

Les entiers n recherchés sont donc les entiers impairs.

Commentaire des correcteurs Ce problème a été globalement bien réussi. Cependant, les correcteurs y ont repéré quelques erreurs récurrentes :

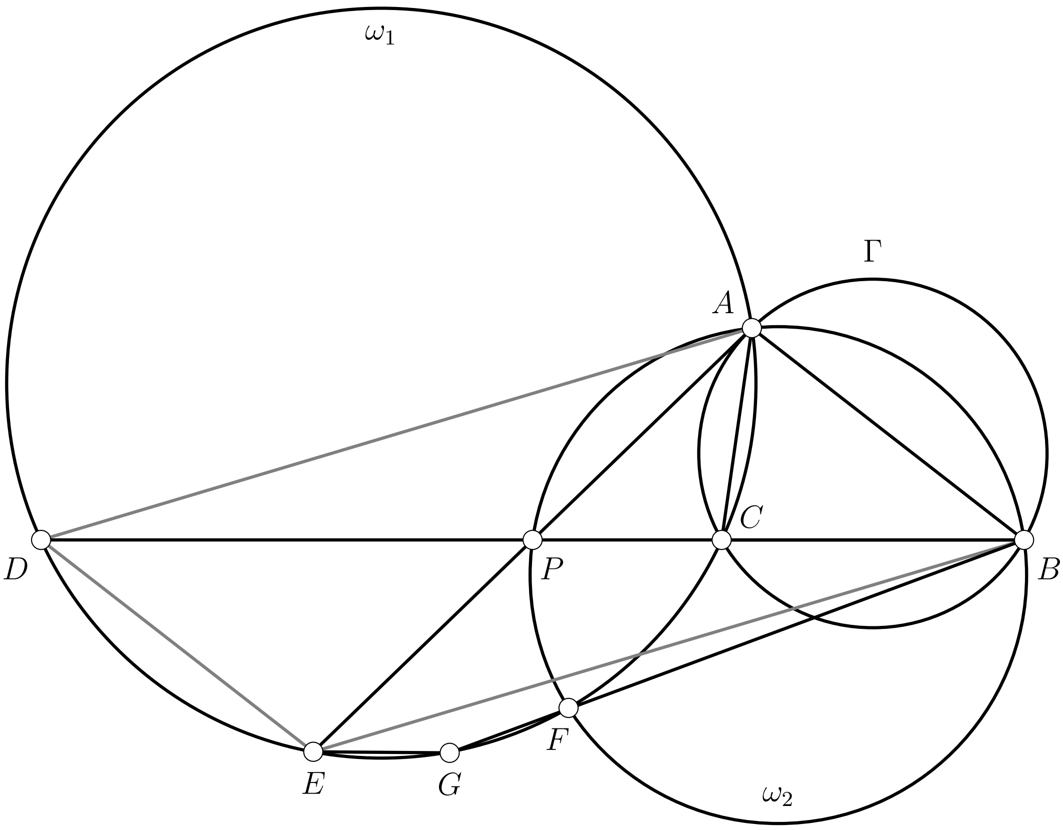
- Plusieurs élèves ont mal compris l'énoncé : il ne fallait pas retirer un nombre premier de billes, mais un nombre premier avec le nombre total de billes.
- Après avoir constaté que Clara gagnait lorsque n était impair, il ne fallait pas oublié de démontrer qu'Isabelle gagnait lorsque n étiat pair.
- Certains élèves n'ont pas vu que Clara pouvait se contenter d'enlever une seule bille : même si 1 divise le nombre n de billes, 1 et n sont quand même premiers entre eux !
- D'autres ont considéré que la seule stratégie gagnante était d'enlever $n-2$ billes car 2 est une position perdante : il s'agissait certes d'une stratégie gagnante, mais pas de la seule, et formuler une telle affirmation rendait donc la preuve invalide.

Exercice 2. Soit ABC un triangle et soit Γ son cercle circonscrit. Soit P le point d'intersection de la droite (BC) et de la tangente à Γ en A. Soit D et E les symétriques respectifs des points B et A par rapport à P.

Soit alors ω_1 le cercle circonscrit au triangle DAC et soit ω_2 le cercle circonscrit au triangle APB. On note F le point d'intersection des cercles ω_1 et ω_2 autre que A, puis on note G le point d'intersection, autre que F, du cercle ω_1 avec la droite (BF).

