PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 4 : COMBINATOIRE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 15 FÉVRIER 2020

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2005 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.
contact-pofm@animath.fr

Exercices Juniors

Exercice 1.
De combien de façons peut-on placer 7 tours sur un échiquier 7×7 telle qu'aucune tour ne puisse en attaquer une autre ?
Une tour peut attaquer une autre tour si elle se situe sur la même ligne ou la même colonne.

Exercice 2. Les entiers de 1 à 2020 sont écrits au tableau. Jacques a le droit d'en effacer deux et d'écrire à la place leur différence ou leur somme et de recommencer jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un entier. Est-il possible que l'entier obtenu à la fin soit 321 ?

Exercice 3. Andréa, Baptiste et Camille jouent au foot à trois. Un des joueurs est aux cages, les deux autres sont sur le terrain et essaient de marquer. Le joueur qui marque devient ensuite gardien pour le tir suivant.

Durant l'après-midi, Andréa a été sur le terrain 12 fois, Baptiste l'a été 21 fois et Camille a été aux cages 8 fois. Leur professeur sait qui a marqué le 6-ième but. Qui était-ce ?

Exercice 4. On choisit 5 diviseurs de 10^{2020}. Montrer qu'il y en a deux dont le produit est un carré.

Exercice 5. Martin a rempli chaque case d'une grille rectangulaire ayant 8 lignes et n colonnes avec l'une des quatre lettres P, O, F et M. Il se trouve que, pour toute paire de lignes distinctes, il existe au plus une seule colonne telle que ses intersections avec les deux lignes sont des cases ayant la même lettre. Quel est le plus grand entier n tel que cela est possible ?

Exercice 6. Dans 5 boites se trouvent respectivement $402, 403, 404, 405$ et 406 pierres. La seule opération autorisée est de prendre 4 pierres dans un tas ayant au moins 4 pierres et d'en mettre une dans chacun des autres tas. Quel est le plus grand nombre de pierres qu'il est possible d'avoir dans un seul tas ?

Exercice 7. Un mauvais sorcier a enfermé n mathématiciens. Il dispose de n couleurs. Le sorcier place sur la tête de chaque mathématcien un chapeau d'une des n couleurs ; deux chapeaux peuvent avoir la même couleur. Chaque mathématicien peut voir la couleur du chapeau de chacun de ses collègues mais pas la sienne. Les mathématiciens doivent alors tous en même en temps annoncer la couleur de leur chapeau. Si au moins un des mathématiciens devine correctement, tous les mathématiciens sont libres. Ils peuvent bien sûr se concerter sur une stratégie avant de connaître la couleur des chapeaux des autres mathématiciens.

Proposez une stratégie qui assure que les mathématiciens soient libérés.

Exercice 8. Un coloriage des entiers $\{1, 2, \ldots, 2020\}$ en bleu et rouge est dit *agréable* si il n'existe pas deux entiers distincts dans $\{1, 2, \ldots, 2020\}$ de même couleur dont la somme est une puissance de 2. Combien de tels coloriages existe-t-il ?

Exercice 9. Soit n un entier. On dispose de n couleurs, et chaque point d'un cercle est colorié de l'une de ces couleurs. Montrer qu'il existe deux droites parallèles qui intersectent le cercle en 4 points distincts de même couleur.

Exercices Seniors

Exercice 10.
On choisit 5 diviseurs de 10^{2020}. Montrer qu'il y en a deux dont le produit est un carré.

Exercice 11. Lors d'une fête, 2019 personnes s'assoient autour d'une table ronde en se répartissant de façon régulière. Après s'être assises, elles constatent qu'un carton indiquant un nom est posé à chacune des places et que personne n'est assis à la place où figure son nom. Montrer qu'on peut tourner la table de telle sorte que deux personnes (au moins) se retrouvent assises en face de leur nom.

Exercice 12. Martin a rempli chaque case d'une grille rectangulaire ayant 8 lignes et n colonnes avec l'une des quatre lettres P, O, F et M. Il se trouve que, pour toute paire de lignes distinctes, il existe au plus une seule colonne telle que ses intersections avec les deux lignes sont des cases ayant la même lettre. Quel est le plus grand entier n tel que cela est possible ?

Exercice 13. Soit $N > 1$ un entier. Alice et Bob jouent au jeu suivant. $2N$ cartes numérotées de 1 à $2N$ sont mélangées puis disposées dans une ligne, de manière à ce que les faces numérotées soient visibles. Chacun à leur tour, Alice et Bob choisissent une carte, soit celle tout à droite soit celle soit à gauche de la ligne, et la gardent pour eux, jusqu'à ce que toutes les cartes aient été prises. Alice commence. À la fin du jeu, chaque joueur calcule la somme des numéros des cartes qu'il a prises. Le joueur ayant la plus grande somme gagne. Un joueur dispose-t-il d'une façon de ne pas perdre ?

Exercice 14. On considère une grille de taille 2019×2019. Sur cette grille sont posés des cailloux. On dit qu'une configuration est *belle* s'il n'existe pas de parallélogramme formé par quatre cailloux $ABCD$, tels que A, B, C et D ne soient pas tous alignés.
Quel est le plus grand nombre de cailloux qu'il est possible de mettre dans une grille ?

Exercice 15. Un lycée comporte un nombre impair de classes, et, dans chaque classe, un nombre impair d'élèves. Un élève est choisi dans chaque classe pour faire parti du comité des élèves. Si le nombre de classes avec le plus de garçons que de filles est impair, montrer que le nombre de façon de former un comité des élèves contenant un nombre impair de garçons excède le nombre de façons de former un comité d'élèves contenant un nombre impair de filles.

Exercice 16. On considère une grille 2019×2019. On note $C_{i,j}$ la case sur la i-ième colonne et la j-ième ligne pour $1 \leqslant i, j \leqslant 2019$. Un coloriage de la grille est *formidable* si il n'existe pas d'entiers i, j, k et ℓ tels que $1 \leqslant i < \ell \leqslant 2019$, $1 \leqslant j < k \leqslant 2019$, et que les cases $C_{i,j}$, $C_{i,k}$ et $C_{\ell,j}$ soient de la même couleur.

Quel est le plus petit entier N tel qu'il existe un coloriage formidable avec N couleurs ?

Exercice 17.
Un super-domino est un pavé droit dans une grille en trois dimensions de l'une des trois formes suivantes : $1 \times 1 \times 2$, $1 \times 2 \times 1$ et $2 \times 1 \times 1$. Quels sont les entiers $a, b, c > 1$ tels qu'il est possible de paver un pavé droit de dimensions $a \times b \times c$ dans un grille en trois dimensions avec des super-dominos de sorte qu'il y ait autant de super-dominos de chacun des 3 types ?

Exercice 18. 2019 élèves participent à un concours et répondent chacun à 6 questions. À la fin du concours, on remarque que, parmi les bonnes réponses données par un quelconque groupe de 3 élèves, il y a au moins une réponse correcte à au moins 5 des 6 questions du concours. Quelle est la valeur minimale du nombre total de réponses correctes aux questions du concours ?