ENVOI 2 : ALGÈBRE
CORRIGÉ

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient x, y des réels strictement positifs. Montrer que :

$$x+\frac{y^2}{x} \geqslant 2y,$$

et trouver les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 1 L'inégalité de la moyenne donne

$$x+\frac{y^2}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \frac{y^2}{x}} = 2y$$

Supposons qu'on a égalité, alors $x = \frac{y^2}{x}$ donc $x^2 = y^2$ donc $x = y$. Réciproquement si $x = y$, $x + \frac{y^2}{x} = y + \frac{y^2}{y} = 2y$ on a bien égalité.
Commentaire des correcteurs Le problème est très bien réussi ! Attention à bien justifier que les cas d'égalités annoncés sont bien les seuls cas d'égalité possibles.

Exercice 2. Soit $x \geqslant 0$ un réel. Montrer que :

$$1 + x^2 + x^6 + x^8 \geqslant 4x^4,$$

et trouver les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 2 On utilise l'inégalité arithmético-géométrique, dans le cas $n = 4$. On obtient $1 + x^2 + x^6 + x^8 \geqslant 4x^{\frac{2+6+8}{4}} = 4x^4$.
Supposons qu'on a égalité. D'après le cas d'égalité $x^2 = 1$, donc $x = 1$. Réciproquement si $x = 1$, on a $1 + x^2 + x^6 + x^8 = 4 = 4x^4$.
Commentaire des correcteurs Le problème très bien réussi ! Certains élèves ont approché ce problème avec des polynômes plutôt qu'avec des inégalités.

Exercice 3. Soit a, b, c des nombres réels. Montrer que :

$$2a^2 + 20b^2 + 5c^2 + 8ab - 4bc - 4ac \geqslant 0,$$

et trouver les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 3 L'inégalité est équivalente à $4bc + 4ac - 8ab \leqslant 2a^2 + 20b^2 + 5c^2$. Or on sait que $4ac = 2 \times a \times (2c) \leqslant a^2 + (2c)^2 = a^2 + 4c^2$ et que $4bc = 2 \times c(2b) \leqslant 4b^2 + c^2$. On a également $-8ab = 2 \times (-a) \times (4b) \leqslant a^2 + 16b^2$. En sommant toutes ces inégalités, on obtient $4bc + 4ac - 8ab \leqslant 2a^2 + 20b^2 + 5c^2$.
Supposons qu'on a égalité, dans ce cas on a égalité dans les trois inégalités utilisées : on a donc $a = 2c$, $c = 2b$ donc $a = 4b$ et $-a = 4b$. En particulier $-a = a$ donc $a = 0$ donc b et c sont également nuls. Réciproquement, si $a = b = c = 0$, on a bien égalité.
On aurait pu également remarquer que $2a^2 + 20b^2 + 5c^2 + 8ab - 4bc - 4ac = (a+4b)^2 + (a-2c)^2 + (2b-c)^2 \geqslant 0$ et trouver de la même façon le cas d'égalité.
Commentaire des correcteurs Le problème est très bien réussi et tous les élèves ont trouvé la factorisation. Attention, le cas d'égalité était un peu élaboré dans cet exercice.

Exercice 4. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> En évaluant en $y = 0$ on obtient $f(x)f(0) = f(0) + x$ pour tout réel x. Pour $x = 1$, on obtient que $f(0) \neq 0$, sinon on aurait $1 = 0$. En évaluant en $x = 0$ on obtient $f(0)^2 = f(0)$ donc $f(0) = 1$ donc $f(x) = 1 + x$ pour tout x réel.
Réciproquement soit f la fonction telle que $f(x) = 1 + x$ pour tout x réel et soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $f(x)f(y) = (1 + x)(1 + y) = 1 + xy + x + y = f(xy) + x + y$ donc f vérifie bien l'équation. L'unique solution de l'équation est donc la fonction f telle que $f(x) = 1 + x$ pour tout x réel.
<u>Commentaire des correcteurs</u> L'exercice est globalement bien réussi. Cependant, il faut bien distinguer deux parties dans une équation fonctionnelle :

— L'analyse qui consiste à choisir une fonction f vérifiant l'équation et déterminer les propriétés vérifiée par f. Ici, on établit que si f est une solution de l'équation, alors pour tout réel x, $f(x) = x + 1$.

— La synthèse qui consiste à vérifier que réciproquement, la fonction f qui à x associe $x + 1$ est bien solution de l'équation.

Certains élèves ont oublié la deuxième partie et ont été pénalisés.

