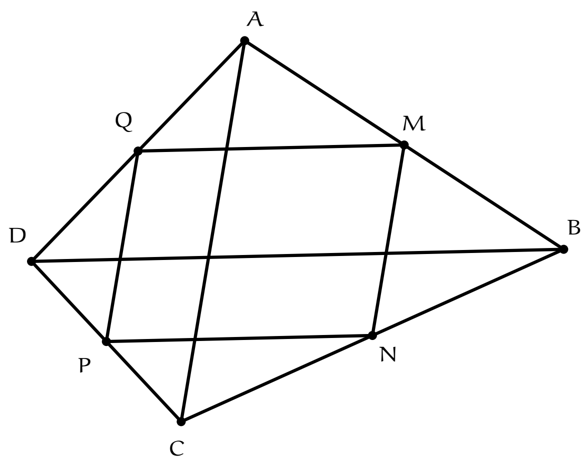
PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES 2019-2020

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE
CORRIGÉ

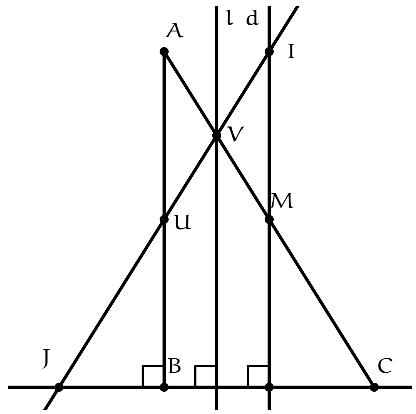
Exercices Juniors

Exercice 1. Soit $ABCD$ un quadrilatère et M, N, P, Q les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.
Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.



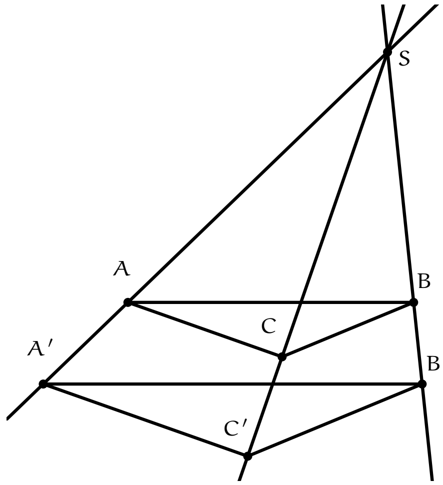
Solution de l'exercice 1 Puisque les points M et N sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[BC]$, les droites (MN) et (AC) sont parallèles. Puisque les points P et Q sont les milieux respectifs des côtés $[CD]$ et $[DA]$, les droites (PQ) et (AC) sont parallèles. Donc les droites (PQ) et (MN) sont parallèles. On obtient de la même façon que les droites (NP) et (MQ) sont parallèles. Donc les côtés opposés deux à deux du quadrilatère $MNPQ$ sont parallèles, ce qui en fait un parallélogramme.
Commentaire des correcteurs L'exercice est bien traité.

Exercice 2. Soit ABC un triangle rectangle en B. Soit M le point d'intersection de la médiane issue de B avec la droite (AC), et (d) la perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point M. Soit U le milieu du segment $[AB]$, V le milieu du segment $[AM]$, I le point d'intersection de la droite (UV) avec la droite (d), et J le point d'instersection de la droite (UV) avec la droite (BC).
Montrer que $AC = IJ$.



<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Les droites d et (AB) sont perpendiculaires à la droite (BC) donc elles sont parallèles. On obtient par le théorème de Thalès que $\frac{VI}{VU} = \frac{AV}{VM} = 1$ donc V est le milieu du segment $[UI]$. Le quadrilatère $AIMU$ a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme.
Les points U et M sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$ donc les droites (UM) et (BC) sont parallèles. Donc la droite (UM) est perpendiculaire au segment $[AB]$ et le quadrilatère $AIMU$ est un rectangle.
Soit l la droite perpendiculaire au segment $[BC]$ passant par V. Cette droite est la médiatrice du segment $[UM]$ et du segment $[AI]$ donc le point U est le symétrique du point M par rapport à la droite l et le point A est le symétrique du point I par rapport à la droite l donc la droite (AM) est la symétrique de la droite (UI) par rapport à la droite l. Puisque la droite (BC) est sa propre symétrique par rapport à la droite l, le point d'intersection de la droite (BC) avec la droite (UI) est le symétrique du point d'intersection de la droite (AM) avec la droite BC donc les points C et J sont symétriques par rapport à la droite l. La symétrie conserve les longueurs, donc $AC = IJ$.
<u>Commentaire des correcteurs</u> Même si l'argument semblait facile pour certains, on attendait une vraie justification, avec par exemple le théorème de Thalès. Attention à quelques confusions : une droite est bien la bissectrice d'un angle ou la médiatrice d'un segment, et non par exemple la bissectrice d'un segment.

Exercice 3. Soient d_1, d_2, d_3 des droites concourantes et A, A' des points sur la droite d_1, B, B' des points sur la droite d_2, C, C' des points sur la droite d_3 tels que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles et les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.
Montrer que les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.



Solution de l'exercice 3 Soit S le point de concours des trois droites. Puisque les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AS}{A'S} = \frac{BS}{B'S}$$

De même on trouve

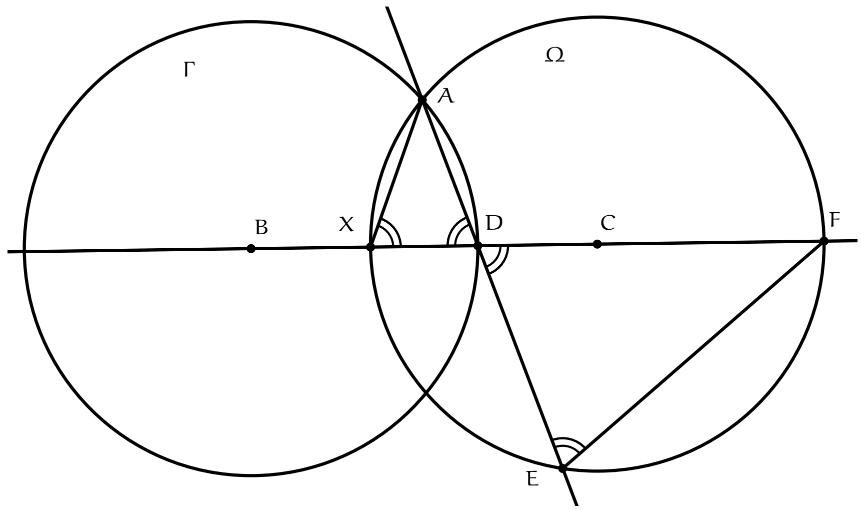
$$\frac{BS}{B'S} = \frac{CS}{C'S}$$

On déduit que

$$\frac{AS}{A'S} = \frac{CS}{C'S}$$

ce qui signifie, d'après le théorème de Thalès, que les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.
Commentaire des correcteurs L'exercice est bien réussi, la plupart des élèves ont remarqué l'utilisation du théorème de Thalès. attention à prendre en compte toutes les configurations, notemment les ordres possibles pour les sommets A, B et C.

