PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 27 NOVEMBRE 2019

à destination des élèves du groupe SENIOR

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire une (voire plusieurs) figure sur une feuille blanche séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Le respect de la consigne précédente rapportera automatiquement un point. Si elle n'est pas respectée, la copie ne sera pas corrigée.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies

- soit par voie postale, à l'adresse suivante :

  Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques
  11-13 rue Pierre et Marie Curie
  75005 Paris

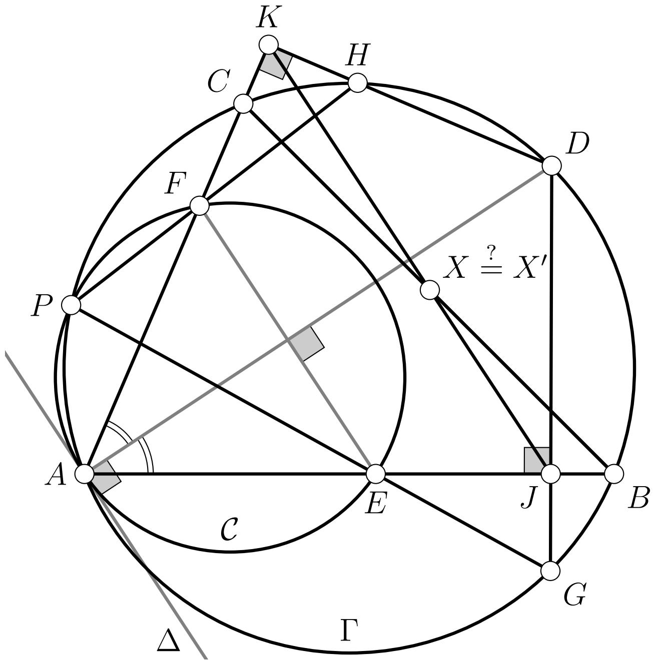
- soit par voie électronique, à l'adresse suivante : `copies.ofm@gmail.com`

Exercice 1. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus, avec $AB \neq AC$. Soit Γ le cercle circonscrit à ABC, et D le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A. Soit E et F des points appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$, de sorte que $AE = AF$. Soit P le point d'intersection, autre que A, entre Γ et le cercle circonscrit à AEF.

Soit G et H les points d'intersection respectifs, autres que P, entre Γ et les droites (PE) et (PF). Enfin, soit J le point d'intersection entre les droites (AB) et (DG), et soit K le point d'intersection entre les droites (AC) et (DH).

Démontrer que le milieu du segment $[BC]$ appartient à la droite (JK).

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Commençons par tracer une figure, et notons X le milieu de $[BC]$, que l'on espère être également le point d'intersection des droites (BC) et (JK). Sans perte de généralité, on suppose également que $AB > AC$.



Une première remarque que l'on peut formuler est que, puisque les arcs $\widehat{BD}$ et $\widehat{DC}$ ont même mesure, les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{DAC}$ sont en fait égaux. Cela signifie que la droite (AD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$; plus précisément, le point D est en fait le pôle Sud de A dans le triangle ABC. On s'empresse donc de dessiner cette bissectrice, d'autant plus que l'égalité $AE = EF$ revient alors à dire que les points E et F sont en fait symétriques par rapport à la droite (AD).

Une seconde remarque frappante est que l'angle $\widehat{AJD}$ semble droit. Après avoir vérifié qu'il l'était bien sur une deuxième figure, on s'empresse donc de démontrer ce premier résultat. Pour ce faire, on entame donc une chasse aux angles de droites :

$$(AJ, DJ) = (AJ, PG) + (PG, DJ) = (AE, PE) + (PG, DG) = (AE, PE) + (PA, AD).$$

Pour aller plus loin, on voudrait remplacer l'angle (AE, PE) par un angle faisant intervenir la droite (PA). On utilise alors le cas limite du théorème de l'angle au centre, comme suit.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à AEF et Δ sa tangente en A. Alors on sait que $(AE, PE) = (\Delta, PA)$, et donc que $(AJ, DJ) = (\Delta, AD)$. Or, la droite (AD) est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$, et elle est donc perpendiculaire à Δ. Comme souhaité, on a donc $(AJ, DJ) = 90°$.