Exercice 5. Trouver tous les triplets de réels (a, b, c) vérifiant le système d'égalités :

$$\begin{cases} a(b^2 + c) = c(c + ab) \\ b(c^2 + a) = a(a + bc) \\ c(a^2 + b) = b(b + ac). \end{cases}$$

Solution de l'exercice 5 Les égalités se réécrivent $ab(b - c) = c(c - a)$, $bc(c - a) = a(a - b)$ et $ca(a - b) = b(b - c)$. En multipliant ces trois égalités, on obtient $(abc)^2(c - a)(b - c)(a - b) = abc(c - a)(b - c)(a - b)$. En particulier deux cas se présentent :

— Soit $abc = 0$. Les égalités étant cycliques, supposons $a = 0$. Par la première égalité $c^2 = 0$ donc $c = 0$. Par la troisième égalité $b^2 = 0$ donc $b = 0$

— Soit deux des éléments parmi a, b, c sont égaux, on suppose $a = b$. Dans ce cas $bc(c - a) = 0$. Si $b = 0$ ou $c = 0$ on retombe dans le cas précédent, sinon $a = b = c$.

— Soit $abc = 1$, dans ce cas $a, b, c.$ sont non nuls Les égalités se réécrivent : $b - c = c^2(c - a)$, $c - a = a^2(a - b)$ et $a - b = b^2(b - c)$. En particulier $a - b$, $b - c$ et $c - a$ sont de même signe, mais de somme nulle et on a donc nécessairement $a - b = b - c = c - a = 0$ i.e; $a = b = c$.

Commentaire des correcteurs Beaucoup d'élèves ont rendu une copie à ce problème mais rares sont ceux qui ont eu la totalité des points. En effet il y a eu plusieurs d'erreurs récurrentes :

— Si $a \geqslant b$ et $c \geqslant d$, on n'a pas nécessairement $ac \geqslant bd$. Cela est vrai pour des nombres réels positifs, mais pas pour des nombres réels négatifs : par exemple $2 \geqslant -1$, $0 \geqslant -1$ mais $0 \times 2 = 0 < (-1) \times (-1) = 1$.

— Plusieurs élèves ont supposé $a \geqslant b \geqslant c$. Pourtant on ne peut pas faire une telle supposition puisque le système n'est pas symétrique : échanger a et b change totalement le système. En revanche, le système est cyclique : remplacer a par b, b par c et c par a ne le change pas. On peut donc supposer que a est le plus grand, mais on ne peut pas supposer d'inégalité supplémentaire sur b et c.

— Certains oublient de vérifier que $a = b = c$ est une solution : il faut le faire.

Exercice 6. Soient $a, b, c > 0$ tels que : $a + b + c = 1$. Montrer que :

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 6 \geqslant 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} + \sqrt{\frac{1-c}{c}} + \sqrt{\frac{1-b}{b}}\right),$$

et déterminer les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 6 Le terme de droite de l'inégalité vaut $2\sqrt{2}(\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{a+c}{b}})$. On utilise l'inégalité arithmético-géométrique : $2\sqrt{2\frac{b+c}{a}} \leqslant 2 + \frac{b+c}{a}$. De même $2\sqrt{\frac{b+a}{c}} \leqslant 2 + \frac{b+a}{c}$ et $2\sqrt{\frac{a+c}{b}} \leqslant 2 + \frac{a+c}{b}$. En sommant ces trois inégalités, on obtient

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 6 \geqslant 2\sqrt{2}(\sqrt{\frac{1-a}{a}} + \sqrt{\frac{1-c}{c}} + \sqrt{\frac{1-b}{b}})$$

Supposons qu'on a égalité, alors en regardant le premier cas d'égalité, on a $\frac{b+c}{a} = 2$ donc $1 - a = 2a$ donc $a = \frac{1}{3}$. En regardant les deux autres cas d'égalité on obtient $a = b = c = \frac{1}{3}$. Réciproquement si $a = b = c = \frac{1}{3}$, $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 6 = 12$ et $2\sqrt{2}(\sqrt{\frac{1-a}{a}} + \sqrt{\frac{1-c}{c}} + \sqrt{\frac{1-b}{b}}) = 2\sqrt{2}(3 \times \sqrt{2}) = 12$; on a bien égalité.

Commentaire des correcteurs Le problème est globalement bien réussi. Une minorité d'élèves ont employé des inégalités dans le mauvais sens ou effectué des manipulations superflues. Attention à ne pas oublier le cas d'égalité !