Exercice 4. Soit ABC un triangle isocèle et obtus en A. Soit Γ le cercle de centre B passant par A, et Ω le cercle de centre C passant par A. Soit D le point d'intersection du cercle Γ avec le segment $[BC]$, E le deuxième point d'intersection de la droite (AD) avec le cercle Ω, et F le point d'intersection de la droite (BC) avec le cercle Ω qui n'est pas sur le segment $[BC]$.
Montrer que le triangle DFE est isocèle en F.

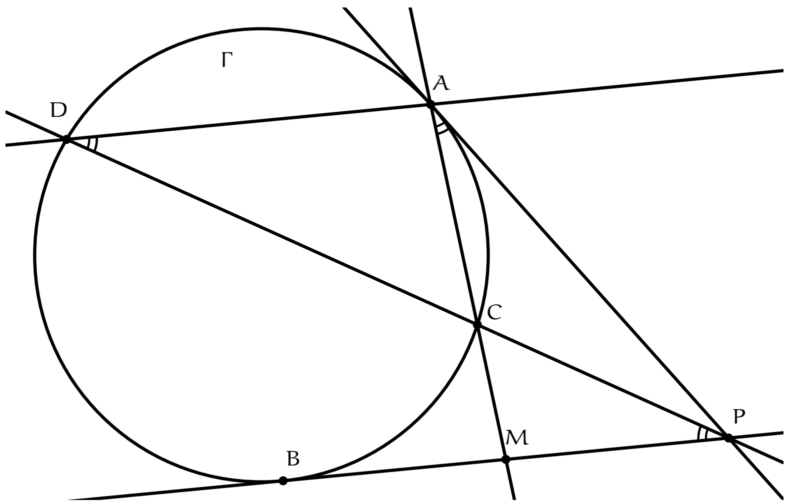


Solution de l'exercice 4 Soit X le point d'intersection du cercle Ω avec le segment $[BC]$. Les points B et C sont symétriques par rapport à la médiatrice du segment $[BC]$ donc les cercles Γ et Ω le sont aussi. Il vient que D et X sont symétriques par rapport à la médiatrice du segment $[BC]$. Le triangle DAX est donc isocèle en A et $\widehat{ADX} = \widehat{AXD}$.
Les points F, E, X et A sont cocycliques donc $\widehat{FEA} = \widehat{FXA}$. On déduit

$$\widehat{FED} = \widehat{FEA} = \widehat{FXA} = \widehat{DXA} = \widehat{XDA} = \widehat{FDE}$$

Ce qui donne bien que le triangle FDE est isocèle en F.
Commentaire des correcteurs Certains élèves ont noté des symétries dans la figure, mais il fallait veiller à la justifier de façon rigoureuse.

Exercice 5. Soit Γ un cercle, P un point à l'extérieur du cercle. Les tangentes au cercle Γ passant par le point P sont tangentes au cercle Γ en A et B. Soit M est le milieu du segment $[BP]$ et C le point d'intersection de la droite (AM) et du cercle Γ. Soit D la deuxième intersection de la droite (PC) et du cercle Γ.
Montrer que les droites (AD) et (BP) sont parallèles.

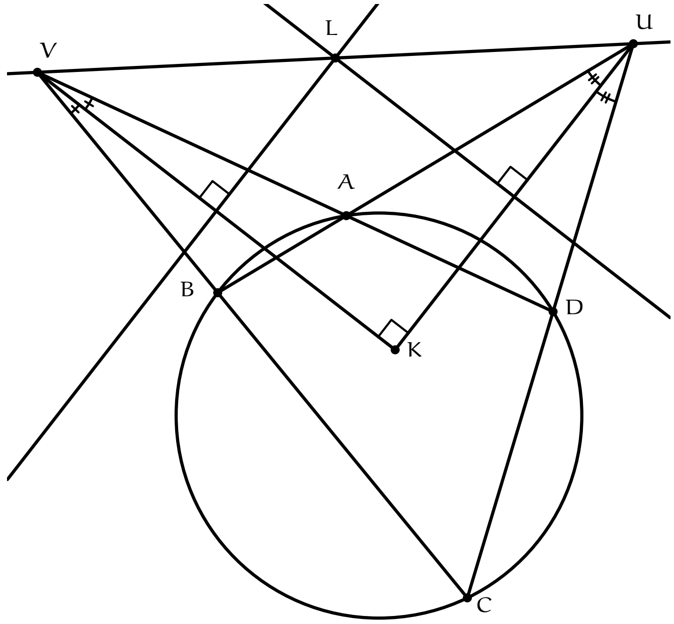


Solution de l'exercice 5 En utilisant la puissance du point M par rapport au cercle Γ, $MB^2 = MC \cdot MA$. Puisque M est le milieu du segment $[BP]$, $MP^2 = MB^2$ donc $MP^2 = MC \cdot MA$. On déduit de la réciproque de la puissance d'un point par rapport à un cercle que la droite (PM) est tangente au cercle circonscrit au triangle PAC. On obtient du théorème de l'angle tangent que $\widehat{MPC} = \widehat{PAC}$. Or la droite (PA) est tangente au cercle Γ donc à nouveau par le théorème de l'angle tangent, $\widehat{PAC} = \widehat{ADC}$. En résumé :

$$\widehat{BPD} = \widehat{MPC} = \widehat{PAC} = \widehat{ADC} = \widehat{ADP}$$

donc les droites (AD) et (BP) sont parallèles.
Commentaire des correcteurs Quelques démonstrations proposées étaient fausses. Une bonne façon de vérifier que sa démonstration est correcte est de vérifier qu'on a utilisé toutes les hypothèses. Plusieurs élèves n'utilisent à aucun moment que le point M est le milieu du segment $[PB]$, ce qui est pourtant une hypothèse cruciale. Attention à se relire pour éviter des erreurs typographiques comme écrire un angle ou un triangle à la place d'un autre.

Exercice 6. Soit A, B, C et D quatre points sur un cercle dans cet ordre. Soit U le point d'intersection des droites (AB) et (CD), et V le point d'intersection des droites (BC) et (DA). Soit K le point d'intersection de la bissectrice issue de U dans le triangle AUC et de la bissectrice issue de V dans le triangle AVC. Soit L le point d'intersection de la médiatrice du segment $[KU]$ et de la médiatrice du segment $[KV]$.
Montrer que les points U, V et L sont alignés.