Mais alors J et K sont les projetés orthogonaux de D sur les droites (AB) et (AC). Puisque D appartient à la bissectrice de $\widehat{BAC}$, on a donc $DJ = DK$ et $AJ = AK$. Par ailleurs, comme A est le milieu de l'arc $\widehat{BC}$, on sait que $BD = CD$. Les triangles BJD et CKD étant respectivement rectangles en J et en K, ils sont donc isométriques.

Puisque $AC = |x \pm y|$, $AB = |x \pm y|$ et $AB > AC$, c'est donc que $AB = x + y$ et $AC = |x - y|$. Autrement dit, on a $\overrightarrow{AC} = (1 - y/x)\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AB} = (1 + y/x)\overrightarrow{AJ}$. Mais alors

$$\overrightarrow{AX} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})/2 = (1 - y/x)\overrightarrow{AK}/2 + (1 + y/x)\overrightarrow{AJ}/2 = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XK} + (1 + y/x)\overrightarrow{KJ}/2,$$

ce qui signifie que $\overrightarrow{KX} = (1 + y/x)\overrightarrow{KJ}/2$, et donc que X se trouve bien sur la droite (JK), comme on devait le démontrer.

Solution alternative n°1 On propose une autre façon de terminer le problème une fois que l'on a obtenu que les angles $\widehat{AJD}$ et $\widehat{AKD}$ sont droits.

Comme $(AJ, DJ) = 90° = (DK, AK)$, les points K, A, J et D sont cocycliques. Soit alors X' le point d'intersection des droites (BC) et (JK). Puisque

$$(DK, KX') = (DK, KJ) = (DA, AJ) = (DA, AB) = (DC, CB) = (DC, CX'),$$

les points D, C, K et X' sont eux aussi cocycliques.

Mais alors $(CX', X'D) = (CK, KD) = 90°$, donc X' est en fait le projeté orthogonal de D sur la droite (BC). Comme D se trouve sur la médiatrice du segment $[BC]$, le point X' est donc le milieu de ce segment, ce qui conclut.

Solution alternative n°2 On propose une troisième façon de terminer le problème : il s'agit là d'une variante de la solution alternative n°1.

Puisque $BD = CD$, le point X est également le projeté orthogonal de D sur la droite (BC). Mais alors, puisque D appartient au cercle circonscrit à ABC, les points J, K et X sont en fait alignés sur la droite de Simson de D, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs Le problème a été bien réussi. Cependant, quelques erreurs sont revenues fréquemment :

- Plusieurs élèves ont introduit le point X' avant d'avoir démontré que les droites (JK) et (BC) avaient effectivement un point d'intersection. Pour certaines preuves, cette omission pouvait se montrer assez pénalisante.

  Une façon efficace de traiter toutes les configurations, et donc d'éliminer ces cas pathologiques pénalisants, était d'utiliser des angles orientés, voire des angles de droites orientés, ce que peu d'élèves ont pensé à faire.
- Plusieurs élèves ont confondu les points X et X', puisque ceux-ci apparaissaient au même endroit sur leur figure. Par exemple, après avoir défini le point X', ils ont utilisé le fait qu'il s'agissait du milieu de $[BC]$, alors que c'est justement la propriété qu'il fallait démontrer ! Une telle erreur, si elle se comprend aisément, s'est néanmoins avérée rédhibitoire dès qu'elle survenait, puisqu'elle mettait un terme à la démonstration.

Par ailleurs, beaucoup d'élèves montrent une bonne culture, en reconnaissant dans la figure un pôle Sud, une similitude, un point de Miquel ou la droite de Simson relative au point D.

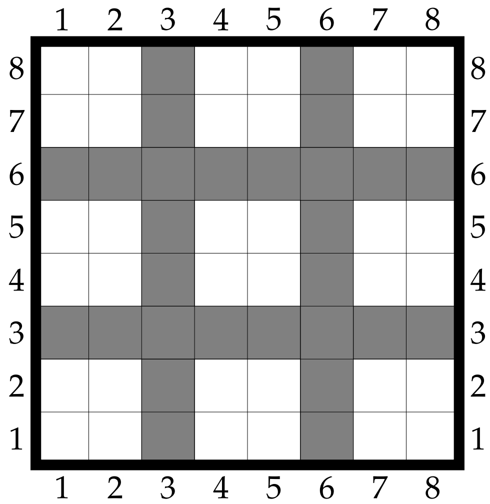
On a également pu voir de très jolies figures ! À l'inverse, un élève, qui avait pourtant fourni une solution correcte à l'exercice, n'a fourni qu'un simple schéma à main levée plutôt qu'une figure complète à la règle et au compas. Par conséquent, et au lieu des 7 points qui lui tendaient les bras, il s'est vu attribuer la note de $0/7$.

