ENVOI 2 : ALGÈBRE
CORRIGÉ

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient x, y des réels strictement positifs. Montrer que :

$$x + \frac{y^2}{x} \geqslant 2y,$$

et trouver les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 1 L'inégalité de la moyenne donne

$$x + \frac{y^2}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \frac{y^2}{x}} = 2y$$

Supposons qu'on a égalité, alors $x = \frac{y^2}{x}$ donc $x^2 = y^2$ donc $x = y$. Réciproquement si $x = y$, $x + \frac{y^2}{x} = y + \frac{y^2}{y} = 2y$ on a bien égalité.

Exercice 2. Soit $x \geqslant 0$ un réel. Montrer que :

$$1 + x^2 + x^6 + x^8 \geqslant 4x^4,$$

et trouver les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 2 On utilise l'inégalité arithmético-géométrique, dans le cas $n = 4$. On obtient $1 + x^2 + x^6 + x^8 \geqslant 4x^{\frac{2+6+8}{4}} = 4x^4$.

Supposons qu'on a égalité. D'après le cas d'égalité $x^2 = 1$, donc $x = 1$. Réciproquement si $x = 1$, on a $1 + x^2 + x^6 + x^8 = 4 = 4x^4$.

Exercice 3. Soit a, b, c des nombres réels. Montrer que :

$$2a^2 + 20b^2 + 5c^2 + 8ab - 4bc - 4ac \geqslant 0,$$

et trouver les cas d'égalité.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> L'inégalité est équivalente à $4bc + 4ac - 8ab \leqslant 2a^2 + 20b^2 + 5c^2$. Or on sait que $4ac = 2 \times a \times (2c) \leqslant a^2 + (2c)^2 = a^2 + 4c^2$ et que $4bc = 2 \times c(2b) \leqslant 4b^2 + c^2$. On a également $-8ab = 2 \times (-a) \times (4b) \leqslant a^2 + 16b^2$. En sommant toutes ces inégalités, on obtient $4bc + 4ac - 8ab \leqslant 2a^2 + 20b^2 + 5c^2$.
Supposons qu'on a égalité, dans ce cas on a égalité dans les trois inégalités utilisées : on a donc $a = 2c$, $c = 2b$ donc $a = 4b$ et $-a = 4b$. En particulier $-a = a$ donc $a = 0$ donc b et c sont également nuls. Réciproquement, si $a = b = c = 0$, on a bien égalité.
On aurait pu également remarquer que $2a^2 + 20b^2 + 5c^2 + 8ab - 4bc - 4ac = (a + 4b)^2 + (a - 2c)^2 + (2b - c)^2 \geqslant 0$ et trouver de la même façon le cas d'égalité.

Exercice 4. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Solution de l'exercice 4 En évaluant en $y = 0$ on obtient $f(x)f(0) = f(0) + x$ pour tout réel x. Pour $x = 1$, on obtient que $f(0) \neq 0$, sinon on aurait $1 = 0$. En évaluant en $x = 0$ on obtient $f(0)^2 = f(0)$ donc $f(0) = 1$ donc $f(x) = 1 + x$ pour tout x réel.
Réciproquement soit f la fonction telle que $f(x) = 1 + x$ pour tout x réel et soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $f(x)f(y) = (1 + x)(1 + y) = 1 + xy + x + y = f(xy) + x + y$ donc f vérifie bien l'équation. L'unique solution de l'équation est donc la fonction f telle que $f(x) = 1 + x$ pour tout x réel.

