PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 15 MAI 2019
DURÉE : 4H

Instructions

- Le groupe Junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après.
  Le groupe Senior est constitué des élèves nés en 2003 ou avant.
- Les exercices 1 à 4 ne concernent que les élèves du groupe Junior.
  Les exercices 5 à 7 ne concernent que les élèves du groupe Senior.
- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

copies.ofm@gmail.com

Exercices du groupe Junior

Exercice 1. Soit S un ensemble d'entiers. On dit que S est *insommable* si, pour tous les entiers x et y appartenant à S, la somme $x+y$ n'appartient pas à S. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note s_n le nombre de sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ qui sont insommables.
Démontrer que $s_n \geqslant 2^n$.

Exercice 2. Soit m et n deux entiers naturels. Démontrer que $n! \neq m^2 + 2019$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle, et soit M le pied de la médiane issue de A. Soit également ℓ_b la bissectrice de $\widehat{AMB}$ et ℓ_c la bissectrice de $\widehat{AMC}$. Enfin, soit B' le projeté orthogonal de B sur ℓ_b, soit C' le projeté orthogonal de C sur ℓ_c, et soit A' le point d'intersection des droites (AM) et $(B'C')$.
Démontrer que $A'B' = A'C'$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f(n+2) = (f(n+1) + f(n))/2$$

pour tout entier n. On suppose que f est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\mathbf{F}$ tel que $-\mathbf{F} \leqslant f(n) \leqslant \mathbf{F}$ pour tout n.
Démontrer que f est une fonction constante.

Exercices du groupe Senior

Exercice 5. Soit A, B, C et P quatre points du plan tels que ABC soit un triangle équilatéral et que $AP < BP < CP$. On suppose que la seule donnée des longueurs AP, BP et CP nous permet de déterminer, de manière unique, la longueur AB.
Démontrer que P appartient au cercle circonscrit à ABC.

Exercice 6. Soit $a_0, a_1, \ldots, a_d$ des entiers tels que $\mathrm{PGCD}(a_0, a_1) = 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{d} a_k \varphi(n+k).$$

Démontrer que 1 est le seul entier naturel divisant tous les entiers u_n.
On rappelle que $\varphi(n+k)$ *est le nombre d'entiers naturels* $\ell < n+k$ *tels que* $\mathrm{PGCD}(\ell, n+k) = 1$.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Clara dispose d'un plateau de taille $3n \times 3n$, semblable à un échiquier. Elle vient d'inventer une nouvelle pièce, le *léopard*, qu'elle peut mouvoir comme suit : en le déplaçant d'une case vers le haut, d'une case vers la droite, ou bien d'une case en diagonale, vers le bas et la gauche. Clara a posé son léopard sur une des cases du plateau, puis elle l'a déplacé, de sorte qu'il ne passe jamais deux fois par la même case, jusqu'à ce qu'il revienne à sa case de départ.
Quelle est le plus grand nombre possible de déplacements que Clara a pu effectuer en procédant de la sorte ?