Exercice 7. Soit a, b, c des réels strictement positifs tels que : $ab + bc + ca = abc$. Montrer que :

$$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} \leqslant \frac{1}{6},$$

et trouver les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 7 Posons $u = \frac{1}{a}$, $v = \frac{1}{b}$, $w = \frac{1}{c}$. En divisant par abc, la condition se réécrit $u + v + w = 1$. L'inégalité voulue se réécrit $\frac{u^2v^2}{u^2+w^2} + \frac{u^2w^2}{u^2+w^2} + \frac{v^2w^2}{v^2+w^2} \leqslant \frac{1}{6}$. On utilise l'inégalité arithmético-géométrique sur les dénominateurs : $u^2 + v^2 \geqslant 2uv$ et similairement sur les deux autres. On obtient $\frac{u^2v^2}{u^2+w^2} + \frac{u^2w^2}{u^2+w^2} + \frac{v^2w^2}{v^2+w^2} \leqslant \frac{1}{2}(uv + vw + uw)$. Or $1 = (u+v+w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + wu) \geqslant 3(uv + vw + uw)$ par lemme du tourniquet. En particulier $uv + vw + uw \leqslant \frac{1}{3}$ donc $\frac{u^2v^2}{u^2+w^2} + \frac{u^2w^2}{u^2+w^2} + \frac{v^2w^2}{v^2+w^2} \leqslant \frac{1}{6}$.
Pour les cas d'égalité, on a égalité dans le lemme du tourniquet, donc $u = v = w$ donc $a = b = c$. En réinjectant dans la condition, $3a^2 = a^3$ donc $a = b = c = 3$. Réciproquement si $a = b = c = 3$, on a $\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} = \frac{3}{2\times 9} = \frac{1}{6}$ on a bien égalité.
Commentaire des correcteurs Le problème est bien réussi par les copies qui l'ont traité. Attention toutefois aux cas d'égalités : il faut préciser dans quelle inégalité utilisée vous regardez le cas d'égalité, calculer chaque variable (ce qui se fait avec la condition imposée sur les variables) et ne pas oublier alors de vérifier qu'on a égalité ! Il faut également penser à énoncer les inégalités qu'on utilise. Attention à l'inégalité des mauvais élèves : certains se sont trompés de sens d'inégalité, d'autres l'ont utilisé pour des nombres négatifs et aboutissent à des résultats faux.

Exercice 8. Soient $a_1, \ldots, a_{2019}$ des entiers positifs. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) il existe un réel x tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, 2019\}$, on a : $a_i = \lfloor ix \rfloor$

(ii) pour tous $i, j \in \{1, \ldots, 2019\}$ vérifiant $i + j \leqslant 2019$, on a : $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$.

Solution de l'exercice 8 Prouvons tout d'abord le sens direct : s'il existe x réel tel que pour tout i entre 1 et 2019, $a_i = \lfloor ix \rfloor$, et si on se donne i, j entre 1 et 2019 tels que $i + j \leqslant 2019$, alors $(i + j)x = ix + jx \geqslant \lfloor ix \rfloor + \lfloor jx \rfloor = a_i + a_j$ et $(i + j)x = ix + jx < \lfloor ix \rfloor + 1 + \lfloor jx \rfloor + 1 = a_i + a_j + 2$, donc $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} < a_i + a_j + 2$. Comme les a_i sont entiers, on a donc $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$.
Réciproquement supposons que pour tout i, j entre 1 et 2019 tels que $i + j \leqslant 2019$, $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$. Trouver x tel que pour tout i entre 1 et 2019, $a_i = \lfloor ix \rfloor$ revient à trouver x tel que pour tout i entre 1 et 2019, $a_i \leqslant ix < a_i + 1$, c'est-à-dire tel que pour tout i, $\frac{a_i}{i} \leqslant x < \frac{a_i+1}{i}$. Il suffit donc de montrer que le maximum des $\frac{a_i}{i}$ pour i entre 1 et 2019 est strictement inférieur au minimum des $\frac{a_j+1}{j}$ pour j entre 1 et 2019, ou plus simplement que $\frac{a_i}{i} \leqslant \frac{a_j+1}{j}$ pour tout i, j entre 1 et 2019.
Montrons cela par récurrence forte sur $m = \max(i, j)$. Si $m = 1$, $i = j = 1$ donc l'inégalité est évidente. Pour l'hérédité, supposons l'inégalité vraie pour tout i, j entre 1 et m. On veut montrer l'inégalité $\frac{a_i}{i} < \frac{a_j+1}{j}$, où $1 \leqslant i, j \leqslant m + 1$. Il y a trois cas à traiter :

— Si $i = j$ l'inégalité est évidente.
— Si $i < j$, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $(i, j-i)$: $a_j \geqslant a_i + a_{j-i} > a_i + (j-i)\frac{a_i}{i} - 1 = a_i \times \frac{j}{i} - 1$ donc $\frac{a_j+1}{j} > \frac{a_i}{i}$
— Si $i > j$, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $(i - j, j)$: $a_i \leqslant a_j + a_{i-j} + 1 < a_j + \frac{(i-j)(a_j+1)}{j} = a_j \frac{i}{j} + \frac{i-j}{j} < (a_j + 1)\frac{i}{j}$ donc $\frac{a_i}{i} < \frac{a_j+1}{j}$

Commentaire des correcteurs L'exercice était difficile et seulement un nombre très réduit d'élèves sont parvenus à montrer la seconde implication. La première implication est dans l'ensemble bien abordée.