Solution de l'exercice 6 Le point L est le centre du cercle circonscrit au triangle UKV. Pour montrer que les points U, L et V sont alignés, il suffit de montrer que $\widehat{ULV} = 180°$. Par le théorème de l'angle au centre, $\widehat{UKV} = \frac{1}{2}\widehat{ULV}$. Il suffit donc de montrer que $\widehat{UKV} = 90°$.
La somme des angles du triangle UKV vaut $180°$, donc il suffit de montrer que $\widehat{KUV} + \widehat{KVU} = 90°$. D'une part $\widehat{KUV} = \widehat{CUV} - \widehat{KUC} = \widehat{CUV} - \frac{1}{2}\widehat{BUC}$. Or $\widehat{BUC} = 180° - \widehat{UBC} - \widehat{BCU} = \widehat{ADC} - \widehat{UCB}$. On déduit

$$\widehat{KUV} = \widehat{CUV} - \frac{1}{2}\widehat{ADC} + \frac{1}{2}\widehat{UCB}$$

De la même manière, on obtient

$$\widehat{KVU} = \widehat{CVU} - \frac{1}{2}\widehat{CBA} + \frac{1}{2}\widehat{VCD}$$

Or $\widehat{CBA} + \widehat{ADC} = 180°$ et

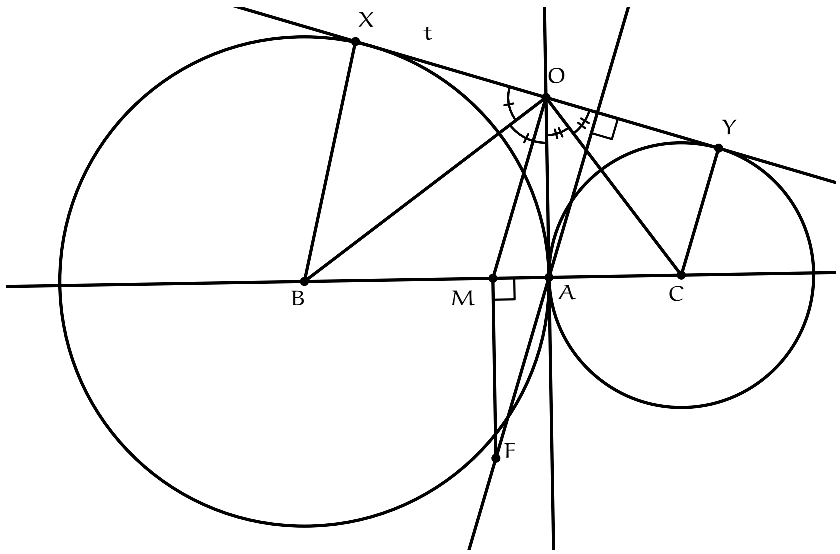
$$\widehat{UCB} = \widehat{VCD} = \widehat{UCV} = 180° - \widehat{CUV} - \widehat{CVU}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\widehat{KUV} + \widehat{KVU} &= \widehat{CUV} - \frac{1}{2}\widehat{ADC} + \frac{1}{2}\widehat{UCB} + \widehat{CVU} - \frac{1}{2}\widehat{CBA} + \frac{1}{2}\widehat{VCD} \\ &= \widehat{CUV} + \widehat{CVU} - \frac{1}{2}\cdot 180° + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(180° - \widehat{CUV} - \widehat{CVU}) = 90°\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu.
Commentaire des correcteurs L'exercice a été plutôt bien résolu. Attention à bien s'assurer que tout ce que l'on affirme est justifié. On a pu noté certaines affirmations fausses. Par exemple, contrairement à ce que certains élèves ont affirmé, un quadrilatère dont les deux angles opposés sont droits n'est pas forcément un rectangle.

Exercice 7. Deux cercles de centres respectifs B et C et de rayons différents sont tangents extérieurement en un point A. Soit t une tangente commune aux deux cercles ne contenant pas le point A. La perpendiculaire à la droite t passant par le point A coupe la médiatrice du segment $[BC]$ en un point F.
Montrer que $BC = 2AF$.



<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Soient X et Y les points de tangences de t avec les cercles de centre B et C respectivement. Soit O le point d'intersection la droite t avec la tangente commune au deux cercles en A. Les points X et A sont symétriques para rapport à la droite (OB) et les points Y et A sont symétriques par rapport à la droite (OC). On déduit $\widehat{BOA} = \frac{1}{2}\widehat{XOA}$ et $\widehat{COA} = \frac{1}{2}\widehat{YOA}$. On en déduit :

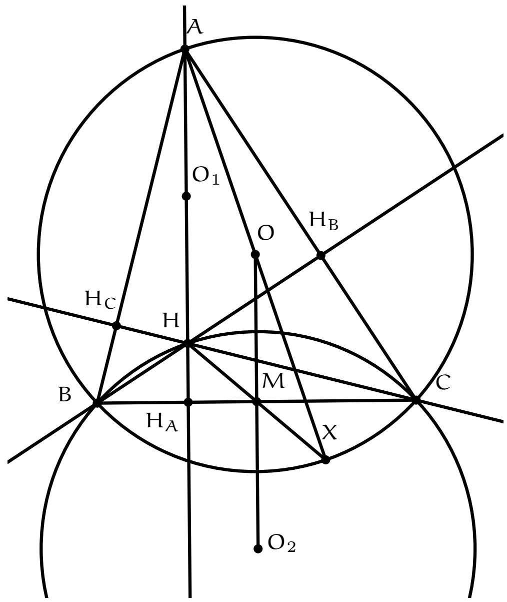
$$\widehat{BOC} = \widehat{BOA} + \widehat{AOC} = \frac{1}{2}\widehat{XOA} + \frac{1}{2}\widehat{AOY} = \frac{1}{2}\widehat{XOY} = 90^\circ$$

Soit M le milieu de $[BC]$. Le triangle BOC est rectangle O donc M est le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Ceci donne $MO = MB = \frac{1}{2}BC$. Comme les droites (OA) et (MF) sont perpendiculaires à la droite (BC), elles sont donc parallèles. Enfin,

$$\widehat{MOY} = \widehat{MOC} + \widehat{COY} = \widehat{MCO} + \widehat{AOC} = 90^\circ$$

donc les droites (OM) et (AF) sont perpendiculaires à la droite t donc elles sont parallèles. Donc le quadrilatère $OMFA$ est un parallélogramme et $BC = 2OM = 2AF$.
<u>Commentaire des correcteurs</u> On a pu constaté plusieurs solutions intéressantes. L'exercice nécessitait plusieurs initiatives, ainsi plusieurs solutions étaient incomplètes. Quelques élèves ont tenté une solution calculatoire. Les calculs étaient alors souvent trop laborieux et chargés de notations un peu lourdes.

