ENVOI 2 : ALGÈBRE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 15 DÉCEMBRE 2019

Consignes

- Le groupe Junior est constitué des élèves nés en 2005 ou après, et cherche les exercices Juniors.
- Le groupe Senior est constitué des élèves nés en 2004 ou avant, et cherche les exercices Seniors.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- **Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.**
- Respecter la numérotation des exercices.
- **Bien préciser, sur chaque copie, votre nom en majuscules et votre prénom en minuscules.**

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

contact-pofm@animath.fr

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient x, y des réels strictement positifs. Montrer que :

$$x + \frac{y^2}{x} \geqslant 2y,$$

et trouver les cas d'égalité.

Exercice 2. Soit $x \geqslant 0$ un réel. Montrer que :

$$1 + x^2 + x^6 + x^8 \geqslant 4x^4,$$

et trouver les cas d'égalité.

Exercice 3. Soit a, b, c des nombres réels. Montrer que :

$$2a^2 + 20b^2 + 5c^2 + 8ab - 4bc - 4ac \geqslant 0,$$

et trouver les cas d'égalité.

Exercice 4. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Exercice 5. Trouver tous les triplets de réels (a, b, c) vérifiant le système d'égalités :

$$\begin{cases} a(b^2 + c) = c(c + ab) \\ b(c^2 + a) = a(a + bc) \\ c(a^2 + b) = b(b + ac). \end{cases}$$

Exercice 6. Soient $a, b, c > 0$ tels que : $a + b + c = 1$. Montrer que :

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 6 \geqslant 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} + \sqrt{\frac{1-c}{c}} + \sqrt{\frac{1-b}{b}}\right),$$

et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 7. Soit a, b, c des réels strictement positifs tels que : $ab + bc + ca = abc$. Montrer que :

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \leqslant \frac{1}{6},$$

et trouver les cas d'égalité.

Exercice 8. Soient $a_1, \dots, a_{2019}$ des entiers positifs. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) il existe un réel x tel que pour tout $i \in \{1, \dots, 2019\}$, on a : $a_i = \lfloor ix \rfloor$

(ii) pour tous $i, j \in \{1, \dots, 2019\}$ vérifiant $i + j \leqslant 2019$, on a : $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$.

Exercice 9. Soit a, b, c, d des réels strictement positifs tels que : $a + b + c + d = 1$. Montrer que :

$$\frac{a^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} + \frac{b^4}{b^3 + b^2c + bc^2 + c^3} + \frac{c^4}{c^3 + c^2d + cd^2 + d^3} + \frac{d^4}{d^3 + d^2a + da^2 + a^3} \geqslant \frac{1}{4},$$

et déterminer les cas d'égalité.

Exercices Seniors

Exercice 10. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Exercice 11. Soit x, y des réels. Montrer que :

$$|x| + |y| \leqslant |x - y| + |x + y|.$$

Exercice 12. Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que pour tous réels x, y,

$$xP(x) + yP(y) \geqslant 2P(xy).$$

Exercice 13. Trouver toutes les suites périodiques $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels strictement positifs, et telles que pour tout $n \geqslant 1$,

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n+1}} + x_n\right).$$

Exercice 14. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y.$$

Exercice 15. Soient $a_1, \ldots, a_{2019}$ des entiers positifs. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) il existe un réel x tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, 2019\}$, on a : $a_i = \lfloor ix \rfloor$

(ii) pour tous $i, j \in \{1, \ldots, 2019\}$ vérifiant $i + j \leqslant 2019$, on a : $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$.

Exercice 16. Soit $1 < t < 2$ un nombre réel. Montrer que pour tout entier d suffisamment grand, il existe un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $a_d = 1$ et $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \{1, -1\}$, tel que :

$$|P(t) - 2019| \leqslant 1.$$

Exercice 17. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$(f(x) + y)(f(x - y) + 1) = f(f(xf(x + 1)) - yf(y - 1)).$$

Exercice 18. Soient P, Q deux polynômes à coefficients réels, non constants et premiers entre eux. Montrer qu'il existe au plus trois réels λ tels que :

$$P + \lambda Q = R^2,$$

où $R \in \mathbb{R}[X]$.