Exercice 9. Soit a, b, c, d des réels strictement positifs tels que : $a+b+c+d=1$. Montrer que :

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+bc^2+c^3}+\frac{c^4}{c^3+c^2d+cd^2+d^3}+\frac{d^4}{d^3+d^2a+da^2+a^3} \geqslant \frac{1}{4},$$

et déterminer les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 9 Dans cette solution, on va utiliser à plusieurs reprises l'inégalité $2(x^2+y^2) \geqslant (x+y)^2 \quad (*)$, valable pour tous réels x, y avec égalité si et seulement si $x = y$. Déjà notons que $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 = (a^2+b^2)(a+b)$. En particulier l'inégalité se réécrit $\sum_{\text{cycl.}} \frac{a^4}{(a^2+b^2)(a+b)} \geqslant \frac{1}{4}$. Notons S la somme de gauche dans l'inégalité précédente. Chaque dénominateur des termes de S est symétrique en les deux variables qu'il contient, on cherche donc une relation entre S et $\sum_{cycl.} \frac{b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}$. Calculons la différence des deux termes :

$$S - \sum_{cycl.} \frac{b^4}{(a^2+b^2)(a+b)} = \sum_{cycl.} \frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)(a+b)} = \sum_{cycl.} \frac{a^2-b^2}{(a+b)} = \sum_{cycl.} a-b = 0$$

En particulier $S = \sum_{cycl.} \frac{b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}$ donc $2S = \sum_{cycl.} \frac{a^4+b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}$. Par $(*)$, $a^4+b^4 \geqslant \frac{(a^2+b^2)^2}{2}$ donc en sommant $2S \geqslant \sum_{cycl.} \frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$. $(*)$ donne de nouveau $a^2+b^2 \geqslant \frac{(a+b)^2}{2}$ donc en sommant $2S \geqslant \sum_{cycl.} \frac{a+b}{4} = \frac{2(a+b+c+d)}{4} = \frac{1}{2}$ donc $S \geqslant \frac{1}{4}$.

Supposons qu'on a égalité. Dans ce cas on a les égalités cycliques $a = b$, soit $a = b = c = d$. Par la condition sur la somme $4a = 1$ donc $a = \frac{1}{4}$.

Réciproquement si $a = b = c = d = \frac{1}{4}$, alors $a+b+c+d = 1$ et $S = \sum_{\text{cycl.}} \frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} = \sum_{\text{cycl.}} \frac{a^4}{4a^3} = \sum_{\text{cycl.}} \frac{a}{4} = 4\frac{a}{4} = \frac{1}{4}$ on a bien égalité.

Commentaire des correcteurs Le problème était difficile et peu sont ceux qui ont réussi à avoir une solution complète. Il était possible d'utiliser l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction qui à x associe $\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$, mais les cas d'égalité étaient eux plus délicats : pour les cas d'égalité, si sa dérivée seconde f'' est strictement positive sur l'ensemble des valeurs que prennent les variables sur lesquelles on veut utiliser l'inégalité, alors on a égalité des variables (si f'' est strictement positive sauf sur un nombre fini de points le raisonnement se tient). Néanmoins la convexité stricte de la fonction en quesion n'était pas claire, on attendait donc une justification. Attention aux additions de fractions.

Exercices Seniors

Exercice 10. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Solution de l'exercice 10 En évaluant en $y = 0$ on obtient $f(x)f(0) = f(0) + x$ pour tout réel x. Pour $x = 1$, on obtient que $f(0) \neq 0$, sinon on aurait $1 = 0$. En évaluant en $x = 0$ on obtient $f(0)^2 = f(0)$ donc $f(0) = 1$ donc $f(x) = 1 + x$ pour tout x réel.
Réciproquement soit f la fonction telle que $f(x) = 1 + x$ pour tout x réel et soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $f(x)f(y) = (1 + x)(1 + y) = 1 + xy + x + y = f(xy) + x + y$ donc f vérifie bien l'équation. L'unique solution de l'équation est donc la fonction f telle que $f(x) = 1 + x$ pour tout x réel.
Commentaire des correcteurs L'exercice est globalement bien réussi. Attention, lorsque l'on divise par un nombre, à bien vérifier que ce nombre est non nul. Il ne faut pas non plus oublier de contrôler que les solutions trouvées vérifient bien l'équation fonctionnelle.

Exercice 11. Soit x, y des réels. Montrer que :

$$|x| + |y| \leqslant |x - y| + |x + y|.$$

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> Si x et y sont positifs, $|x| + |y| = x + y = |x + y|$. Si x et y sont négatifs $|x| + |y| = -x - y = |x + y|$. Si x est positif et y négatif $|x| + |y| = x - y = |x - y|$. Si x est négatif et y positif $|x| + |y| = y - x = |x - y|$. Dans tous les cas par positivité de la valeur absolue $|x| + |y| \leqslant |x - y| + |x + y|$.
<u>Commentaire des correcteurs</u> Le nombre de cas traités dans les disjonctions de cas était très important (souvent 8), alors que ce nombre pouvait aisément être ramené à 2. Les preuves utilisant l'inégalité triangulaires sont parfaites et élégantes. Les preuves passant l'inégalité au carré étaient lourdes et n'étaient pas toujours justes.