Exercice 8. Soit ABC un triangle acutangle non isocèle en A. Soit M le milieu du segment $[BC]$, H l'orthocentre du triangle ABC, O_1 le milieu du segment $[AH]$ et O_2 le centre du cercle circonscrit au triangle CBH. Montrer que le quadrilatère O_1AMO_2 est un parallélogramme.



Solution de l'exercice 8 Soit H_A le pied de la hauteur issue du sommet A, H_B le pied de la hauteur issue du sommet B et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
On remarque déjà que O_2 est sur la médiatrice de $[BC]$ donc les droites (MO_2) et (AH) sont parallèles car elles sont perpendiculaires à (BC). Il suffit donc de montrer que $MO_2 = AO_1$.
Soit X le symétrique du point H par rapport au point M. Alors M est le milieu de $[BC]$ et $[XH]$ donc $BHCX$ est un parallélogramme et $\widehat{XBA} = \widehat{XBC} + \widehat{CBA} = \widehat{HCB} + \widehat{CBA} = 90°$ (car le triangle BCH_C est rectangle en H_C) et de même $\widehat{XCA} = 90°$ donc X est le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit à ABC.
La symétrie de centre M envoie B sur C, C sur B et H sur X donc elle envoie le cercle circonscrit à BCH sur le cercle circonscrit à BCX donc elle envoie O_2 sur O. En particulier, $MO_2 = MO$.
Comme les points O et M sont les milieux respectifs des segments [XA] et [XH], d'après le théorème de Thalès,

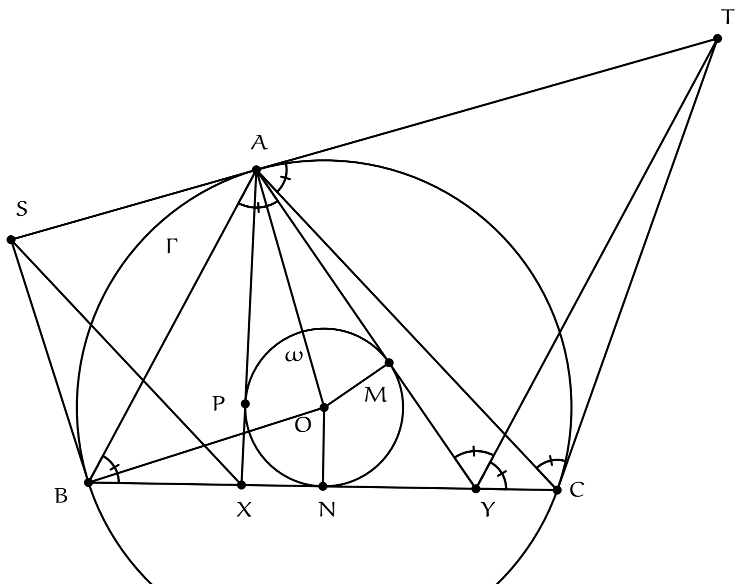
$$\frac{OM}{AH} = \frac{XM}{XH} = \frac{1}{2}$$

donc $AH = 2OM$ donc

$$MO_2 = MO = \frac{1}{2}AH = AO_1$$

ce qui conclut.
Commentaire des correcteurs Cet exercice demandait de connaître plusieurs propriétés de l'orthocentre, en particulier le fait que le symétrique de l'orthocentre H par rapport au milieu du côté $[BC]$ appartient au cercle circonscrit au triangle ABC et est également le symétrique du sommet A par rapport au centre O. Plusieurs élèves ont remarqué la première étape du problème qui est que les droites (MO_2) et (AH) sont parallèles. Ceci montre un réel effort de recherche sur un problème difficile de la part des élèves, ce qui est encourageant.

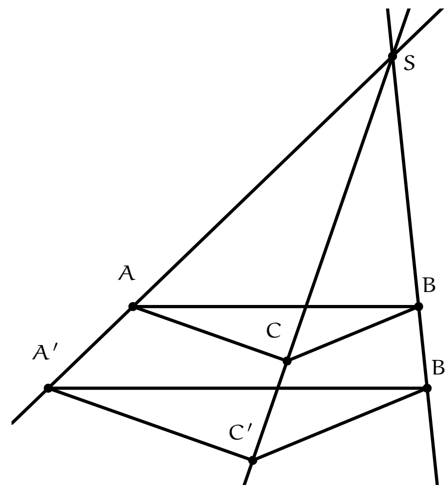
Exercice 9. Soit ABC un triangle, Γ sont cercle circonscrit et ω le cercle de même centre que Γ et tangent à la droite (BC). Les tangentes au cercle ω passant par A coupent (BC) en un point X du côté de B et en un point Y du côté de C. La tangente au cercle Γ en B et la parallèle à la droite (AC) passant par X se coupent en un point S et la tangente au cercle Γ en C et la parallèle à la droite (AB) passant par Y se coupent en un point T.
Montrer que la droite (ST) est tangente au cercle Γ.



Solution de l'exercice 9 Afin d'éviter d'avoir à séparer les différents cas, en fonction de la position du point Y par rapport au segment $[BC]$, nous allons utiliser les angles de droite orientés : (AB, CD) désigne l'angle (relatif) dont il faut tourner la droite (AB) pour qu'elle soit parallèle à la droite (CD).
Nous allons montrer que la droite (TA) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC et de même pour la droite (SA), ce qui donnera bien que la droite (ST) est tangente à ce cercle.
Pour montrer que la droite (AT) est tangente au cercle Γ, il suffit de montrer que $(AC, AT) = (BC, BA)$. Les droites (TY) et (AB) sont parallèles donc $(BC, BA) = (BC, YT) = (YC, YT)$, donc on est ramené à montrer que $(AC, AT) = (YC, YT)$, autrement dit que les points T, A, Y et C sont cocycliques.
Pour cela, on peut montrer que $(YT, YA) = (CT, CA)$. En effet, $(YT, YA) = (AB, AY)$ (par parallélisme de (AB) et (YT)) et $(CT, CA) = (BC, BA)$ donc il ne reste plus qu'à montrer que $(AB, AY) = (BC, BA)$, autrement dit que le triangle AYB est isocèle en Y.
Soit O le centre du cercle Γ, qui est aussi le centre du cercle ω, et soit M et N les points de contact respectifs du cercle ω avec les segments $[YA]$ et $[YB]$. Alors les triangles OMA et ONB sont rectangles, $OA = OB$ et $OM = ON$ donc $MA = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{OB^2 - ON^2} = NB$ et puisque $YM = YN$, on déduit $YA = YB$ et le triangle YAB est isocèle en Y comme voulu.
Commentaire des correcteurs Il y avait malhreusement une imprécision dans l'énoncé puisqu'il fallait que le triangle ABC ait des angles aigus. Cet oubli de notre part a provoqué quelques confusions pour certains élèves qui ont tracé une figure avec un angle obtu en A et ont donc pensé que l'énoncé était faux. L'exercice restait plutôt difficile. Quelques élèves ont essayé de conclure avec les similitudes, mais les hypothèses n'étaient jamais assez fortes.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soient d_1, d_2, d_3 des droites concourantes et A, A' des points sur la droite d_1, B, B' des points sur la droite d_2, C, C' des points sur la droite d_3 tels que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles et les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.
Montrer que les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.