Exercice 5. Trouver tous les triplets de réels (a, b, c) vérifiant le système d'égalités :

$$\begin{cases} a(b^2+c) = c(c+ab) \\ b(c^2+a) = a(a+bc) \\ c(a^2+b) = b(b+ac). \end{cases}$$

Solution de l'exercice 5 Les égalités se réécrivent $ab(b-c) = c(c-a)$, $bc(c-a) = a(a-b)$ et $ca(a-b) = b(b-c)$. En multipliant ces trois égalités, on obtient $(abc)^2(c-a)(b-c)(a-b) = abc(c-a)(b-c)(a-b)$. En particulier deux cas se présentent :

— Soit $abc = 0$. Les égalités étant cycliques, supposons $a = 0$. Par la première égalité $c^2 = 0$ donc $c = 0$. Par la troisième égalité $b^2 = 0$ donc $b = 0$

— Soit deux des éléments parmi a, b, c sont égaux, on suppose $a = b$. Dans ce cas $bc(c-a) = 0$. Si $b = 0$ ou $c = 0$ on retombe dans le cas précédent, sinon $a = b = c$.

— Soit $abc = 1$, dans ce cas $a, b, c.$ sont non nuls Les égalités se réécrivent : $b - c = c^2(c-a)$, $c - a = a^2(a-b)$ et $a - b = b^2(b-c)$. En particulier $a-b$, $b-c$ et $c-a$ sont de même signe, mais de somme nulle et on a donc nécessairement $a-b = b-c = c-a = 0$ i.e ; $a = b = c$.

Exercice 6. Soient $a, b, c > 0$ tels que : $a+b+c=1$. Montrer que :

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+6 \geqslant 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}\right),$$

et déterminer les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 6 Le terme de droite de l'inégalité vaut $2\sqrt{2}(\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{a+c}{b}})$. On utilise l'inégalité arithmético-géométrique : $2\sqrt{2\frac{b+c}{a}} \leqslant 2+\frac{b+c}{a}$. De même $2\sqrt{\frac{b+a}{c}} \leqslant 2+\frac{b+a}{c}$ et $2\sqrt{\frac{a+c}{b}} \leqslant 2+\frac{a+c}{b}$. En sommant ces trois inégalités, on obtient

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+6 \geqslant 2\sqrt{2}(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}})$$

Supposons qu'on a égalité, alors en regardant le premier cas d'égalité, on a $\frac{b+c}{a}=2$ donc $1-a=2a$ donc $a=\frac{1}{3}$. En regardant les deux autres cas d'égalité on obtient $a=b=c=\frac{1}{3}$. Réciproquement si $a=b=c=\frac{1}{3}$, $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+6=12$ et $2\sqrt{2}(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}})=2\sqrt{2}(3\times\sqrt{2})=12$; on a bien égalité.

Exercice 7. Soit a, b, c des réels strictement positifs tels que : $ab + bc + ca = abc$. Montrer que :

$$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} \leqslant \frac{1}{6},$$

et trouver les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 7 Posons $u = \frac{1}{a}$, $v = \frac{1}{b}$, $w = \frac{1}{c}$. En divisant par abc, la condition se réécrit $u + v + w = 1$. L'inégalité voulue se réécrit $\frac{u^2v^2}{u^2+w^2} + \frac{u^2w^2}{u^2+w^2} + \frac{v^2w^2}{v^2+w^2} \leqslant \frac{1}{6}$. On utilise l'inégalité arithmético-géométrique sur les dénominateurs : $u^2 + v^2 \geqslant 2uv$ et similairement sur les deux autres. On obtient $\frac{u^2v^2}{u^2+w^2} + \frac{u^2w^2}{u^2+w^2} + \frac{v^2w^2}{v^2+w^2} \leqslant \frac{1}{2}(uv + vw + uw)$. Or $1 = (u+v+w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + wu) \geqslant 3(uv + vw + uw)$ par lemme du tourniquet. En particulier $uv + vw + uw \leqslant \frac{1}{3}$ donc $\frac{u^2v^2}{u^2+w^2} + \frac{u^2w^2}{u^2+w^2} + \frac{v^2w^2}{v^2+w^2} \leqslant \frac{1}{6}$.
Pour les cas d'égalité, on a égalité dans le lemme du tourniquet, donc $u = v = w$ donc $a = b = c$. En réinjectant dans la condition, $3a^2 = a^3$ donc $a = b = c = 3$. Réciproquement si $a = b = c = 3$, on a $\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} = \frac{3}{2\times 9} = \frac{1}{6}$ on a bien égalité.