Démontrer que les droites (BC) et (EG) sont parallèles.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Commençons par tracer une figure.



Une première remarque que l'on peut formuler est que, puisque P est le milieu des segments $[AE]$ et $[BD]$, le quadrilatère $ABED$ et un parallélogramme. Les droites (AB) et (DE) sont donc parallèles, de même que les droites (AD) et (BE).

Une seconde remarque frappante est que E semble appartenir au cercle ω_1. Après avoir vérifié sur une deuxième figure que c'était bien le cas, on s'empresse donc de démontrer ce premier résultat. Pour ce faire, on entame donc une chasse aux angles de droites :

$$(EA, ED) = (EA, AB) = (CA, CB) = (CA, CD).$$

Une chasse aux angles de droites indique alors que

$$(BC, EG) = (BC, BG) + (BG, EG) = (PB, BF) + (GF, GE) = (PA, AF) + (AF, AE) = 0°,$$

ce qui signifie bien que (BC) et (EG) sont parallèles.

Commentaire des correcteurs Une des raisons pour lesquelles on exige la présence d'une figure est qu'elle constitue un bon moyen de se forger des intuitions sur le problème ; c'est alors qu'il faut démontrer que ces intuitions sont correctes. Ainsi, sur beaucoup de dessins on voyait clairement que E est sur le cercle ω_1 ; cependant, peu d'élèves l'ont remarqué. Parallèlement, plusieurs élèves ont vu sur le dessin que E semblait appartenir au cercle ω_1, et ont alors utilisé cette propriété, mais ont oublié de la démontrer !

Exercice 3. Soit n un entier naturel non nul. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *n-positive* si, pour tous les réels $x_1, \ldots, x_n$ tels que $x_1 + \ldots + x_n = 0$, on a $f(x_1) + \ldots + f(x_n) \geqslant 0$.

a) Toute fonction 2020-positive est-elle nécessairement 1010-positive ?

b) Toute fonction 1010-positive est-elle nécessairement 2020-positive ?

Solution de l'exercice 3 Dans les deux solutions, on pose $n = 1010$.

a) Soit f une fonction $2n$-positive, et soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels tels que $x_1 + \ldots + x_n = 0$. En notant que $x_1 + \ldots + x_n + x_1 + \ldots + x_n = 0$ et que f est $2n$-positive, on constate que

$$0 \leqslant f(x_1) + \ldots + f(x_n) + f(x_1) + \ldots + f(x_n) = 2(f(x_1) + \ldots + f(x_n)),$$

ce qui montre bien que $f(x_1) + \ldots + f(x_n) \geqslant 0$, et donc que f est n-positive. La réponse est donc **oui** !

b) Soit f la fonction définie par $f(x) = -1$ si x est un entier tel que $x \equiv 1 \pmod{2n}$, et par $f(x) = n$ sinon. Alors f est n-positive. En effet, soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels tels que $x_1 + \ldots + x_n = 0$:

- ▷ S'il existe un entier k tel que $f(x_k) = n$, et puisque $f(x_i) \geqslant -1$ pour tout $i \neq k$, on sait que $f(x_1) + \ldots + f(x_k) \geqslant f(x_k) - (n-1) \geqslant 1$.
- ▷ Sinon, alors $x_k \equiv 1 \pmod{2n}$ pour tout k, donc $x_1 + \ldots + x_n \equiv n \not\equiv 0 \pmod{2n}$, de sorte que ce cas est en fait impossible.

Cependant, f n'est pas $2n$-positive. En effet, si $x_1 = 1 - 2n$ et $x_2 = x_3 = \ldots = x_{2n} = 1$, alors $x_1 + \ldots + x_{2n} = 0$ mais $f(x_1) + \ldots + f(x_{2n}) = -2n < 0$. La réponse est donc **non** !

Commentaire des correcteurs Les correcteurs ont repéré plusieurs confusions sur la notion de fonction. En effet, lafonction f considérée ne change pas selon qu'il y a 1010 ou 2020 nombres réels.

D'autre part, si l'on veut démontrer qu'une assertion est fausse (par exemple, si l'on souhaite démontrer que toute fonction f qui serait n-positive n'est pas nécessairement $2n$-positive), la manière la plus simple de procéder reste encore de présenter un contre-exemple.