<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Soit S le point de concours des trois droites. Puisque les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AS}{A'S} = \frac{BS}{B'S}$$

De même on trouve

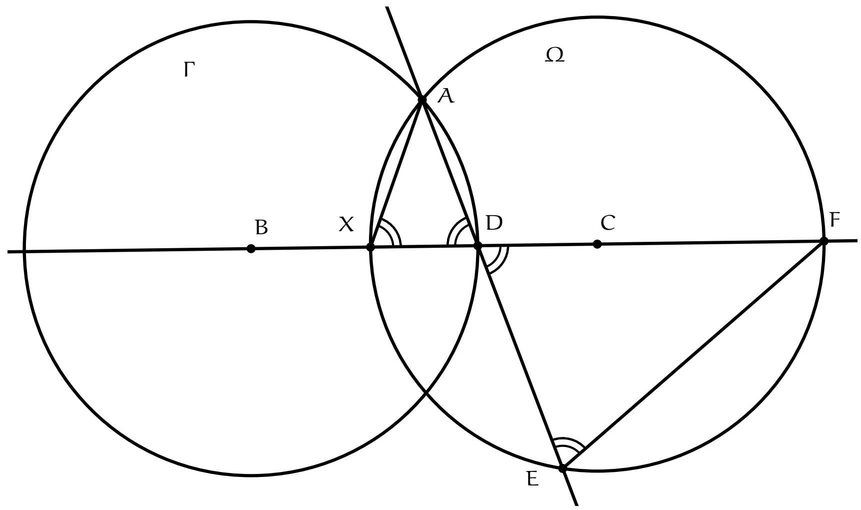
$$\frac{BS}{B'S} = \frac{CS}{C'S}$$

On déduit que

$$\frac{AS}{A'S} = \frac{CS}{C'S}$$

ce qui signifie, d'après le théorème de Thalès, que les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.
<u>Commentaire des correcteurs</u> L'exercice est bien réussi, la plupart des élèves ont remarqué l'utilisation du théorème de Thalès. attention à prendre en compte toutes les configurations, notemment les ordres possibles pour les sommets A, B et C.

Exercice 11. Soit ABC un triangle isocèle et obtus en A. Soit Γ le cercle de centre B passant par A, et Ω le cercle de centre C passant par A. Soit D le point d'intersection du cercle Γ avec le segment $[BC]$, E le deuxième point d'intersection de la droite (AD) avec le cercle Ω, et F le point d'intersection de la droite (BC) avec le cercle Ω qui n'est pas sur le segment $[BC]$.
Montrer que le triangle DFE est isocèle en F.

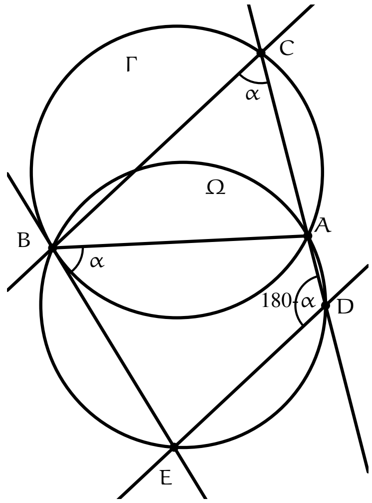


Solution de l'exercice 11 Soit X le point d'intersection du cercle Ω avec le segment $[BC]$. Les points B et C sont symétriques par rapport à la médiatrice du segment $[BC]$ donc les cercles Γ et Ω le sont aussi. Il vient que D et X sont symétriques par rapport à la médiatrice du segment $[BC]$. Le triangle DAX est donc isocèle en A et $\widehat{ADX} = \widehat{AXD}$.
Les points F, E, X et A sont cocycliques donc $\widehat{FEA} = \widehat{FXA}$. On déduit

$$\widehat{FED} = \widehat{FEA} = \widehat{FXA} = \widehat{DXA} = \widehat{XDA} = \widehat{FDE}$$

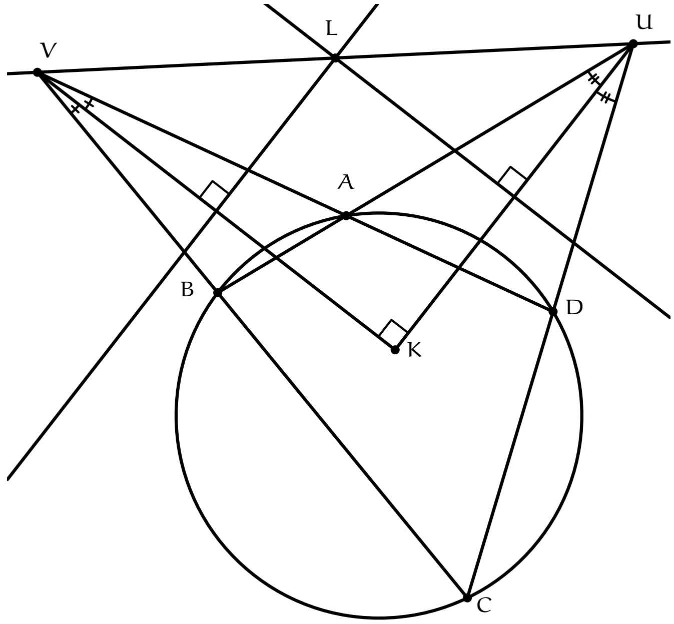
Ce qui donne bien que le triangle FDE est isocèle en F.
Commentaire des correcteurs On a observé pratiquement que des preuves complètes, même si certaines étaient très longues et calculatoires.

Exercice 12. Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit et Ω un autre cercle passant par les points A et B. La droite (AC) coupe le cercle Ω en un point D et la tangente à cercle Γ en B coupe Ω en un point E.
Montrer que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.



Solution de l'exercice 12 La droite (BE) est tangente au cercle Ω en B donc par le théorème de l'angle tangent, $\widehat{EBA} = \widehat{BCA}$. Les points D, A, B et E sont cocycliques donc $\widehat{EDA} = 180° - \widehat{EBA}$. On déduit que $\widehat{EDA} = 180° - \widehat{BCD}$ ce qui donne bien que les droites (BC) et (ED) sont parallèles.
Commentaire des correcteurs La grande majorité des copies reçues ont fourni des preuves complètes. Cependant, beaucoup d'élèves font des chasses aux angles qui ne sont valides que dans leur cas de figure. Certains élèves ont traité tous les cas, ce qui a été récompensé.