Exercice 8. Soient $a_1, \ldots, a_{2019}$ des entiers positifs. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) il existe un réel x tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, 2019\}$, on a : $a_i = \lfloor ix \rfloor$

(ii) pour tous $i, j \in \{1, \ldots, 2019\}$ vérifiant $i + j \leqslant 2019$, on a : $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$.

Solution de l'exercice 8 Prouvons tout d'abord le sens direct : s'il existe x réel tel que pour tout i entre 1 et 2019, $a_i = \lfloor ix \rfloor$, et si on se donne i, j entre 1 et 2019 tels que $i + j \leqslant 2019$, alors $(i+j)x = ix + jx \geqslant \lfloor ix \rfloor + \lfloor jx \rfloor = a_i + a_j$ et $(i+j)x = ix + jx < \lfloor ix \rfloor + 1 + \lfloor jx \rfloor + 1 = a_i + a_j + 2$, donc $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} < a_i + a_j + 2$. Comme les a_i sont entiers, on a donc $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$.
Réciproquement supposons que pour tout i, j entre 1 et 2019 tels que $i + j \leqslant 2019$, $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$. Trouver x tel que pour tout i entre 1 et 2019, $a_i = \lfloor ix \rfloor$ revient à trouver x tel que pour tout i entre 1 et 2019, $a_i \leqslant ix < a_i + 1$, c'est-à-dire tel que pour tout i, $\frac{a_i}{i} \leqslant x < \frac{a_i+1}{i}$. Il suffit donc de montrer que le maximum des $\frac{a_i}{i}$ pour i entre 1 et 2019 est strictement inférieur au minimum des $\frac{a_j+1}{j}$ pour j entre 1 et 2019, ou plus simplement que $\frac{a_i}{i} \leqslant \frac{a_j+1}{j}$ pour tout i, j entre 1 et 2019.
Montrons cela par récurrence forte sur $m = \max(i, j)$. Si $m = 1$, $i = j = 1$ donc l'inégalité est évidente. Pour l'hérédité, supposons l'inégalité vraie pour tout i, j entre 1 et m. On veut montrer l'inégalité $\frac{a_i}{i} < \frac{a_j+1}{j}$, où $1 \leqslant i, j \leqslant m + 1$. Il y a trois cas à traiter :

— Si $i = j$ l'inégalité est évidente.

— Si $i < j$, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $(i, j-i)$: $a_j \geqslant a_i + a_{j-i} > a_i + (j-i)\frac{a_i}{i} - 1 = a_i \times \frac{j}{i} - 1$ donc $\frac{a_j+1}{j} > \frac{a_i}{i}$

— Si $i > j$, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $(i-j, j)$: $a_i \leqslant a_j + a_{i-j} + 1 < a_j + \frac{(i-j)(a_j+1)}{j} = a_j\frac{i}{j} + \frac{i-j}{j} < (a_j + 1)\frac{i}{j}$ donc $\frac{a_i}{i} < \frac{a_j+1}{j}$

Exercice 9. Soit a, b, c, d des réels strictement positifs tels que : $a+b+c+d=1$. Montrer que :

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+bc^2+c^3}+\frac{c^4}{c^3+c^2d+cd^2+d^3}+\frac{d^4}{d^3+d^2a+da^2+a^3}\geqslant\frac{1}{4},$$

et déterminer les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 9 Dans cette solution, on va utiliser à plusieurs reprises l'inégalité $2(x^2+y^2)\geqslant(x+y)^2\ \ (*)$, valable pour tous réels x, y avec égalité si et seulement si $x=y$. Déjà notons que $a^3+a^2b+ab^2+b^3=(a^2+b^2)(a+b)$. En particulier l'inégalité se réécrit $\sum\limits_{\text{cycl.}}\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a+b)}\geqslant\frac{1}{4}$. Notons S la somme de gauche dans l'inégalité précédente. Chaque dénominateur des termes de S est symétrique en les deux variables qu'il contient, on cherche donc une relation entre S et $\sum\limits_{\text{cycl.}}\frac{b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}$. Calculons la différence des deux termes :

$$S-\sum_{\text{cycl.}}\frac{b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}=\sum_{\text{cycl.}}\frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}=\sum_{\text{cycl.}}\frac{a^2-b^2}{(a+b)}=\sum_{\text{cycl.}}a-b=0$$