Exercice 4. Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ une suite d'entiers naturels non nuls, et soit $b_0, b_1, b_2, \ldots$ la suite telle que $b_n = \text{PGCD}(a_n, a_{n+1})$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Est-il possible que tout entier naturel non nul soit égal à exactement un des termes $b_0, b_1, b_2, \ldots$?

Solution de l'exercice 4 La réponse est **oui**!

Dans la suite, on dira qu'une suite $(b_k)_{k \geqslant 0}$ est *agréable* si, pour tout $k \geqslant 0$, les entiers b_k et b_{k+2} sont premiers entre eux. Étant donnée une suite $(b_k)_{k \geqslant 0}$ agréable, posons $a_0 = b_0$ puis $a_k = b_{k-1} b_k$ pour tout $k \geqslant 0$. On constate alors que $\text{PGCD}(a_0, a_1) = b_0$ et que $\text{PGCD}(a_k, a_{k+1}) = b_k \text{PGCD}(b_{k-1}, b_{k+1}) = b_k$ pour tout $k \geqslant 1$. Il nous suffit donc de construire une suite $(b_k)_{k \geqslant 0}$ agréable telle que tout entier naturel non nul soit égal à exactement un des entiers $b_0, b_1, b_2, \ldots$

À cette fin, et pour tout $k \geqslant 1$, notons p_k le $k^{\text{ème}}$ plus petit nombre premier, et q_k le $k^{\text{ème}}$ plus petit entier composé et supérieur ou égal à 1. On remarque aisément que $p_k \geqslant 2k - 1$ et que $q_k \leqslant 2k$, donc que $p_k \geqslant q_k - 1$. On en déduit que $q_k \leqslant p_k + 1 < 2p_k < 2p_{k+2}$, donc que $\text{PGCD}(q_k, p_k) = \text{PGCD}(q_k, p_{k+2}) = 1$.

On pose alors $b_{4k} = p_{2k+1}$, $b_{4k+1} = p_{2k+2}$, $b_{4k+2} = q_{2k+1}$ et $b_{4k+3} = q_{2k+2}$ pour tout $k \geqslant 0$. Tout d'abord, tout entier naturel non nul est bien égal à exactement un des entiers $b_0, b_1, b_2, \ldots$. En outre, pour tout $k \geqslant 0$, et comme démontré ci-dessus :

- ▷ $\text{PGCD}(b_{4k}, b_{4k+2}) = \text{PGCD}(p_{2k+1}, q_{2k+1}) = 1$,
- ▷ $\text{PGCD}(b_{4k+1}, b_{4k+3}) = \text{PGCD}(p_{2k+2}, q_{2k+2}) = 1$,
- ▷ $\text{PGCD}(b_{4k+2}, b_{4k+4}) = \text{PGCD}(p_{2k+3}, q_{2k+1}) = 1$ et
- ▷ $\text{PGCD}(b_{4k+3}, b_{4k+5}) = \text{PGCD}(p_{2k+4}, q_{2k+2}) = 1$.

La suite $(b_k)_{k \geqslant 0}$ est donc bien une suite telle que recherchée, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs Beaucoup de constructions différentes ont été trouvées, menant à des preuves plus ou moins faciles. Une idée clé était de penser à choisir la suite (a_n) pour avoir une expression simple de la suite (b_n).

Souvent, une preuve par algorithme a été utilisée : après s'être ramenés à trouver une suite (b_n) telle que b_n et b_{n+2} seraient premiers entre eux, certains élèves ont invoqué un algorithme glouton, où l'on choisissait à chaque fois le plus petit entier b_n non pris qui convenait. Cet algorithme fonctionne effectivement, mais la preuve de correction de cet algorithme était très souvent incomplète :

- ▷ il faut tout d'abord préciser que l'on peut bien choisir un tel entier b_n à chaque étape, par exemple en invoquant l'infinité de l'ensemble des nombres premiers;
- ▷ il faut ensuite démontrer que, dans ce cas, tous les entiers seront bien pris; à cette fin, il suffisait par exemple de signaler qu'une infinité d'entiers b_n seraient des nombres premiers, et en déduire que tout nombre était effectivement pris.

Exercices Senior

Exercice 5. Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ une suite d'entiers naturels non nuls, et soit $b_0, b_1, b_2, \ldots$ la suite telle que $b_n = \mathrm{PGCD}(a_n, a_{n+1})$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Est-il possible que tout entier naturel non nul soit égal à exactement un des termes $b_0, b_1, b_2, \ldots$?