Exercice 13. Soit A, B, C et D quatre points sur un cercle dans cet ordre. Soit U le point d'intersection des droites (AB) et (CD), et V le point d'intersection des droites (BC) et (DA). Soit K le point d'intersection de la bissectrice issue de U dans le triangle AUC et de la bissectrice issue de V dans le triangle AVC. Soit L le point d'intersection de la médiatrice du segment $[KU]$ et de la médiatrice du segment $[KV]$.
Montrer que les points U, V et L sont alignés.



Solution de l'exercice 13 Le point L est le centre du cercle circonscrit au triangle UKV. Pour montrer que les points U, L et V sont alignés, il suffit de montrer que $\widehat{ULV} = 180°$. Par le théorème de l'angle au centre, $\widehat{UKV} = \frac{1}{2}\widehat{ULV}$. Il suffit donc de montrer que $\widehat{UKV} = 90°$.
La somme des angles du triangle UKV vaut $180°$, donc il suffit de montrer que $\widehat{KUV} + \widehat{KVU} = 90°$. D'une part $\widehat{KUV} = \widehat{CUV} - \widehat{KUC} = \widehat{CUV} - \frac{1}{2}\widehat{BUC}$. Or $\widehat{BUC} = 180° - \widehat{UBC} - \widehat{BCU} = \widehat{ADC} - \widehat{UCB}$. On déduit

$$\widehat{KUV} = \widehat{CUV} - \frac{1}{2}\widehat{ADC} + \frac{1}{2}\widehat{UCB}$$

De la même manière, on obtient

$$\widehat{KVU} = \widehat{CVU} - \frac{1}{2}\widehat{CBA} + \frac{1}{2}\widehat{VCD}$$

Or $\widehat{CBA} + \widehat{ADC} = 180°$ et

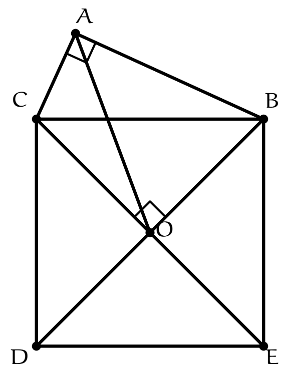
$$\widehat{UCB} = \widehat{VCD} = \widehat{UCV} = 180° - \widehat{CUV} - \widehat{CVU}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\widehat{KUV} + \widehat{KVU} &= \widehat{CUV} - \frac{1}{2}\widehat{ADC} + \frac{1}{2}\widehat{UCB} + \widehat{CVU} - \frac{1}{2}\widehat{CBA} + \frac{1}{2}\widehat{VCD} \\ &= \widehat{CUV} + \widehat{CVU} - \frac{1}{2} \cdot 180° + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (180° - \widehat{CUV} - \widehat{CVU}) = 90°\end{aligned}$$

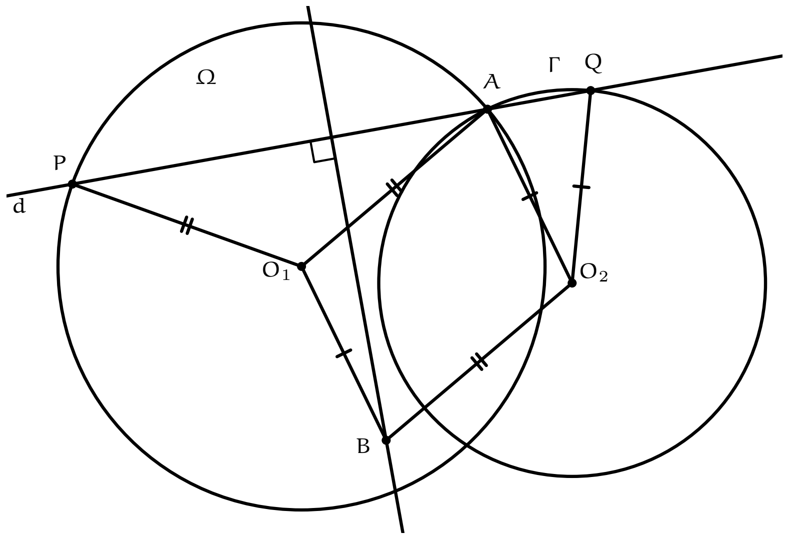
ce qui donne le résultat voulu.
Commentaire des correcteurs L'exercice a été plutôt bien résolu. Attention à bien s'assurer que tout ce que l'on affirme est justifié. On a pu noté certaines affirmations fausses. Par exemple, contrairement à ce que certains élèves ont affirmé, un quadrilatère dont les deux angles opposés sont droits n'est pas forcément un rectangle. Attention également à ne pas utiliser l'énoncé pour démontrer l'énoncé.

Exercice 14. Soit $BCDE$ un carré et soit O son centre. Soit A un point situé à l'extérieur du carré $BCDE$ tel que le triangle ABC est rectangle en A. Montrer que le point O appartiant à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.



Solution de l'exercice 14 Les diagonales du carré $BCDE$ se coupent perpendiculairement en O donc $\widehat{BOC} = 90° = \widehat{BAC}$ donc les points A, B, O et C sont cocycliques. Comme O est sur la médiatrice du segment $[BC]$, O est le pôle Sud de A dans le triangle ABC donc O est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
Commentaire des correcteurs L'exercice est plutôt bien réussi, les solutions proposées sont intéressantes mais calculatoires pour certaines.

Exercice 15. Soit Ω et Γ deux cercles sécants. On note A une de leurs intersections. Soit d une droite quelconque passant par le point A. On note P et Q les intersections respectives de la droite d avec les cercles Ω et Γ différentes de A.
Montrer qu'il existe un point indépendant de la droite d choisie et qui appartient toujours à la médiatrie du segment $[PQ]$.