En particulier $S=\sum\limits_{\text{cycl.}}\frac{b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}$ donc $2S=\sum\limits_{\text{cycl.}}\frac{a^4+b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}$. Par $(*)$, $a^4+b^4\geqslant\frac{(a^2+b^2)^2}{2}$ donc en sommant $2S\geqslant\sum\limits_{\text{cycl.}}\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$. $(*)$ donne de nouveau $a^2+b^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}$ donc en sommant $2S\geqslant\sum\limits_{\text{cycl.}}\frac{a+b}{4}=\frac{2(a+b+c+d)}{4}=\frac{1}{2}$ donc $S\geqslant\frac{1}{4}$.

Supposons qu'on a égalité. Dans ce cas on a les égalités cycliques $a=b$, soit $a=b=c=d$. Par la condition sur la somme $4a=1$ donc $a=\frac{1}{4}$.

Réciproquement si $a=b=c=d=\frac{1}{4}$, alors $a+b+c+d=1$ et $S=\sum\limits_{\text{cycl.}}\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}=\sum\limits_{\text{cycl.}}\frac{a^4}{4a^3}=\sum\limits_{\text{cycl.}}\frac{a}{4}=4\frac{a}{4}=\frac{1}{4}$ on a bien égalité.

Exercices Seniors

Exercice 10. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Solution de l'exercice 10 En évaluant en $y = 0$ on obtient $f(x)f(0) = f(0) + x$ pour tout réel x. Pour $x = 1$, on obtient que $f(0) \neq 0$, sinon on aurait $1 = 0$. En évaluant en $x = 0$ on obtient $f(0)^2 = f(0)$ donc $f(0) = 1$ donc $f(x) = 1 + x$ pour tout x réel.

Réciproquement soit f la fonction telle que $f(x) = 1 + x$ pour tout x réel et soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $f(x)f(y) = (1 + x)(1 + y) = 1 + xy + x + y = f(xy) + x + y$ donc f vérifie bien l'équation. L'unique solution de l'équation est donc la fonction f telle que $f(x) = 1 + x$ pour tout x réel.

Exercice 11. Soit x, y des réels. Montrer que :

$$|x| + |y| \leqslant |x - y| + |x + y|.$$

Solution de l'exercice 11 Si x et y sont positifs, $|x| + |y| = x + y = |x + y|$. Si x et y sont négatifs $|x| + |y| = -x - y = |x + y|$. Si x est positif et y négatif $|x| + |y| = x - y = |x - y|$. Si x est négatif et y positif $|x| + |y| = y - x = |x - y|$. Dans tous les cas par positivité de la valeur absolue $|x| + |y| \leqslant |x - y| + |x + y|$.

Exercice 12. Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que pour tous réels x, y,