Solution de l'exercice 5 La réponse est **oui** !

Dans la suite, on dira qu'une suite $(b_k)_{k \geqslant 0}$ est *agréable* si, pour tout $k \geqslant 0$, les entiers b_k et b_{k+2} sont premiers entre eux. Étant donnée une suite $(b_k)_{k \geqslant 0}$ agréable, posons $a_0 = b_0$ puis $a_k = b_{k-1} b_k$ pour tout $k \geqslant 0$. On constate alors que $\mathrm{PGCD}(a_0, a_1) = b_0$ et que $\mathrm{PGCD}(a_k, a_{k+1}) = b_k \mathrm{PGCD}(b_{k-1}, b_{k+1}) = b_k$ pour tout $k \geqslant 1$. Il nous suffit donc de construire une suite $(b_k)_{k \geqslant 0}$ agréable telle que tout entier naturel non nul soit égal à exactement un des entiers $b_0, b_1, b_2, \ldots$

À cette fin, et pour tout $k \geqslant 1$, notons p_k le $k^{\text{ème}}$ plus petit nombre premier, et q_k le $k^{\text{ème}}$ plus petit entier composé et supérieur ou égal à 1. On remarque aisément que $p_k \geqslant 2k - 1$ et que $q_k \leqslant 2k$, donc que $p_k \geqslant q_k - 1$. On en déduit que $q_k \leqslant p_k + 1 < 2p_k < 2p_{k+2}$, donc que $\mathrm{PGCD}(q_k, p_k) = \mathrm{PGCD}(q_k, p_{k+2}) = 1$.

On pose alors $b_{4k} = p_{2k+1}$, $b_{4k+1} = p_{2k+2}$, $b_{4k+2} = q_{2k+1}$ et $b_{4k+3} = q_{2k+2}$ pour tout $k \geqslant 0$. Tout d'abord, tout entier naturel non nul est bien égal à exactement un des entiers $b_0, b_1, b_2, \ldots$. En outre, pour tout $k \geqslant 0$, et comme démontré ci-dessus :

- ▷ $\mathrm{PGCD}(b_{4k}, b_{4k+2}) = \mathrm{PGCD}(p_{2k+1}, q_{2k+1}) = 1$,
- ▷ $\mathrm{PGCD}(b_{4k+1}, b_{4k+3}) = \mathrm{PGCD}(p_{2k+2}, q_{2k+2}) = 1$,
- ▷ $\mathrm{PGCD}(b_{4k+2}, b_{4k+4}) = \mathrm{PGCD}(p_{2k+3}, q_{2k+1}) = 1$ et
- ▷ $\mathrm{PGCD}(b_{4k+3}, b_{4k+5}) = \mathrm{PGCD}(p_{2k+4}, q_{2k+2}) = 1$.

La suite $(b_k)_{k \geqslant 0}$ est donc bien une suite telle que recherchée, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs Beaucoup de constructions différentes ont été trouvées, menant à des preuves plus ou moins faciles. Une idée clé était de penser à choisir la suite (a_n) pour avoir une expression simple de la suite (b_n).

Souvent, une preuve par algorithme a été utilisée : après s'être ramenés à trouver une suite (b_n) telle que b_n et b_{n+2} seraient premiers entre eux, certains élèves ont invoqué un algorithme glouton, où l'on choisissait à chaque fois le plus petit entier b_n non pris qui convenait. Cet algorithme fonctionne effectivement, mais la preuve de correction de cet algorithme était très souvent incomplète :

- ▷ il faut tout d'abord préciser que l'on peut bien choisir un tel entier b_n à chaque étape, par exemple en invoquant l'infinité de l'ensemble des nombres premiers ;
- ▷ il faut ensuite démontrer que, dans ce cas, tous les entiers seront bien pris ; à cette fin, il suffisait par exemple de signaler qu'une infinité d'entiers b_n seraient des nombres premiers, et en déduire que tout nombre était effectivement pris.

Exercice 6. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x + f(y)) + x = f(f(2x) + y)$$

pour tous les réels x et y.

Solution de l'exercice 6 Tout d'abord, on constate aisément que, pour tout réel a, la fonction $f : x \to x + a$ est une solution du problème. Réciproquement, on va montrer qu'il n'existe pas d'autre solution.