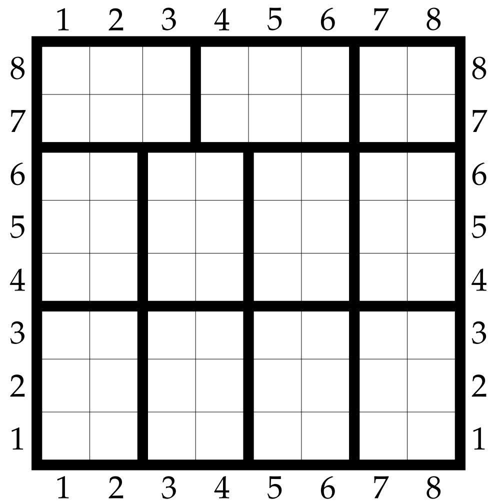
Exercice 2. Chaque case d'un tableau de taille 8×8 peut être coloriée en blanc ou en noir, de telle sorte que chaque rectangle de taille 2×3 ou 3×2 contient deux cases noires ayant un côté en commun. Déterminer le nombre minimal de cases noires qu'il peut y avoir sur le tableau.

Solution de l'exercice 2 Comme d'habitude dans ce genre de problèmes, on commence par rechercher des bornes supérieures (en exhibant une configuration) et inférieures (par des arguments de double comptage et/ou de pavage) sur le nombre minimal de cases noires que doit contenir le tableau.

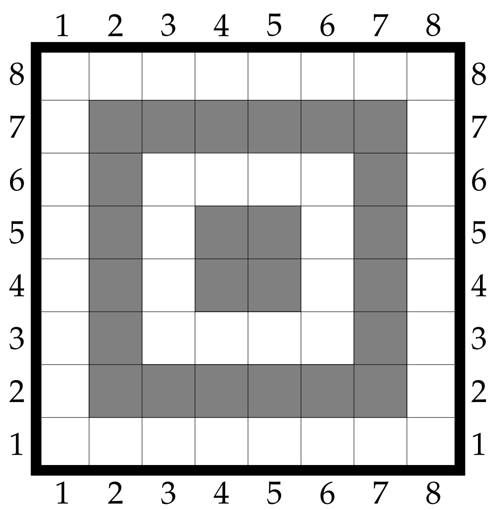
Par exemple, la configuration ci-dessous (à gauche) nous assure que 28 cases noires sont suffisantes ; en effet, tout rectangle vertical (de taille 3×2) contient deux cases sur l'une des lignes 3 ou 6, et tout rectangle horizontal (de taille 2×3) contient deux cases sur l'une des colonnes 3 ou 6. D'autre part, chacun des 10 rectangles du pavage partiel ci-dessous (à droite) doit contenir au moins 2 cases noires, de sorte que 20 cases noires ont nécessaires.

Malheureusement, ces deux bornes ne sont pas égales l'une à l'autre. Il nous faut donc chercher à les améliorer toutes les deux jusqu'à les rendre égales.

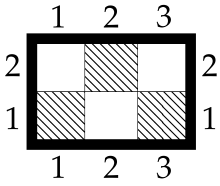




En tâtonnant, on finit par trouver une nouvelle configuration satisfaisant les conditions de l'énoncé, mais qui ne contient que 24 cases noires. Il s'agit de la configuration ci-dessous.



D'autre part, utiliser un simple pavage par des rectangles semble un peu trop brutal pour nous indiquer la meilleure borne inférieure possible sur le nombre de cases noires nécessaires. On étudie un rectangle quelconque donné :



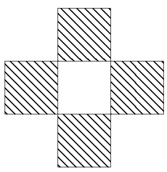
On constate ici que, parmi les 3 cases hachurées, au moins une doit être une case noire, ce sans quoi notre rectangle ne contiendra jamais deux cases noires adjacentes. En particulier, la case en ligne 1, colonne 2 a nécessairement une voisine noire au sein de ce rectangle. De même, la case en ligne 2, colonne 2, a aussi une voisine noire au sein de notre rectangle.