Exercice 12. Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que pour tous réels x, y,

$$xP(x) + yP(y) \geqslant 2P(xy).$$

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Si $P(X) = cX$ avec $c \geqslant 0$, $xP(x) + yP(y) = c(x^2 + y^2) \geqslant 2cxy = 2P(xy)$ par inégalité de la moyenne, les polynômes de la forme cX avec $c \geqslant 0$ conviennent, montrons que ce sont les seuls. Supposons P non constant. En évaluant en $(x, 0)$ l'inégalité, on obtient $xP(x) \geqslant 2P(0)$. En regardant la limite en $+\infty$, on obtient que le coefficient dominant de P est forcément strictement positif (car P ne peut tendre vers $-\infty$). En évaluant en (x, x), on obtient $xP(x) \geqslant P(x^2)$. Le polynôme $XP(X)$ est de degré $\deg(P) + 1$, $P(X^2)$ est de degré $2\deg(P)$. Si $2\deg(P) > \deg(P) + 1$, alors $P(X^2) - XP(X)$ est un polynôme de degré $2\deg(P)$ de coefficient dominant strictement positif, donc il est strictement positif pour x assez grand, contradiction. En particulier $2\deg(P) \leqslant \deg(P) + 1$ donc P est un polynôme de degré au plus 1 et de coefficient dominant strictement positif.
Maintenant posons $P(X) = aX + b$ avec $a \geqslant 0$. En évaluant l'inégalité en (x, x) on obtient $ax^2 + bx \geqslant ax^2 + b$ donc $bx \geqslant b$. Pour $x = 2$, on obtient $b \geqslant 0$, pour $x = 0$ on obtient $b \leqslant 0$ donc $b = 0$. Ainsi $P(X) = aX$ avec $a \geqslant 0$ ce qui conclut.
<u>Commentaire des correcteurs</u> Les élèves partaient souvent du principe que le coefficient dominant était positif, cependant il faut le vérifier au début. De même, il fallait justifier le calcul du degré du polynôme. Enfin, il ne faut pas oublier de vérifier que les polynômes trouvés satisfont bien l'énoncé.

Exercice 13. Trouver toutes les suites périodiques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels strictement positifs, et telles que pour tout $n \geqslant 1$,

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n+1}} + x_n\right).$$

Solution de l'exercice 13 Soit $n \geqslant 1$. En multipliant la relation de récurrence par x_{n+1}, on obtient que $x_{n+2}x_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + x_{n+1}x_n)$. Ainsi $(x_{n+2}x_{n+1} - 1) = \frac{1}{2}(x_{n+1}x_n - 1)$. En particulier $x_{n+1}x_n - 1 = \frac{1}{2^{n-1}}(x_2x_1 - 1)$. Si la suite (x_n) est périodique, la suite $x_{n+1}x_n - 1$ l'est aussi de même période, ce qui n'est possible d'après l'équation précédente que si $x_2x_1 - 1 = 0$. Dans ce cas pour tout $n \geqslant 1$, $x_{n+1}x_n - 1 = 0$, donc $x_{n+1} = \frac{1}{x_n}$. En réinjectant cela dans l'équation de récurrence, on obtient que pour tout $n \geqslant 1$, $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+2} + x_n)$ donc $\frac{1}{2}x_{n+2} = \frac{1}{2}x_n$ soit $x_{n+2} = x_n$. En particulier (x_n) est 2-périodique et vérifie $x_2 = \frac{1}{x_1}$. On a donc $x_n = x_1$ si n est impair, $x_n = \frac{1}{x_1}$ si n est pair.
Réciproquement soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $x_n = a$ si n est impair, $x_n = \frac{1}{a}$ si n est pair. Comme $\frac{1}{x_{n+1}} = x_n$, on a $\frac{1}{2}(\frac{1}{x_{n+1}} + x_n) = x_n = x_{n+2}$ pour tout $n \geqslant 1$. La suite (x_n) est donc 2-périodique et vérifie la relation de récurrence donnée.
Les suites vérifiant l'énoncé sont les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $x_n = a$ si n est impair, $x_n = \frac{1}{a}$ si n est pair pour $a > 0$.
Commentaire des correcteurs Il y avait plusieurs solutions possibles. Plusieurs erreurs ont été faites avec les quantificateurs, notemment quelques confusion entre le $\forall$ et $\exists$. Il ne faut pas oublier de vérifier que les suites trouvées satisfont l'énoncé !