Solution de l'exercice 15 Par symétrie, on peut supposer que le rayon du cercle Ω est supérieur au rayon du cercle Γ.
Soit O_1 le centre du cercle Ω et O_2 le centre du cercle Γ. Soit B le point tel que le quadrilatère AO_1BO_2 soit un parallélogramme. On va montrer que le point B appartient à la médiatrice du segment $[PQ]$. Comme le point B est indépendant du choix de la droite d, ceci montrera bien que les médiatrices des semgent $[PQ]$ passent par un point fixe lorsque la droite d varie.
Pour montrer que $BP = BQ$, on va montrer que les triangles PO_1B et BO_2Q sont isométriques. On sait déjà que $O_1P = O_1A = O_2B$ et $O_1B = O_2A = O_2Q$. Il reste donc à montrer que $\widehat{BO_1P} = \widehat{BO_2Q}$.
D'une part

$$\widehat{PO_1B} = 360° - \widehat{PO_1A} - \widehat{AO_1B} = 360° - (180° - 2\widehat{O_1AP}) - \widehat{AO_1B} = 180° + 2\widehat{O_1AP} - \widehat{AO_1B}$$

D'autre part

$$\widehat{BO_2Q} = \widehat{BO_2A} + \widehat{AO_2Q} = \widehat{BO_2A} + (180° - 2\widehat{O_2AQ}) = 180° + \widehat{BO_2A} - 2\widehat{O_2AQ}$$

Mais $\widehat{O_1AP} + \widehat{O_1AO_2} + \widehat{O_2AQ} = 180°$ donc $2\widehat{O_1AP} + 2\widehat{O_1AO_2} + 2\widehat{O_2AQ} = 360$ et $\widehat{O_1AO_2} = 180° - \widehat{AO_1B} = 180° - \widehat{BO_2A}$ donc

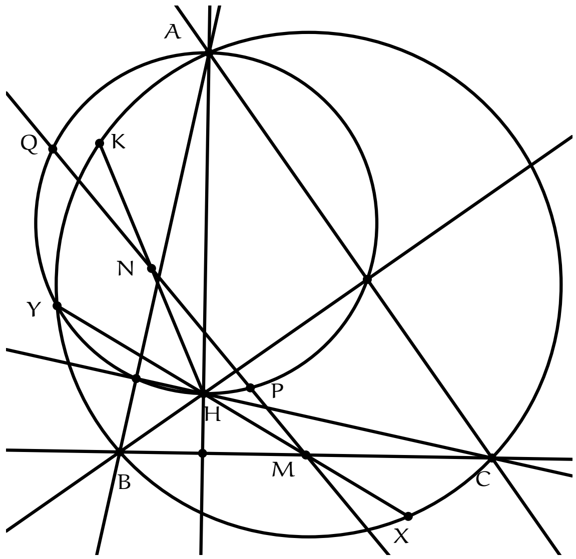
$$2\widehat{O_1AP} + 180° - \widehat{AO_1B} + 180° - \widehat{BO_2A} + 2\widehat{O_2AQ} = 360°$$

donc

$$2\widehat{O_1AP} - \widehat{AO_1B} = \widehat{BO_2A} - 2\widehat{O_2AQ}$$

On trouve bien $\widehat{PO_1B} = \widehat{BO_2Q}$ et le point B est bien sur la médiatrice de $[PQ]$.
Commentaire des correcteurs L'exercice est bien résolu par ceux qui l'ont traité et on a pu observé plusieurs solutions différentes. Beaucoup d'élèves font des chasses aux angles non orientés mais ils n'ont pas été pénalisés.

Exercice 16. Soit ABC un triangle, H son orthocentre et M le milieu du segment $[BC]$. Soit d une droite passant par le point M. On suppose que d coupe le cercle de diamètre $[AH]$ en P et Q.
Montrer que l'orthocentre du triangle APQ est sur le cercle circonscrit du triangle ABC.

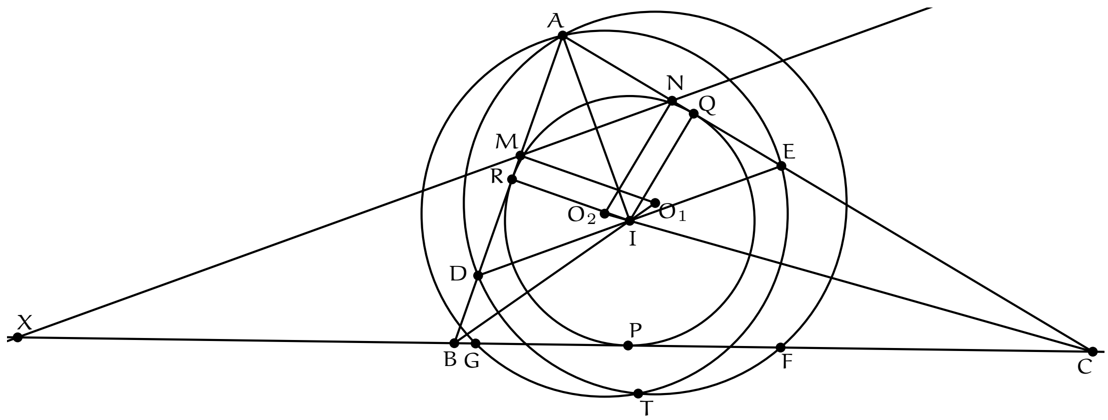


<u>*Solution de l'exercice 16*</u> Soit N le milieu de $[PQ]$ et K l'orthocentre du triangle APQ. Si on appelle K' le symétrique de K par rapport au milieu N du segment $[PQ]$, alors $[PQ]$ et $[KK']$ ont le même milieu N donc $PKQK'$ est un parallélogramme donc $\widehat{K'PA} = \widehat{K'PQ} + \widehat{QPA} = \widehat{PQK} + \widehat{QPA} = 90°$ (car (PA) et (QK) sont perpendiculaires). De même, $\widehat{K'QA} = 90°$ donc K' est le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit à APQ, autrement dit $K' = H$: le symétrique de K par rapport au milieu N du segment $[PQ]$ est H.
Soit X le symétrique de H par rapport à M et Y la seconde intersection de la droite (MH) avec le cercle circonscrit au triangle ABC. Par un raisonnement analogue à celui mené précédemment, on sait que X est le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit à ABC donc $\widehat{HYA} = \widehat{XYA} = 90°$ donc Y est sur le cercle de diamètre $[AH]$. Puisque X est le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit à ABC, il suffit de montrer que $\widehat{XKA} = 90°$ pour finir l'exercice.
On décompose l'angle en trois morceaux : $\widehat{XKA} = 360° - \widehat{XKH} - \widehat{HKQ} - \widehat{QKA}$
Les points M et N sont la milieux respectifs des segments $[HX]$ et $[HK]$ donc les droites (MN) et (KX) sont parallèles. On déduit $\widehat{XKH} = \widehat{MNH} = \widehat{PNH}$.
Les segments $[PQ]$ et $[KH]$ se coupent en leur milieu donc le quadrilatère $PHQK$ est un parallèlogramme. D'où $\widehat{HKQ} = \widehat{KHP} = \widehat{NHP}$.
Le point Q est l'orthocentre du triangle KPA donc $\widehat{QKA} = 180° - \widehat{QPA}$.
On déduit

$$\widehat{XKA} = 360° - \widehat{PNH} - \widehat{NHP} - (180° - \widehat{QPA}) = 180° - \widehat{PNH} - \widehat{NHP} + \widehat{QPA} = \widehat{NPH} + \widehat{QPA} = \widehat{APH} = 90°$$

car P est sur le cercle de diamètre $[AH]$. Ainsi, $\widehat{XKA} = 90°$ donc K est bien sur le cercle circonscrit à ABC.
<u>Commentaire des correcteurs</u> Ce problème nécessitait un peu de culture. La plupart des élèves ayant essayé le problème ont identifié l'intérêt du cercle d'Euler et des symétriques de l'orthocentre par rapport au milieu des côtés.