Forts de ce constat, on s'intéresse, pour chaque case c de l'échiquier, au nombre minimal de voisines noires que possède la case c :

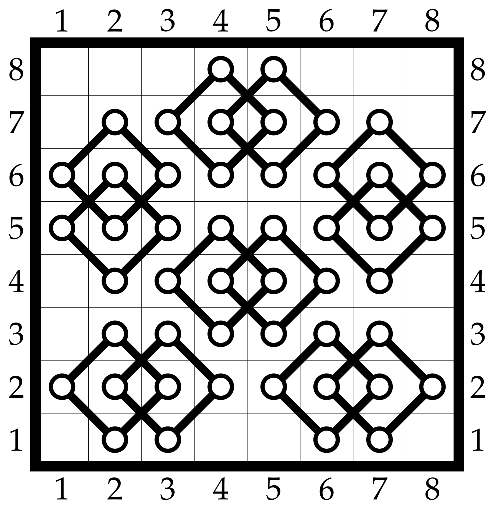
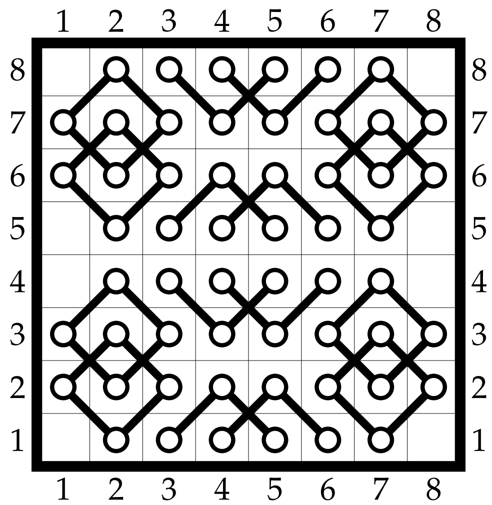
- ▷ si c est un des quatre coins, *a priori*, elle pourrait n'avoir aucune voisine noire (c'est d'ailleurs le cas dans notre configuration précédente) ;
- ▷ si c est une des $2 \times 6 = 12$ cases situées sur le côté haut ou bas, elle appartient à la colonne centrale d'un rectangle horizontal, donc elle a au moins une voisine noire ;
- ▷ de même, si c est une des $2 \times 6 = 12$ cases situées sur le côté gauche ou droit, elle appartient à la ligne centrale d'un rectangle vertical, donc elle a au moins une voisine noire ;
- ▷ enfin, si c est une des $6 \times 6 = 36$ cases situées au centre de l'échiquier, elle a déjà une voisine noire au minimum (disons d) ; mais alors c appartient également à la colonne (respectivement, à la ligne) d'un autre rectangle horizontal (resp., vertical) ne contenant pas d, donc c a une deuxième voisine noire.

En conclusion, on dispose en fait d'au moins $12 + 12 + 36 \times 2 = 96$ paires (c, d) de cases adjacentes telles que d est une case noire. Or, chaque case noire a au plus quatre voisines, donc appartient à au plus quatre telles paires. On a donc au moins $96/4 = 24$ cases noires sur notre échiquier, ce qui rejoint la borne supérieure trouvée précédemment, et conclut donc.

Solution alternative n°1 Voici une autre manière de démontrer que 24 cases noires sont nécessaires une fois que l'on sait que chaque case située au centre de l'échiquier a au moins deux voisines noires. En effet, cela signifie que chaque occurrence du motif représenté ci-dessous doit contenir au moins deux cases noires.



On peut alors placer de tels motifs à trois ou à quatre cases, sans recouvrement, dans notre échiquier 8×8, par exemple en procédant comme suit : dans le dessin ci-dessous, on relie les centres des cases appartenant à un même motif.