$$xP(x) + yP(y) \geqslant 2P(xy).$$

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Si $P(X) = cX$ avec $c \geqslant 0$, $xP(x) + yP(y) = c(x^2 + y^2) \geqslant 2cxy = 2P(xy)$ par inégalité de la moyenne, les polynômes de la forme cX avec $c \geqslant 0$ conviennent, montrons que ce sont les seuls. Supposons P non constant. En évaluant en $(x, 0)$ l'inégalité, on obtient $xP(x) \geqslant 2P(0)$. En regardant la limite en $+\infty$, on obtient que le coefficient dominant de P est forcément strictement positif (car P ne peut tendre vers $-\infty$). En évaluant en (x, x), on obtient $xP(x) \geqslant P(x^2)$. Le polynôme $XP(X)$ est de degré $\deg(P) + 1$, $P(X^2)$ est de degré $2\deg(P)$. Si $2\deg(P) > \deg(P) + 1$, alors $P(X^2) - XP(X)$ est un polynôme de degré $2\deg(P)$ de coefficient dominant strictement positif, donc il est strictement positif pour x assez grand, contradiction. En particulier $2\deg(P) \leqslant \deg(P) + 1$ donc P est un polynôme de degré au plus 1 et de coefficient dominant strictement positif.
Maintenant posons $P(X) = aX + b$ avec $a \geqslant 0$. En évaluant l'inégalité en (x, x) on obtient $ax^2 + bx \geqslant ax^2 + b$ donc $bx \geqslant b$. Pour $x = 2$, on obtient $b \geqslant 0$, pour $x = 0$ on obtient $b \leqslant 0$ donc $b = 0$. Ainsi $P(X) = aX$ avec $a \geqslant 0$ ce qui conclut.

Exercice 13. Trouver toutes les suites périodiques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels strictement positifs, et telles que pour tout $n \geqslant 1$,

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n+1}} + x_n\right).$$

Solution de l'exercice 13 Soit $n \geqslant 1$. En multipliant la relation de récurrence par x_{n+1}, on obtient que $x_{n+2}x_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + x_{n+1}x_n)$. Ainsi $(x_{n+2}x_{n+1} - 1) = \frac{1}{2}(x_{n+1}x_n - 1)$. En particulier $x_{n+1}x_n - 1 = \frac{1}{2^{n-1}}(x_2x_1 - 1)$. Si la suite (x_n) est périodique, la suite $x_{n+1}x_n - 1$ l'est aussi de même période, ce qui n'est possible d'après l'équation précédente que si $x_2x_1 - 1 = 0$. Dans ce cas pour tout $n \geqslant 1$, $x_{n+1}x_n - 1 = 0$, donc $x_{n+1} = \frac{1}{x_n}$. En réinjectant cela dans l'équation de récurrence, on obtient que pour tout $n \geqslant 1$, $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+2} + x_n)$ donc $\frac{1}{2}x_{n+2} = \frac{1}{2}x_n$ soit $x_{n+2} = x_n$. En particulier (x_n) est 2-périodique et vérifie $x_2 = \frac{1}{x_1}$. On a donc $x_n = x_1$ si n est impair, $x_n = \frac{1}{x_1}$ si n est pair.
Réciproquement soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $x_n = a$ si n est impair, $x_n = \frac{1}{a}$ si n est pair. Comme $\frac{1}{x_{n+1}} = x_n$, on a $\frac{1}{2}(\frac{1}{x_{n+1}} + x_n) = x_n = x_{n+2}$ pour tout $n \geqslant 1$. La suite (x_n) est donc 2-périodique et vérifie la relation de récurrence donnée.
Les suites vérifiant l'énoncé sont les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $x_n = a$ si n est impair, $x_n = \frac{1}{a}$ si n est pair pour $a > 0$.

Exercice 14. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y.$$

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> En évaluant l'égalité en $(0, y)$, $f(f(y)) = f(0)^2 + y$. En particulier $f \circ f$ est bijective, donc f est injective et surjective donc bijective. Soit a tel que $f(a) = 0$. En évaluant en (a, a), $f(0) = f(af(a) + f(a)) = f(a)^2 + a = a$ donc $f(0) = a$. En particulier on obtient que $f(f(0)) = 0$. Comme pour tout y, $f(f(y)) = f(0)^2 + y$, en évaluant en $y = 0$, on obtient $f(0)^2 = 0$ donc $f(0) = 0$. En particulier, pour tout y, $f(f(y)) = y$.
Evaluons désormais l'égalité en $(x, 0)$, on obtient $f(xf(x)) = f(x)^2$. En évaluant l'égalité précédente en $f(x)$ on obtient $f(f(x)f(f(x))) = f(f(x))^2$ donc $f(xf(x)) = x^2$. En particulier $x^2 = f(x)^2$ pour tout x réel, donc pour tout réel x, $f(x) = \pm x$.
Montrons désormais que pour tout x, $f(x) = x$ ou pour tout x, $f(x) = -x$. Supposons qu'il existe a et b non nuls tels que $f(a) = a$ et $f(b) = -b$. En évaluant l'égalité initiale en (a, b), on obtient que $f(a^2 - b) = a^2 + b$, donc $a^2 + b$ vaut $a^2 - b$ ou $b - a^2$, ainsi $a = 0$ ou $b = 0$ ce qui est absurde. On en déduit donc que pour tout x, $f(x) = x$ ou pour tout x, $f(x) = -x$.
Réciproquement si $f(x) = x$ pour tout réel x, $f(xf(x) + f(y)) = f(x^2 + y) = x^2 + y = f(x)^2 + y$ donc f est solution. Si $f(x) = -x$ pour tout réel x, $f(xf(x) + f(y)) = f(-x^2 - y) = x^2 + y = f(x)^2 + y$ donc f est solution. Les solutions sont donc la fonction identité et son opposé.