Exercice 14. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y.$$

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> En évaluant l'égalité en $(0, y)$, $f(f(y)) = f(0)^2 + y$. En particulier $f \circ f$ est bijective, donc f est injective et surjective donc bijective. Soit a tel que $f(a) = 0$. En évaluant en (a, a), $f(0) = f(af(a) + f(a)) = f(a)^2 + a = a$ donc $f(0) = a$. En particulier on obtient que $f(f(0)) = 0$. Comme pour tout y, $f(f(y)) = f(0)^2 + y$, en évaluant en $y = 0$, on obtient $f(0)^2 = 0$ donc $f(0) = 0$. En particulier, pour tout y, $f(f(y)) = y$.
Evaluons désormais l'égalité en $(x, 0)$, on obtient $f(xf(x)) = f(x)^2$. En évaluant l'égalité précédente en $f(x)$ on obtient $f(f(x)f(f(x))) = f(f(x))^2$ donc $f(xf(x)) = x^2$. En particulier $x^2 = f(x)^2$ pour tout x réel, donc pour tout réel x, $f(x) = \pm x$.
Montrons désormais que pour tout x, $f(x) = x$ ou pour tout x, $f(x) = -x$. Supposons qu'il existe a et b non nuls tels que $f(a) = a$ et $f(b) = -b$. En évaluant l'égalité initiale en (a, b), on obtient que $f(a^2 - b) = a^2 + b$, donc $a^2 + b$ vaut $a^2 - b$ ou $b - a^2$, ainsi $a = 0$ ou $b = 0$ ce qui est absurde. On en déduit donc que pour tout x, $f(x) = x$ ou pour tout x, $f(x) = -x$.
Réciproquement si $f(x) = x$ pour tout réel x, $f(xf(x) + f(y)) = f(x^2 + y) = x^2 + y = f(x)^2 + y$ donc f est solution. Si $f(x) = -x$ pour tout réel x, $f(xf(x) + f(y)) = f(-x^2 - y) = x^2 + y = f(x)^2 + y$ donc f est solution. Les solutions sont donc la fonction identité et son opposé.
<u>Commentaire des correcteurs</u> L'erreur la plus fréquente à été de confondre "$\forall x, f(x) = x$ ou $f(x) = -x$" et "$f(x) = x \forall x$ ou $f(x) = -x \forall x$".

Exercice 15. Soient $a_1, \dots, a_{2019}$ des entiers positifs. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) il existe un réel x tel que pour tout $i \in \{1, \dots, 2019\}$, on a : $a_i = \lfloor ix \rfloor$

(ii) pour tous $i, j \in \{1, \dots, 2019\}$ vérifiant $i + j \leqslant 2019$, on a : $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$.

Solution de l'exercice 15 Prouvons tout d'abord le sens direct : s'il existe x réel tel que pour tout i entre 1 et 2019, $a_i = \lfloor ix \rfloor$, et si on se donne i, j entre 1 et 2019 tels que $i + j \leqslant 2019$, alors $(i + j)x = ix + jx \geqslant \lfloor ix \rfloor + \lfloor jx \rfloor = a_i + a_j$ et $(i + j)x = ix + jx < \lfloor ix \rfloor + 1 + \lfloor jx \rfloor + 1 = a_i + a_j + 2$, donc $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} < a_i + a_j + 2$. Comme les a_i sont entiers, on a donc $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$.
Réciproquement supposons que pour tout i, j entre 1 et 2019 tels que $i + j \leqslant 2019$, $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$. Trouver x tel que pour tout i entre 1 et 2019, $a_i = \lfloor ix \rfloor$ revient à trouver x tel que pour tout i entre 1 et 2019, $a_i \leqslant ix < a_i + 1$, c'est-à-dire tel que pour tout i, $\frac{a_i}{i} \leqslant x < \frac{a_i+1}{i}$. Il suffit donc de montrer que le maximum des $\frac{a_i}{i}$ pour i entre 1 et 2019 est strictement inférieur au minimum des $\frac{a_j+1}{j}$ pour j entre 1 et 2019, ou plus simplement que $\frac{a_i}{i} < \frac{a_j+1}{j}$ pour tout i, j entre 1 et 2019.
Montrons cela par récurrence forte sur $m = \max(i, j)$. Si $m = 1$, $i = j = 1$ donc l'inégalité est évidente. Pour l'hérédité, supposons l'inégalité vraie pour tout i, j entre 1 et m. On veut montrer l'inégalité $\frac{a_i}{i} < \frac{a_j+1}{j}$, où $1 \leqslant i, j \leqslant m + 1$. Il y a trois cas à traiter :

— Si $i = j$ l'inégalité est évidente.