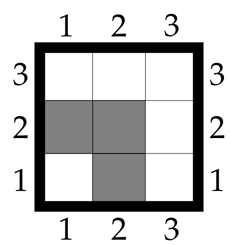



On a donc réussi à placer dans l'échiquier 12 exemplaires de notre motif à quatre cases, ou bien 8 exemplaires du motif à quatre cases et 8 exemplaires du motif à trois cases, ne se chevauchant pas. Dans chaque cas, ces motifs contiennent bien un total de 24 cases noires au minimum, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été globalement bien réussi compte tenu de son niveau de difficulté. Identifier une configuration à 24 cases noires était peu évident, et de nombreaux élèves y sont cependant parvenus. Montrer que l'on ne pouvait pas faire mieux était ensuite très difficile. Par ailleurs, de nombreux élèves ont commis plusieurs erreurs évitables, que nous récapitulons ci-dessous.

- ▷ Ce n'est pas parce qu'une configuration adéquate (telle que tout rectangle 2×3 ou 3×2 contient deux cases noires adjacentes) est minimale pour l'**inclusion** (c'est-à-dire que, si on retire n'importe quelle case noire, notre configuration ne sera plus adéquate) qu'elle est également minimale pour le **nombre de cases noires** utilisées.

  On laisse ainsi au lecteur le plaisir de vérifier que la première configuration mentionnée dans cette solution, et qui contenait 28 cases, était bien une configuration adéquate minimale pour l'inclusion, mais manifestement pas pour le nombre de cases noires utilisées.
- ▷ Ce n'est pas parce qu'une configuration adéquate est minimale que, sur toute partie extraite de l'échiquier 8×8, elle induit encore une configuration minimale. Un exemple évident de ce phénomène apparaît si la partie en question est un carré 2×2, puisque aucun carré noir n'est alors nécessaire.
- ▷ Ce n'est pas parce que l'échiquier est invariant selon certaines symétries axiales ou rotations qu'une configuration adéquate minimale est également invariante selon ces transformations. Par exemple, dans le cas d'un échiquier 3×3, on montre aisément que la configuration ci-dessous est minimale, et elle n'est pourtant pas invariante par rotation, ou par de nombreuses symétries axiales.



Exercice 3. Soit $P_1, P_2, \ldots, P_{2019}$ des polynômes non constants à coefficients réels tels que

$$P_1(P_2(x)) = P_2(P_3(x)) = \ldots = P_{2019}(P_1(x))$$

pour tout réel x. Démontrer que $P_1 = P_2 = \ldots = P_{2019}$.

Solution de l'exercice 3 Nous allons en fait démontrer le résultat plus général suivant : si $P_1, \ldots, P_{2n+1}$ sont des polynômes non constants à coefficients réels et tels que $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_3 = \ldots = P_{2n+1} \circ P_1$, alors $P_1 = \ldots = P_{2n+1}$. Par commodité, dans la suite, on pose $P_{2n+1+k} = P_k$ pour tout $k \geqslant 1$.

Tout d'abord, on note d_k le degré de P_k. Puisque $P_k \circ P_{k+1}$ est un polynôme de degré $d_k d_{k+1}$, c'est que $d_k d_{k+1} = d_{k+1} d_{k+2}$, et donc $d_k = d_{k+2}$, pour tout k. On en déduit que tous les polynômes P_k ont degré d_1, et on pose simplement $d = d_1$.

Ensuite, soit p_k le coefficient dominant de P_k, c'est-à-dire son coefficient de degré d, et posons $q_k = p_k / p_{k+1}$. Le coefficient dominant de $P_k \circ P_{k+1}$ est égal à $p_k p_{k+1}^d$. On en déduit que $p_k p_{k+1}^d = p_{k+1} p_{k+2}^d$, c'est-à-dire que $q_k = q_{k+1}^{-d}$. Mais alors

$$1 = \prod_{i=k+1}^{k+2n+1} q_i = q_k^s,$$

où l'on a posé

$$s = \sum_{i=0}^{2n} (-d)^i \equiv 1 \pmod 2.$$

Puisque s est un entier impair, c'est donc que $q_k = 1$. Cela signifie donc que tous les polynômes P_k sont de coefficient dominant p_1, et on pose simplement $p = p_1$.