Exercice 15. Soient $a_1, \ldots, a_{2019}$ des entiers positifs. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) il existe un réel x tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, 2019\}$, on a : $a_i = \lfloor ix \rfloor$

(ii) pour tous $i, j \in \{1, \ldots, 2019\}$ vérifiant $i + j \leqslant 2019$, on a : $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$.

Solution de l'exercice 15 Prouvons tout d'abord le sens direct : s'il existe x réel tel que pour tout i entre 1 et 2019, $a_i = \lfloor ix \rfloor$, et si on se donne i, j entre 1 et 2019 tels que $i + j \leqslant 2019$, alors $(i + j)x = ix + jx \geqslant \lfloor ix \rfloor + \lfloor jx \rfloor = a_i + a_j$ et $(i + j)x = ix + jx < \lfloor ix \rfloor + 1 + \lfloor jx \rfloor + 1 = a_i + a_j + 2$, donc $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} < a_i + a_j + 2$. Comme les a_i sont entiers, on a donc $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$.
Réciproquement supposons que pour tout i, j entre 1 et 2019 tels que $i + j \leqslant 2019$, $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$. Trouver x tel que pour tout i entre 1 et 2019, $a_i = \lfloor ix \rfloor$ revient à trouver x tel que pour tout i entre 1 et 2019, $a_i \leqslant ix < a_i + 1$, c'est-à-dire tel que pour tout i, $\frac{a_i}{i} \leqslant x < \frac{a_i+1}{i}$. Il suffit donc de montrer que le maximum des $\frac{a_i}{i}$ pour i entre 1 et 2019 est strictement inférieur au minimum des $\frac{a_j+1}{j}$ pour j entre 1 et 2019, ou plus simplement que $\frac{a_i}{i} < \frac{a_j+1}{j}$ pour tout i, j entre 1 et 2019.
Montrons cela par récurrence forte sur $m = \max(i, j)$. Si $m = 1$, $i = j = 1$ donc l'inégalité est évidente. Pour l'hérédité, supposons l'inégalité vraie pour tout i, j entre 1 et m. On veut montrer l'inégalité $\frac{a_i}{i} < \frac{a_j+1}{j}$, où $1 \leqslant i, j \leqslant m + 1$. Il y a trois cas à traiter :

— Si $i = j$ l'inégalité est évidente.

— Si $i < j$, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $(i, j-i)$: $a_j \geqslant a_i + a_{j-i} > a_i + (j-i)\frac{a_i}{i} - 1 = a_i \times \frac{j}{i} - 1$ donc $\frac{a_j+1}{j} > \frac{a_i}{i}$

— Si $i > j$, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $(i - j, j)$: $a_i \leqslant a_j + a_{i-j} + 1 < a_j + \frac{(i-j)(a_j+1)}{j} = a_j \frac{i}{j} + \frac{i-j}{j} < (a_j + 1)\frac{i}{j}$ donc $\frac{a_i}{i} < \frac{a_j+1}{j}$