— Si $i < j$, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $(i, j-i)$: $a_j \geqslant a_i + a_{j-i} > a_i + (j-i)\frac{a_i}{i} - 1 = a_i \times \frac{j}{i} - 1$ donc $\frac{a_j+1}{j} > \frac{a_i}{i}$

— Si $i > j$, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $(i - j, j)$: $a_i \leqslant a_j + a_{i-j} + 1 < a_j + \frac{(i-j)(a_j+1)}{j} = a_j\frac{i}{j} + \frac{i-j}{j} < (a_j + 1)\frac{i}{j}$ donc $\frac{a_i}{i} < \frac{a_j+1}{j}$

Commentaire des correcteurs Plusieurs élèves se sont compliqués la tâche en cherchant une solution trop compliquée, difficile à rédiger et ont donc fini par faire une erreur. Pour éviter cela, il aurait fallu chercher à reformuler le problème pour le simplifier.

Exercice 16. Soit $1 < t < 2$ un nombre réel. Montrer que pour tout entier d suffisamment grand, il existe un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $a_d = 1$ et $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \{1, -1\}$, tel que :

$$|P(t) - 2019| \leqslant 1.$$

Solution de l'exercice 16 Soient $d \geqslant 2019$ un entier et $a_1 < \ldots < a_k$ les $d-$uplets de la forme $(\pm 1, \ldots, \pm 1)$, ordonnés par ordre lexicographique (en partant de la droite !, c'est-à-dire que $a_i > a_j$ si et seulement si le premier terme non nul de $a_i - a_j$ en partant de la droite est > 0), avec $k = 2^d$.
Pour passer de a_i à a_{i+1}, on regarde le premier -1 en partant de la droite dans a_i, on le change par un 1, et on remplace tous les 1 à sa droite par des -1. Par exemple si $d = 3$, les triplets sont dans l'ordre $a_1 = (-1, -1, -1)$, $a_2 = (-1, -1, 1)$, $a_3 = (-1, 1, -1)$, $a_4 = (-1, 1, 1) a_5 = (1, -1, -1)$, $a_6 = (1, -1, 1)$, $a_7 = (1, 1, -1)$ et $a_8 = (1, 1, 1)$.
On associe à $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{id})$ le polynôme $P_i(X) = \sum_{j=1}^{d} a_{ij} X^{j-1}$, de telle sorte que $M := -P_1(t) = P_k(t) = 1 + \ldots + t^{d-1} > d$.
Or $|P_{i+1}(t) - P_i(t)| = 2|t^l - (1 + \ldots + t^{l-1})|$ pour un certain $l \geqslant 0$ (qui dépend de i) pour tout i.
Montrons $t^l - (1 + \ldots + t^{l-1}) \leqslant 1$: cela équivaut à $t^{l+1} - t^l - (t^l - 1) \leqslant t - 1$ après multiplication par $t - 1$, soit après réarrangement $t^l(2 - t) + t \geqslant 2$, ce qui est vrai car $t^l \geqslant 1$.
Dès lors, $P_{i+1}(t)$ est plus grand que $P_i(t)$ d'au plus 2, ce qui montre que, puisque $2019 - t^d \in [-M; M]$, il existe i tel que $|P_i(t) - (2019 - t^d)| \leqslant 1$, ce qui conclut en posant $P = X^d + P_i$
Commentaire des correcteurs Les copies reçues étaient globalement bonnes. Cependant, la plupart des élèves oublient des éléments de rédactions importants. Quelques élèves ont proposé une preuve algorithmique alternative très jolie.

Exercice 17. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$(f(x)+y)(f(x-y)+1) = f(f(xf(x+1)) - yf(y-1)).$$