Supposons maintenant que $d = 1$. Dans ce cas, on peut écrire chaque polynôme P_k sous la forme $P_k(X) = pX + b_k$, et alors $P_k(P_{k+1}(X)) = p^2 X + p b_{k+1} + b_k$. On pose alors $c_k = b_{k+1} - b_k$, et puisque l'énoncé indique entre autres que $p b_{k+1} + b_k = p b_{k+2} + b_{k+1}$, cela signifie en fait que $c_k = -p c_{k+1}$. Là encore, on en déduit que $c_k = (-p)^{2n+1} c_k$, de sorte que $c_k = 0$ pour tout k, ou bien que $p = -1$; mais, dans ce second cas, on a tout de même $c_k = c_{k+1}$ pour tout k, de sorte que $0 = \sum_{i=1}^{2n+1} c_i = (2n+1) c_k$ et que l'on a $c_k = 0$ de toute façon. Ainsi, quand $d = 1$, les polynômes P_k sont bien égaux deux à deux.

Supposons enfin que $d \geqslant 2$. On note $p_{k,\ell}$ le coefficient de P_k de degré ℓ, et on va prouver par récurrence sur $d - \ell$ que $p_{k,\ell} = p_{1,\ell}$. Tout d'abord, pour $\ell = d$, on a bien $p_{k,d} = p = p_{1,d}$. On suppose donc maintenant que $p_{k,m} = p_{1,m}$ pour tout entier $m \geqslant \ell + 1$, et on étudie le coefficient de degré $d^2 - d + \ell$ du polynôme $P_k \circ P_{k+1}$. En écrivant $A \approx B$ dès lors que deux polynômes A et B ont même coefficient de degré $d^2 - d + \ell$, on constate que

$$\begin{aligned}
P_k(P_{k+1}(X)) &= \sum_{i=0}^{d} p_{k,i} \left(\sum_{j=0}^{d} p_{k+1,j} X^j \right)^i \\
&\approx p \left(\sum_{j=0}^{d} p_{k+1,j} X^j \right)^d + p_{k,d-1} \left(\sum_{j=0}^{d} p_{k+1,j} X^j \right)^{d-1} \\
&\approx p \left(p_{k+1,\ell} X^\ell + \sum_{j=\ell+1}^{d} p_{1,j} X^j \right)^d + p_{k,d-1} (p X^d)^{d-1} \\
&\approx d p_{k+1,\ell} p^d X^{d^2-d+\ell} + p \left(\sum_{j=\ell+1}^{d} p_{1,j} X^j \right)^d + p_{k,d-1} p^{d-1} X^{d^2-d}.
\end{aligned}$$

Pour $\ell \geqslant 1$, on en déduit que $dp_{k+1,\ell}p^d = dp_{1,\ell}p^d$, ce qui signifie bien que $p_{k+1,\ell} = p_{1,\ell}$. Puis, pour $\ell = 0$, on en déduit aussi que $dp_{k+1,0}p^d + p_{k,d-1} = dp_{1,0}p^d + p_{2n+1,d-1}$. Or, puisque $d \geqslant 2$, quand on en arrive à étudier le cas $\ell = 0$, on sait déjà que $p_{k,d-1} = p_{2n+1,d-1}$. On en déduit donc comme prévu que $p_{k+1,0} = p_{1,0}$, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs Ce problème était extrêmement difficile, et y obtenir des points était donc ardu. Malheureusement, plusieurs élèves ont perdu ces points si durement acquis en commettant des erreurs évitables, que nous listons ci-dessous :

- ▷ De nombreux élèves ont confondu la composée et le produit de deux polynômes. Ainsi, la composée $P \circ Q$ de deux polynômes P et Q de degrés d et d' est un polynôme de degré $d \times d'$, et non pas $d + d'$. De même, si P et Q sont de coefficients dominants p et q, alors le coefficient dominant de $P \circ Q$ est $p \times q^d$, et non pas $p \times q$. Enfin, les polynômes $P \circ (Q + R)$ et $(P \circ Q) + (P \circ R)$ sont, dans le cas général, des polynômes distincts l'un de l'autre.
- ▷ Certains élèves n'ont pas démontré que les polynômes P_i avaient même degré, affirmant qu'il s'agissait là d'une évidence. Cependant, cette affirmation dépendait de l'imparité de 2019, ce qui la rendait nettement moins évidente : il faut éviter de perdre bêtement 1 point pour économiser une ligne de rédaction.
- ▷ Il est recommandé de ne pas appeler P' un polynôme que l'on introduit, car P' désigne déjà le polynôme dérivé de P. Une telle notation peut donc prêter à confusion, pour le correcteur mais aussi pour l'élève lui-même !