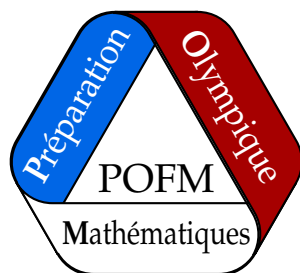


# PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 15 MAI 2019

DURÉE : 4H

## Instructions

- ▷ Le groupe Junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après.  
Le groupe Senior est constitué des élèves nés en 2003 ou avant.
- ▷ Les exercices 1 à 4 ne concernent que les élèves du groupe Junior.  
Les exercices 5 à 7 ne concernent que les élèves du groupe Senior.
- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

**Chaque exercice est noté sur 7 points.**

Animath,  
Préparation Olympique Française de Mathématiques,  
11-13 rue Pierre et Marie Curie,  
75005 Paris.

[copies.ofm@gmail.com](mailto:copies.ofm@gmail.com)

## Exercices du groupe Junior

**Exercice 1.** Soit  $S$  un ensemble d'entiers. On dit que  $S$  est *insommable* si, pour tous les entiers  $x$  et  $y$  appartenant à  $S$ , la somme  $x + y$  n'appartient pas à  $S$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $s_n$  le nombre de sous-ensembles de  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  qui sont insommables.

Démontrer que  $s_n \geq 2^n$ .

**Exercice 2.** Soit  $m$  et  $n$  deux entiers naturels. Démontrer que  $n! \neq m^2 + 2019$ .

**Exercice 3.** Soit  $ABC$  un triangle, et soit  $M$  le pied de la médiane issue de  $A$ . Soit également  $\ell_b$  la bissectrice de  $\widehat{AMB}$  et  $\ell_c$  la bissectrice de  $\widehat{AMC}$ . Enfin, soit  $B'$  le projeté orthogonal de  $B$  sur  $\ell_b$ , soit  $C'$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $\ell_c$ , et soit  $A'$  le point d'intersection des droites  $(AM)$  et  $(B'C')$ .

Démontrer que  $A'B' = A'C'$ .

**Exercice 4.** Soit  $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction telle que

$$f(n+2) = (f(n+1) + f(n))/2$$

pour tout entier  $n$ . On suppose que  $f$  est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel  $F$  tel que  $-F \leq f(n) \leq F$  pour tout  $n$ .

Démontrer que  $f$  est une fonction constante.

## Exercices du groupe Senior

**Exercice 5.** Soit  $A, B, C$  et  $P$  quatre points du plan tels que  $ABC$  soit un triangle équilatéral et que  $AP < BP < CP$ . On suppose que la seule donnée des longueurs  $AP, BP$  et  $CP$  nous permet de déterminer, de manière unique, la longueur  $AB$ .

Démontrer que  $P$  appartient au cercle circonscrit à  $ABC$ .

**Exercice 6.** Soit  $a_0, a_1, \dots, a_d$  des entiers tels que  $\text{PGCD}(a_0, a_1) = 1$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^d a_k \varphi(n+k).$$

Démontrer que 1 est le seul entier naturel divisant tous les entiers  $u_n$ .

On rappelle que  $\varphi(n+k)$  est le nombre d'entiers naturels  $\ell < n+k$  tels que  $\text{PGCD}(\ell, n+k) = 1$ .

**Exercice 7.** L'énoncé de cet exercice sera disponible le 3 mars 2020.