Dans ce qui suit, on considère une fonction solution f, on pose $a = f(0)$, et on notera $\mathbf{E}(x, y)$ l'équation

$$f(x + f(y)) + x = f(f(2x) + y).$$

Tout d'abord, les équations $\mathbf{E}(x, 0)$ et $\mathbf{E}(0, 2x)$ montrent que $f(f(2x)) = f(x + a) + x$ et que $f(f(2x)) = f(2x + a)$. On en déduit que

$$f(2x + a) = f(f(2x)) = f(x + a) + x$$

et, si l'on pose $x = -a$, il s'ensuit même que $f(-a) = f(0) - a = 0$.

On considère alors un réel x quelconque, et on pose $y = -f(-2x) - a$ puis $z = -x + f(y)$. Comme $f(-a) = 0$, l'équation $\mathbf{E}(-x, y)$ montre que $f(z) - x = f(-a) = 0$, c'est-à-dire que $f(z) = x$. La fonction f est donc surjective.

Démontrons que f est également injective. Soit x et y deux réels tels que $f(x) = f(y)$, et soit $d = y - x$. Soit également t un réel quelconque, et soit z un antécédent de t par f. Les équations $\mathbf{E}(z/2, x)$ et $\mathbf{E}(z/2, y)$ démontrent que

$$f(t + x) = f(f(2z/2) + x) = f(z/2 + f(x)) + z/2 = f(z/2 + f(y)) + z/2 = f(t + y).$$

Si $d \neq 0$, cela signifie que f est d-périodique, ce qui prouve que $f(2x) = f(2x + 2d) = f(2y)$ et que $f(x + a) = f(x + a + d) = f(y + a)$. Mais alors l'équation $\mathbf{E}(x, 0)$ indique que

$$x = f^2(2x) - f(x + a) = f^2(2y) - f(y + a) = y,$$

contredisant le fait que $d \neq 0$.

La fonction f est donc bien injective. Puisque $\mathbf{E}(0, y)$ montre que $f(f(y)) = f(y + a)$, comme on l'a déjà mentionné ci-dessus, il s'ensuit que $f(y) = y + a$ pour tout réel y, ce qui conclut.

Solution alternative n°1 Comme précédemment, constate que les fonctions de la forme $f : x \to x + a$ sont des solutions, et on va montrer que ce sont les seules. À cette fin, on pose $a = f(0)$ et on note $\mathbf{E}(x, y)$ l'équation

$$f(x + f(y)) + x = f(f(2x) + y).$$

Soit alors y un nombre réel quelconque, et $x = y + a - f(y)$. Alors

$$\begin{aligned}
f(f(2x) + y + a) &= f(f(f(2x) + y)) && \text{d'après } \mathbf{E}(0, f(2x) + y) \\
&= f(f(x + f(y)) + x) && \text{d'après } \mathbf{E}(x, y) \\
&= f(f(2x) + x + f(y)) - x && \text{d'après } \mathbf{E}(x, x + f(y)) \\
&= f(f(2x) + y + a) - x && \text{car } f(2x) + y + a = f(2x) + x + f(y)
\end{aligned}$$

Cela signifie que $x = 0$, ou encore que $f(y) = y + a$, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs De nombreux élèves ont fourni une solution complète. Certaines preuves étaient impressionnantes par leur efficacité ! Par ailleurs, aucun élève n'a oublié de vérifier que les solutions trouvées vérifiaient bien l'équation fonctionnelle, ce qui fait très plaisir à voir. Voici, cependant, quelques erreurs qui sont revenues à plusieurs reprises :

- ▷ Plusieurs élèves ont raisonné en utilisant la continuité ou la dérivablité de la fonction. Aucune hypothèse concernant la continuité ne figurait dans l'énoncé, et ces raisonnements ne sont donc pas valides. De même, plusieurs élèves ont supposé d'office que f était un polynôme. Enfin, quelques élèves ont tenté d'interpréter, par une phrase, le comportement de f à partir de l'équation de l'énoncé : cependant, comme aucune propriété « évidente » de la fonction f ne se dégageait, ces tentatives se sont toutes avérées infructueuses.
- ▷ Quelques élèves ont confondu les notions de surjectivité et d'injectivité : après avoir montré que f était surjective, ils ont opéré des simplifications par f de l'équation en invoquant la surjectivité, alors que cette propriété relève de l'injectivité.
- ▷ Lorsqu'il faut composer plusieurs fois par f, il peut être judicieux d'employer différentes tailles ou couleurs de parenthésage : plusieurs élèves ont malheureusement fait des erreurs de calcul lors de leurs manipulations en oubliant ou en déplaçant des parenthèses.