Exercice 16. Soit $1 < t < 2$ un nombre réel. Montrer que pour tout entier d suffisamment grand, il existe un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $a_d = 1$ et $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \{1, -1\}$, tel que :

$$|P(t) - 2019| \leqslant 1.$$

Solution de l'exercice 16 Soient $d \geqslant 2019$ un entier et $a_1 < \ldots < a_k$ les $d-$uplets de la forme $(\pm 1, \ldots, \pm 1)$, ordonnés par ordre lexicographique (en partant de la droite !, c'est-à-dire que $a_i > a_j$ si et seulement si le premier terme non nul de $a_i - a_j$ en partant de la droite est > 0), avec $k = 2^d$.
Pour passer de a_i à a_{i+1}, on regarde le premier -1 en partant de la droite dans a_i, on le change par un 1, et on remplace tous les 1 à sa droite par des -1. Par exemple si $d = 3$, les triplets sont dans l'ordre $a_1 = (-1, -1, -1)$, $a_2 = (-1, -1, 1)$, $a_3 = (-1, 1, -1)$, $a_4 = (-1, 1, 1) a_5 = (1, -1, -1)$, $a_6 = (1, -1, 1)$, $a_7 = (1, 1, -1)$ et $a_8 = (1, 1, 1)$.
On associe à $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{id})$ le polynôme $P_i(X) = \sum_{j=1}^{d} a_{ij} X^{j-1}$, de telle sorte que $M := -P_1(t) = P_k(t) = 1 + \ldots + t^{d-1} > d$.
Or $|P_{i+1}(t) - P_i(t)| = 2|t^l - (1 + \ldots + t^{l-1})|$ pour un certain $l \geqslant 0$ (qui dépend de i) pour tout i.
Montrons $t^l - (1 + \ldots + t^{l-1}) \leqslant 1$: cela équivaut à $t^{l+1} - t^l - (t^l - 1) \leqslant t - 1$ après multiplication par $t - 1$, soit après réarrangement $t^l(2 - t) + t \geqslant 2$, ce qui est vrai car $t^l \geqslant 1$.
Dès lors, $P_{i+1}(t)$ est plus grand que $P_i(t)$ d'au plus 2, ce qui montre que, puisque $2019 - t^d \in [-M; M]$, il existe i tel que $|P_i(t) - (2019 - t^d)| \leqslant 1$, ce qui conclut en posant $P = X^d + P_i$

Exercice 17. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$(f(x)+y)(f(x-y)+1) = f(f(xf(x+1)) - yf(y-1)).$$

<u>*Solution de l'exercice 17*</u> Clairement, $f(x) = x$ est une solution ; on va montrer que c'est la seule. On pose dans la suite $a = f(0)$.
Avec $y = 0$ on a $f(f(xf(x+1))) = f(x)(f(x)+1)$ $(*)$ pour tout x.
Si on prend $y = -f(x)$ on voit que la fonction f admet des zéros.
Dès lors pour exploiter $(*)$ il est intéressant de choisir y tel que $f(f(xf(x+1)) - yf(y-1)) = f(f(xf(x+1)))$, ce qui est possible en prenant $y = z+1$ avec $f(z) = 0$. On a alors $(f(x)+z+1)(f(x-z)+1) = f(x)(f(x)+1)$, ce qui se simplifie avec $x = z$: $(z+1)(f(-1)+1) = 0$.
Si $z = -1$, on a $f(-1) = 0$, donc avec $x = 0, y = 1$, on a $a+1 = a$, une évidente contradiction.
On a donc montré $f(-1) = -1$. On reprend $x = 0, y = 1$ pour avoir $f(0) = 0$. Dès lors $y = 1$ dans l'équation montre que $(f(x)+1)(f(x-1)+1) = f(x)(f(x)+1)$ (1) d'après $(*)$.
$x = 0$ puis $x = -1$ dans l'équation originelle donne $y(f(-y)+1) = (y-1)(f(-y-1)+1)$ (2). Ainsi, si on avait $(1')$: $f(x) = f(x-1)+1$, on pourrait déduire de (2) $y(f(-y)+1) = (y-1)f(-y)$, puis $f(-y) = -y$, ce qui montrerait que f est l'identité.
Pour montrer $(1')$, commençons par prouver que $f(x) = 0 \iff x = 0$.
Soit t tel que $f(t) = 0$; d'après (1), on a $f(t-1) = -1$. (2) donne alors, avec $y = -t$, $t = 0$, comme voulu.
Montrons à présent $f(x) = -1 \iff x = -1$.
Si $f(t) = -1$, $(*)$ donne $f(f(tf(t+1))) = 0$ donc $tf(t+1) = 0$. Or $t \neq 0$ car $f(0) \neq -1$, donc $f(t+1) = 0$ et ainsi $t = -1$ comme voulu.
Pour montrer $(1')$ d'après (1), il suffit donc de voir que $f(-2) = f(-1) - 1 = -2$. Or $f(2) = 2$ en utilisant (1) donc $(*)$ avec $x = -2$ donne $2 = f(-2) + f(-2)^2$ et donc $f(-2) \in \{-2, 1\}$. Mais si $f(-2) = 1$, (1) donne $f(-3) = 0$, impossible d'après ce qu'on a montré. Cela conclut la preuve de $(1')$ et donc la solution.

