PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 27 NOVEMBRE 2019
à destination des élèves du groupe SENIOR

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n'est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies

- soit par voie postale, à l'adresse suivante :

  Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques
  11-13 rue Pierre et Marie Curie
  75005 Paris

- soit par voie électronique, à l'adresse suivante : `copies.ofm@gmail.com`

Exercice 1. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus, avec $AB \neq AC$. Soit Γ le cercle circonscrit à ABC, et D le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A. Soit E et F des points appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$, de sorte que $AE = AF$. Soit P le point d'intersection, autre que A, entre Γ et le cercle circonscrit à AEF.

Soit G et H les points d'intersection respectifs, autres que P, entre Γ et les droites (PE) et (PF). Enfin, soit J le point d'intersection entre les droites (AB) et (DG), et soit K le point d'intersection entre les droites (AC) et (DH).

Démontrer que le milieu du segment $[BC]$ appartient à la droite (JK).

Exercice 2. Chaque case d'un tableau de taille 8×8 peut être coloriée en blanc ou en noir, de telle sorte que chaque rectangle de taille 2×3 ou 3×2 contient deux cases noires ayant un côté en commun. Déterminer le nombre minimal de cases noires qu'il peut y avoir sur le tableau.

Exercice 3. Soit $P_1, P_2, \ldots, P_{2019}$ des polynômes non constants à coefficients réels tels que

$$P_1(P_2(x)) = P_2(P_3(x)) = \ldots = P_{2019}(P_1(x))$$

pour tout réel x. Démontrer que $P_1 = P_2 = \ldots = P_{2019}$.