Enfin, dans le cadre d'une équation fonctionnelle, nous recommandons de bien écrire à chaque fois les substitutions effectuées et, si l'on combine différentes équations, de bien écrire quelles équations sont combinées. Ce souci de structure permet non seulement au correcteur de comprendre que l'élève sait ce qu'il fait et de suivre le raisonnement de celui-ci, mais il permet également à l'élève de ne pas se perdre dans ses équations et faire des erreurs de calcul. En particulier, cela facilite grandement le travail de relecture par l'élève, et l'aidera donc souvent à détecter puis corriger des erreurs de calcul qui lui auraient coûté des points s'il ne les avait pas vues.

Exercice 7. Soit k et n deux entiers naturels non nuls, tels que $k \leqslant 2^n$. Morgane a écrit, sur son cahier, l'ensemble des n-uplets formés de 0 et de 1 : il y en a 2^n. On dit que deux n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont *voisins* s'ils ont $n-1$ termes en commun, c'est-à-dire s'il existe un seul entier i tel que $x_i \neq y_i$. Puis Morgane choisit k de ces n-uplets et les souligne. Elle effectue ensuite les opérations suivantes : lors de chaque opération, elle choisit un n-uplet dont deux voisins sont soulignés, et elle souligne également ce n-uplet.

Pour quelles valeurs de k Morgane peut-elle parvenir à souligner l'ensemble des n-uplets ?

Solution de l'exercice 7 Dans toute la suite, on assimilera nos n-uplets à des vecteurs de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, c'est-à-dire des vecteurs dont les n coordonnées sont des éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ainsi, on note

- $\mathbf{0}$ le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles,
- $\mathbf{a}_i$ le vecteur dont la $i^{\text{ème}}$ coordonnée vaut 1 et les autres valent 0
- $\mathbf{b}_{i,j}$ le vecteur dont les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ coordonnées valent 1 et les autres valent 0 ;

Dans un premier temps, nous allons montrer que l'entier $k = 1 + \lceil n/2 \rceil$ convient, où $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière *supérieure* du réel x, c'est-à-dire le plus petit entier supérieur ou égal à x. Pour ce faire, on peut supposer que Morgane a d'abord souligné les vecteurs $\mathbf{0}, \mathbf{b}_{1,2}, \mathbf{b}_{3,4}, \ldots, \mathbf{b}_{2k-3,2k-2}$; si n est pair, ce dernier vecteur est le vecteur $\mathbf{b}_{n-1,n}$ et, si n est impair, par abus de notation, on identifiera le vecteur $\mathbf{b}_{n,n+1}$ au vecteur $\mathbf{a}_n$. Dans ces conditions :

- si i est pair, alors $\mathbf{a}_i$ est voisin des deux vecteurs $\mathbf{0}$ et $\mathbf{b}_{i-1,i}$;
- si i est impair, avec $i \leqslant n-1$, alors $\mathbf{a}_i$ est voisin des deux vecteurs $\mathbf{0}$ et $\mathbf{b}_{i,i+1}$;
- si $i = n$ est impair, alors $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_n = \mathbf{b}_{2k-3,2k-2}$ est déjà souligné.

Ainsi, Morgane peut souligner chacun des vecteurs $\mathbf{a}_i$.

Une récurrence immédiate sur ℓ permet alors de montrer que Morgane peut souligner tout vecteur dont ℓ coordonnées sont égales à 1, et les $n-\ell$ autres sont égales à 0. On en conclut que tout entier k compris entre $1 + \lceil n/2 \rceil$ et 2^n convient.

Réciproquement, soit k un des entiers recherchés : démontrons que $k \geqslant 1 + \lceil n/2 \rceil$. Pour ce faire, on construit d'abord le graphe orienté dont les sommets sont les vecteurs de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ et dont les arêtes sont construites comme suit :

- si un vecteur $\mathbf{t}$ était un des k vecteurs que Morgane avait soulignés initialement, alors aucune arête n'arrive en $\mathbf{t}$;
- sinon, soit $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux voisins de $\mathbf{t}$ que Morgane avait soulignés avant de souligner $\mathbf{t}$: le graphe contient une arête qui va de $\mathbf{u}$ vers $\mathbf{t}$, et une autre arête qui va de $\mathbf{v}$ vers $\mathbf{t}$.