Exercice 18. Soient P, Q deux polynômes à coefficients réels, non constants et premiers entre eux. Montrer qu'il existe au plus trois réels λ tels que :

$$P + \lambda Q = R^2,$$

où $R \in \mathbb{R}[X]$.

<u>*Solution de l'exercice 18*</u> On procède par l'absurde en supposant l'existence de quatre réels distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ et quatre polynômes $R_1, \dots, R_4$ tels que $P + \lambda_i Q = R_i^2$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.
On a $P' + \lambda_i Q' = 2R_i R_i'$ et donc $R_i \mid Q'(P + \lambda_i Q) - Q(P' + \lambda_i Q') = PQ' - QP'$.
Remarquons que si $T \mid R_i, R_j$ alors $T \mid R_i^2 - R_j^2 = (\lambda_i - \lambda_j)Q$ puis $T \mid R_i^2 - \lambda_i Q = P$ et donc T est constant, car P, Q sont premiers entre eux.
Dès lors les R_i sont deux à deux premiers entre eux et ainsi $R_1R_2R_3R_4 \mid PQ' - P'Q$.
Soient A, B des polynômes non nuls ; le degré de $A + \lambda B$, si $\lambda \in \mathbb{R}$, est égal à $\max\{\deg(A), \deg(B)\}$, sauf si $\deg(A) = \deg(B)$ et $\lambda = -\frac{a}{b}$ où a, b sont les coefficients dominants de A et B respectivement, auquel cas il est plus petit.
Si $A = P$ et $B = Q$, cela montre que, soit $\deg R_i = \frac{1}{2}\max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ pour tout i, et donc que $\deg(R_1R_2R_3R_4) = 2\max\deg\{P, Q\} > \deg(P) + \deg(Q) - 1 \geqslant \deg(PQ' - P'Q)$, soit il y a un R_i, tel que $\deg(R_i) < \deg(R_j)$ pour $j \neq i$; alors pour $A = P + \lambda_i Q =: P_1$ et $B = Q$ on voit que $\deg(R_i) = \frac{1}{2}\deg(P_1)$ et $\deg R_j = \frac{1}{2}\max\{\deg(P_1), \deg(Q)\}$ et donc $\deg(R_1R_2R_3R_4) = \frac{3}{2}\max\{\deg(P_1), \deg(Q)\} + \frac{1}{2}\deg(P_1) > \deg(Q) + \deg(P_1) - 1 \geqslant \deg(P_1Q' - P_1'Q) = \deg(PQ' - P'Q)$.
Par un argument sur les degrés, on a donc nécessairement $PQ' - P'Q = 0$ et ainsi $P \mid P'Q$. Or P et Q sont premiers entre eux donc $P \mid P'$, ce qui est une évidente contradiction à P non constant.