Exercice 17. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. La perpendiculaire à la droite (AI) passant par le point I coupe la droite (AB) en un point D et la droite (AC) en un point E. On suppose qu'il existe deux points F et G sur le segment $[BC]$ tels que $BA = BF$ et $CA = CG$. Soit T le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ADF et AEG.
Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle AIT se trouve sur la droite (BC).



Solution de l'exercice 17 Soient M et N les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[AE]$ et soit X le point d'intersection de la droite (MN) (qui est aussi la médiatrice du segment $[AI]$) avec la droite (BC). Soient O_1 et O_2 les centres respectifs des cercles circonscrits aus triangles ADF et AEG. On souhaite montrer que le point X est le centre du cercle circonscrit à AIT donc qu'il appartient à la médiatrice du segment $[AT]$, c'est-à-dire à la droite (O_1O_2).
Soient P, Q et R les points de contact respectifs du cercle inscrit au triangle ABC avec les côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Le point O_1 est sur la médiatrice du segment $[AD]$ donc la droite (O_1M) est perpendiculaire à la droite (AB). Les droites (O_1M) et (IR) sont donc parallèles. D'après le théorème de Thalès, on déduit que $\frac{O_1I}{O_1B} = \frac{MR}{MB}$. On a de même $\frac{O_2C}{O_2I} = \frac{NC}{NQ}$. De plus, le triangles ABF est isocèle en B donc la médiatrice de $[AF]$ est la bissectrice de $\widehat{ABF}$ donc O_1 est sur (BI) et de même O_2 est sur (CI).
D'après le théorème de Ménélaus appliquée aux points M, N, X dans le triangle ABC :

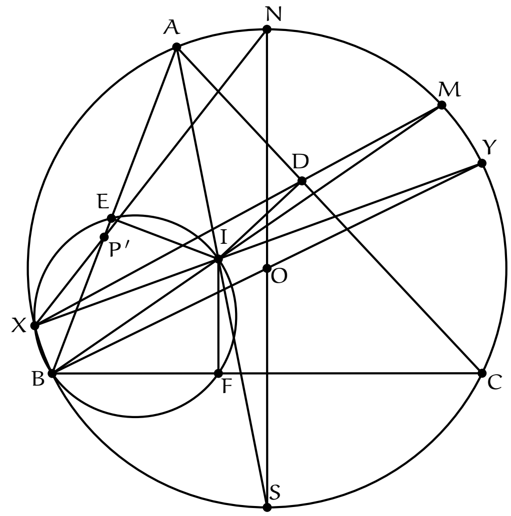
$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{MA}{MB} = 1$$

et en l'appliquant au triangle BIC, l'alignement des points O_1, O_2 et X équivaut à $\frac{O_1I}{O_1B} \cdot \frac{XB}{XC} \cdot \frac{O_2C}{O_2I} = 1$.
On souhaite donc montrer cette égalité.
On sait déjà $\frac{XB}{XC} = \frac{NA}{NC} \cdot \frac{MB}{MA}$, $\frac{O_1I}{O_1B} = \frac{MR}{MB}$, $\frac{O_2C}{O_2I} = \frac{NC}{NQ}$ donc

$$\frac{O_1I}{O_1B} \cdot \frac{XB}{XC} \cdot \frac{O_2C}{O_2I} = \frac{MR}{MB} \cdot \frac{NA}{NC} \cdot \frac{MB}{MA} \cdot \frac{NC}{NQ} = \frac{MR \cdot NA}{MA \cdot NQ} = 1$$

car $MA = \frac{1}{2}DA = \frac{1}{2}EA = NA$ et $AR = AQ$ donc $MR = NQ$. Ainsi, O_1, O_2, X sont alignés.
Commentaire des correcteurs L'exercice était difficile et a donc été très peu abordé. Quelques élèves ont donné une reformulation intéressante de l'énoncé. Les élèves qui ont cherché l'exercice plus en profondeur ont fait preuve d'inventivité : certains ont utilise le théorème de Desargues, d'autres une inversion.

Exercice 18. Soit ABC un triangle, soit O le centre de son cercle circonscrit. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC et D le point de tangence de ce cercle avec le segment $[AC]$. Les droites (OI) et (AB) se coupent en un point P. Soit M le milieu de l'arc AC ne contenant pas B et N le milieu de l'arc BC contenant A.
Montrer que les droites (MD) et (NP) se coupent sur le cercle circonscrit à ABC.



Solution de l'exercice 18 Soit X le point d'intersection de la droite (MD) avec le cercle circonscrit au triangle ABC et soit P' le point d'intersection de la droite (XN) avec le segment $[AB]$. Soit S le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec le cercle circonscrit au triangle ABC. On sait que les points N, O et S sont alignés.
Soit E et F les points de contact respectifs du cercle inscrit au triangles ABC avec les segment $[AB]$ et $[BC]$.
Le point M est le milieu de l'arc CA, il est donc sur la bissectrice de l'angle $\widehat{AXC}$. Le point D est le pied de cette bissectrice. D'après le théorème de la bissectrice, $\frac{AX}{XC} = \frac{DA}{DC} = \frac{AE}{CF}$. Puisque $\widehat{EAX} = \widehat{BAX} = \widehat{BCX} = \widehat{FCX}$, il vient que les triangles AEX et CFX sont semblables donc le point X est le centre de la similitude qui envoie les points E et F sur les points A et C, il est donc le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et EFB. Puisque $[BI]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle EBF, on déduit $\widehat{IXB} = 90°$. Soit Y le point diamétralement opposé au point B dans le cercle circonscrit au triangle ABC. Alors $\widehat{YXB} = 90 = \widehat{IXB}$. Les points X, I et Y sont donc alignés.
D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $SABYXN$, les points $O = (BY) \cap (SN)$, $I = (YX) \cap (AS)$ et $P' = (AB) \cap (XN)$ sont alignés. Le point P' correspond donc au point d'intersection des droites (OI) et (AB) donc $P = P'$ ce qui donne bien que les droites (MD) et (NP) se coupent sur le cercle circonscrit au triangle ABC.
Commentaire des correcteurs Des solutions variées ont été proposées : utiliser une inversion de centre M fixant les points A, I et C pour montrer que les points X, I et Y sont alignés, utiliser Z le centre de l'homotétie positive envoyant le cercle inscrit sur le cercle circonscrit et considérer le cercle mixti-linéaire ou enocre utiliser les coordonnées barycentriques.