Introduisons maintenant quelques notions et concepts. On dit qu'un ensemble S de vecteurs est un ensemble *initial* si toute arête entrant en un sommet de S provient d'un autre sommet de S. On dit également que S est *connexe* si, quitte à prendre les arêtes dans le mauvais sens, on peut relier n'importe quel vecteur de S à n'importe quel autre sans sortir de S. En outre, on dit que les *sources* de S sont les vecteurs de S que Morgane avait soulignés initialement, c'est-à-dire ceux en lesquels n'entre aucune arête. Enfin, on dit qu'une coordonnée i est une *variable* de S s'il existe deux vecteurs $\mathbf{t}$ et $\mathbf{t}'$ de S tels que $\mathbf{t}_i \neq \mathbf{t}'_i$.

Nous allons maintenant démontrer la propriété $\mathcal{P}_\ell$ par récurrence forte sur ℓ :

> Soit S un ensemble initial connexe contenant ℓ vecteurs et m sources. Alors S a au plus $2(m-1)$ coodonnées variables.

Tout d'abord, la propriété $\mathcal{P}_1$ est évidente, puisque S est alors réduit à un seul vecteur, qui est lui-même une source, et n'a donc aucune coordonnée variable. Soit maintenant $\ell \geqslant 2$

un entier tel que les propriétés $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_{\ell-1}$ soient toutes vraies, et soit S un ensemble initial connexe contenant ℓ vecteurs, m sources, et c coordonnées variables.

Notons $\mathbf{t}$ le dernier vecteur, parmi ceux appartenant à S, que Morgane a souligné. Si $\mathbf{t}$ est une source, c'est que S n'est formé que de sources, dont ne contient aucune arête, en contradiction avec le fait que S soit connexe et que $\ell \geqslant 2$. Ainsi, il existe deux arêtes $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{t}$ et $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{t}$, provenant de deux autres vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de S. Soit i et j les deux coordonnées telles que $\mathbf{t}_i \neq \mathbf{u}_i$ et $\mathbf{t}_j \neq \mathbf{v}_j$, et soit S' l'ensemble $S \setminus \{\mathbf{t}\}$.

- ▷ Si S' est connexe, on constate aisément que les coordonnées variables de S sont celles de S'. Puisque S' contient $\ell - 1$ sommets et m sources, les ensembles S et S' ont donc bien $2(m-1)$ coordonnées variables au maximum.
- ▷ Si S' n'est pas connexe, alors on peut le couper en deux ensembles initiaux connexes, U et V, qui contiennent respectivement les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. L'un contient ℓ_u vecteurs, m_u sources, et c_u coordonées variables, tandis que l'autre contient ℓ_v vecteurs, m_v sources, et c_v coordonées variables. Puisque $\ell_u \leqslant \ell - 1$ et $\ell_v \leqslant \ell - 1$, on sait que $c_u \leqslant 2(m_u - 1)$ et que $c_v \leqslant 2(m_v - 1)$.

  Or, les sources de S sont celles de U et de V, et nulle source ne peut appartenir à la fois à U et à V, de sorte que $m = m_u + m_v$. D'un autre côté, on constate aisément que les coordonnées variables de S sont soit celles de U, soit celles de V, soit i et j. Ainsi, l'ensemble S a au plus $c_u + c_v + 2 \leqslant 2(m_u + m_v - 1) = 2(m-1)$ coordonnées variables, ce qui démontre $\mathcal{P}_\ell$.

Remarquons enfin que l'ensemble $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ lui-même est un ensemble initial connexe, et qu'il contient n variables et k sources. La propriété $\mathcal{P}_{2^n}$ montre donc que $n \leqslant 2(k-1)$, c'est-à-dire que $k \geqslant 1 + \lceil n/2 \rceil$. Les entiers recherchés sont donc bien les entiers compris entre $1 + \lceil n/2 \rceil$ et 2^n.

<u>*Solution alternative n°1*</u> On démontre comme ci-dessus que tout entier $k \geqslant 1 + \lceil n/2 \rceil$ convient, et il ne nous reste maintenant plus qu'à montrer que l'on doit nécessairement avoir $k \geqslant 1 + \lceil n/2 \rceil$. Pour ce faire, on va procéder par récurrence sur n.