<u>*Solution de l'exercice 17*</u> Clairement, $f(x) = x$ est une solution ; on va montrer que c'est la seule. On pose dans la suite $a = f(0)$.
Avec $y = 0$ on a $f(f(xf(x+1))) = f(x)(f(x)+1)$ $(*)$ pour tout x.
Si on prend $y = -f(x)$ on voit que la fonction f admet des zéros.
Dès lors pour exploiter $(*)$ il est intéressant de choisir y tel que $f(f(xf(x+1)) - yf(y-1)) = f(f(xf(x+1)))$, ce qui est possible en prenant $y = z+1$ avec $f(z) = 0$. On a alors $(f(x)+z+1)(f(x-z)+1) = f(x)(f(x)+1)$, ce qui se simplifie avec $x = z$: $(z+1)(f(-1)+1) = 0$.
Si $z = -1$, on a $f(-1) = 0$, donc avec $x = 0, y = 1$, on a $a+1 = a$, une évidente contradiction.
On a donc montré $f(-1) = -1$. On reprend $x = 0, y = 1$ pour avoir $f(0) = 0$. Dès lors $y = 1$ dans l'équation montre que $(f(x)+1)(f(x-1)+1) = f(x)(f(x)+1)$ (1) d'après $(*)$.
$x = 0$ puis $x = -1$ dans l'équation originelle donne $y(f(-y)+1) = (y-1)(f(-y-1)+1)$ (2). Ainsi, si on avait $(1')$: $f(x) = f(x-1)+1$, on pourrait déduire de (2) $y(f(-y)+1) = (y-1)f(-y)$, puis $f(-y) = -y$, ce qui montrerait que f est l'identité.
Pour montrer $(1')$, commençons par prouver que $f(x) = 0 \iff x = 0$.
Soit t tel que $f(t) = 0$; d'après (1), on a $f(t-1) = -1$. (2) donne alors, avec $y = -t$, $t = 0$, comme voulu.
Montrons à présent $f(x) = -1 \iff x = -1$.
Si $f(t) = -1$, $(*)$ donne $f(f(tf(t+1))) = 0$ donc $tf(t+1) = 0$. Or $t \neq 0$ car $f(0) \neq -1$, donc $f(t+1) = 0$ et ainsi $t = -1$ comme voulu.
Pour montrer $(1')$ d'après (1), il suffit donc de voir que $f(-2) = f(-1)-1 = -2$. Or $f(2) = 2$ en utilisant (1) donc $(*)$ avec $x = -2$ donne $2 = f(-2) + f(-2)^2$ et donc $f(-2) \in \{-2, 1\}$. Mais si $f(-2) = 1$, (1) donne $f(-3) = 0$, impossible d'après ce qu'on a montré. Cela conclut la preuve de $(1')$ et donc la solution.
<u>Commentaire des correcteurs</u> L'exercice était assez délicat. Quelques élèves courageux ont avancé de façon substantielle dans le problème, voire même l'ont résolu complètement. Plusieurs élèves se sont contentés de vérifier que la fonction identité était solution, mais cela ne rapportait aucun point. En revanche, des élèves ont montré que si f est solution alors f est l'identité mais ont oublié de signaler que réciproquement l'identité était solution. Ces élèves ont alors perdu un point, conformément à l'usage en compétition.

Exercice 18. Soient P, Q deux polynômes à coefficients réels, non constants et premiers entre eux. Montrer qu'il existe au plus trois réels λ tels que :

$$P + \lambda Q = R^2,$$

où $R \in \mathbb{R}[X]$.

Solution de l'exercice 18 On procède par l'absurde en supposant l'existence de quatre réels distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ et quatre polynômes $R_1, \ldots, R_4$ tels que $P + \lambda_i Q = R_i^2$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.
On a $P' + \lambda_i Q' = 2R_i R_i'$ et donc $R_i \mid Q'(P + \lambda_i Q) - Q(P' + \lambda_i Q') = PQ' - QP'$.
Remarquons que si $T \mid R_i, R_j$ alors $T \mid R_i^2 - R_j^2 = (\lambda_i - \lambda_j)Q$ puis $T \mid R_i^2 - \lambda_i Q = P$ et donc T est constant, car P, Q sont premiers entre eux.
Dès lors les R_i sont deux à deux premiers entre eux et ainsi $R_1 R_2 R_3 R_4 \mid PQ' - P'Q$.
Soient A, B des polynômes non nuls ; le degré de $A + \lambda B$, si $\lambda \in \mathbb{R}$, est égal à $\max\{\deg(A), \deg(B)\}$, sauf si $\deg(A) = \deg(B)$ et $\lambda = -\frac{a}{b}$ où a, b sont les coefficients dominants de A et B respectivement, auquel cas il est plus petit.
Si $A = P$ et $B = Q$, cela montre que, soit $\deg R_i = \frac{1}{2} \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ pour tout i, et donc que $\deg(R_1 R_2 R_3 R_4) = 2 \max \deg\{P, Q\} > \deg(P) + \deg(Q) - 1 \geqslant \deg(PQ' - P'Q)$, soit il y a un R_i, tel que $\deg(R_i) < \deg(R_j)$ pour $j \neq i$; alors pour $A = P + \lambda_i Q =: P_1$ et $B = Q$ on voit que $\deg(R_i) = \frac{1}{2} \deg(P_1)$ et $\deg R_j = \frac{1}{2} \max\{\deg(P_1), \deg(Q)\}$ et donc $\deg(R_1 R_2 R_3 R_4) = \frac{3}{2} \max\{\deg(P_1), \deg(Q)\} + \frac{1}{2} \deg(P_1) > \deg(Q) + \deg(P_1) - 1 \geqslant \deg(P_1 Q' - P_1' Q) = \deg(PQ' - P'Q)$.
Par un argument sur les degrés, on a donc nécessairement $PQ' - P'Q = 0$ et ainsi $P \mid P'Q$. Or P et Q sont premiers entre eux donc $P \mid P'$, ce qui est une évidente contradiction à P non constant.
Commentaire des correcteurs Les copies reçues étaient d'un très bon niveau (à part quelques petites erreurs). Etant donné la grande difficulté supposée de l'exercice, c'était une agréable surprise !