Tout d'abord, pour $n = 1$ et $n = 2$, si Morgane ne souligne qu'un seul vecteur, aucun des autres vecteurs non soulignés ne pourra avoir deux voisins soulignés. On en déduit, dans ces cas-là, que $k \geqslant 2$, c'est-à-dire que $k \geqslant 1 + \lceil n/2 \rceil$.

Supposons maintenant que $n \geqslant 3$, et que Morgane a souligné k vecteurs, de sorte qu'elle pourra ensuite parvenir à souligner chacun des $2^n - k$ vecteurs restants. Morgane numérote alors les 2^n vecteurs dans l'ordre dans lequel elle les a soulignés : elle peut donc choisir les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ de manière arbitraire, et elle pourra ensuite souligner les vecteurs $v_{k+1}, \ldots, v_{2^n}$. En particulier, on constate que, pour tout $\ell \leqslant k+1$, le vecteur v_ℓ est voisin de deux vecteurs v_i et v_j tels que $1 \leqslant i < j < \ell$.

Soit alors i et j deux entiers tels que $1 \leqslant i < j \leqslant k$ et tels que v_i et v_j soient tous les deux voisins du vecteur v_{k+1}. Soit ensuite s et t les deux coordonnées en lesquelles les vecteurs v_i et v_j diffèrent l'un de l'autre. Morgane décide alors d'effacer les coordonnées s et t de l'ensemble des 2^n vecteurs.

Elle se retrouve ainsi avec 2^{n-2} vecteurs à $n-2$ coordonnées, chacun étant présent en quatre exemplaires. Notons $\phi(v)$ le vecteur à $n-2$ coordonnées obtenu en effaçant les coordonnées s et t du vecteur v. Parmi les 2^{n-2} vecteurs obtenus, Morgane décide, initialement, de souligner les vecteurs $\phi(v_1), \phi(v_2), \ldots, \phi(v_k)$: puisque $\phi(v_i) = \phi(v_j)$, elle a souligné au plus $k-1$ vecteurs.

En outre, si deux vecteurs v et v', à n coordonnées, sont voisins l'un de l'autre, alors les vecteurs $\phi(v)$ et $\phi(v')$ sont soit égaux, soit voisins. Ainsi, Morgane peut toujours souligner, dans cet ordre, les vecteurs $\phi(v_{k+1})$ – qui est égal à $\phi(v_i)$ et à $\phi(v_j)$ – puis $\phi(v_{k+2}), \ldots, \phi(v_{2^n})$, quitte à resouligner un vecteur déjà souligné.

Par conséquent, en soulignant au départ $k-1$ vecteurs à $n-2$ coordonnées, Morgane est bien parvenue à souligner l'intégralité des 2^{n-2} vecteurs à $n-2$ coordonnées. L'hypothèse de récurrence indique donc que $k-1 \geqslant \lceil (n-2)/2 \rceil + 1$, c'est-à-dire que $k \geqslant \lceil n/2 \rceil + 1$, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs Cet exercice très difficile se composait de deux parties :

- ▷ Tout d'abord, il fallait constater, puis démontrer, que $k = \lceil n/2 \rceil + 1$ convenait.
- ▷ Puis il fallait démontrer qu'on ne pouvait pas faire mieux.

La première partie était déjà difficile. De nombreux élèves ont remarqué que $k = n$ convenait, sauf pour $n = 1$, et ont ensuite tenté (en vain !) de démontrer qu'on ne pouvait pas faire mieux, en procédant par récurrence sur n. Le fait que la borne proposée, et donc le prototype de récurrence sur n, ne fonctionne pas pour $n = 1$, aurait pu être un indice qu'il fallait rechercher une autre solution.

Par ailleurs, les correcteurs ont constaté avec plaisir que, parmi les élèves ayant obtenu une des deux bornes $k = n$ ou bien $k = \lceil n/2 \rceil + 1$, la quasi-totalité a réussi à démontrer que leur construction fonctionnait effectivement.

La seconde partie, quant à elle, était manifestement très difficile. Par conséquent, seul un élève est parvenu à démontrer que l'on ne pouvait effectivement pas faire mieux que $k = \lceil n/2 \rceil + 1$.