PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 15 MAI 2019
DURÉE : 4H

Instructions

- Le groupe Junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après.
  Le groupe Senior est constitué des élèves nés en 2003 ou avant.
- Les exercices 1 à 4 ne concernent que les élèves du groupe Junior.
  Les exercices 5 à 7 ne concernent que les élèves du groupe Senior.
- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

copies.ofm@gmail.com

Exercices du groupe Junior

Exercice 1. Soit S un ensemble d'entiers. On dit que S est *insommable* si, pour tous les entiers x et y appartenant à S, la somme $x+y$ n'appartient pas à S. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note s_n le nombre de sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ qui sont insommables.
Démontrer que $s_n \geqslant 2^n$.

Solution de l'exercice 1 Soit S une partie de $\{n+1, \ldots, 2n\}$. Une telle partie est insommable, puisque, pour tous les entiers x, y et z appartenant à S, on a $x+y \geqslant 2(n+1) > 2n \geqslant z$. Or, il existe 2^n parties de $\{n+1, \ldots, 2n\}$. On en déduit bien que $s_n \geqslant 2^n$.

Note : On peut en fait démontrer que $2^{n+4} \geqslant s_n \geqslant 2^{n+1}$ pour tout $n \geqslant 3$. L'inégalité $s_n \geqslant 2^{n+1}$ s'obtient, par exemple, comme suit.
Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, 2n\}$, on note E_k l'ensemble des parties de $\{\lfloor k/2 \rfloor + 1, \ldots, k\}$ auxquelles appartient k. Si un ensemble S appartient à E_k, alors pour tous x et y appartenant à S, on a bien $x+y \geqslant 2\lfloor k/2 \rfloor + 2 > k = \max S$, donc S est insommable.
Or, E_k contient exactement $2^{k-\lfloor k/2 \rfloor - 1}$ ensembles, et k est l'élément maximum de tout ensemble S appartenant à E_k, donc les ensembles E_k sont deux à deux disjoints. Si on pose $k = 2\ell - \varepsilon$, avec $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$, on a alors $k - \lfloor k/2 \rfloor - 1 = 2\ell - \varepsilon - (\ell - \varepsilon) - 1 = \ell - 1$, donc $|E_k| = 2^{\ell-1}$.
Enfin, puisque $n \geqslant 3$, les ensembles $\{1, 2n\}$ et $\{2, 2n\}$ sont tous deux insommables, et n'appartiennent pas à E_{2n}. On en déduit que

$$s_{2n} \geqslant 2 + \sum_{k=1}^{2n} |E_k| = 2 + \sum_{\ell=1}^{n} |E_{2\ell-1}| + |E_{2\ell}| = 2 + 2\sum_{\ell=1}^{n} 2^{\ell-1} = 2 + 2^{n+1} - 2 = 2^{n+1}.$$

Exercice 2. Soit m et n deux entiers naturels. Démontrer que $n! \neq m^2 + 2019$.

Solution de l'exercice 2 Procédons par l'absurde, et supposons que l'on dispose de deux entiers naturels m et n tels que $n! = m^2 + 2019$. Tout d'abord, on sait que $n! \geqslant 2019 > 6! = 720$, donc que $n \geqslant 7$. Par conséquent, $n!$ est divisible par $7! = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$, et l'on a $0 \equiv m^2 + 2019 \pmod{7!}$.

En vertu de la décomposition en produit de facteurs premiers énoncée ci-dessus et du théorème Chinois, cela signifie que -2019 est un carré modulo k pour tout entier k, parmi 2^4, 3^2, 5 et 7.

On pourrait démontrer que cela ne constitue pas une contradiction pour $k = 5$ et $k = 7$. En revanche, -2019 n'est pas un carré modulo 9 (ni modulo 16). En effet, si $m^2 \equiv -2019 \equiv -3 \pmod 9$, alors 3 divise m, donc 9 divise m^2, qui devrait donc être congru à la fois à 0 et à -3 modulo 9.

Ainsi, dès lors que $n \geqslant 7$, on a en fait $n! \equiv 0 \not\equiv m^2 - 3 \equiv m^2 + 2019 \pmod 9$, ce qui montre bien que nulle paire d'entiers naturels (m, n) ne peut satisfaire l'équation $n! = m^2 + 2019$.

Note : On a également $-2019 \equiv 5 \pmod 8$, alors que $n^2 \equiv 1 \pmod 8$ pour tout entier n impair. Ainsi, comme prévu, -2019 n'est pas un carré modulo 8, donc modulo 2^4 non plus.

Exercice 3. Soit ABC un triangle, et soit M le pied de la médiane issue de A. Soit également ℓ_b la bissectrice de $\widehat{AMB}$ et ℓ_c la bissectrice de $\widehat{AMC}$. Enfin, soit B' le projeté orthogonal de B sur ℓ_b, soit C' le projeté orthogonal de C sur ℓ_c, et soit A' le point d'intersection des droites (AM) et $(B'C')$.

Démontrer que $A'B' = A'C'$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Soit β l'angle $\widehat{AMB'}$ et γ l'angle $\widehat{AMC'}$. Par construction, on sait que $2(\beta+\gamma) = 180°$, donc que $\widehat{B'MC'} = \beta+\gamma = 90°$. Ainsi, la droite $\ell_b = (MB')$ est perpendiculaire aux droites (BB') et $\ell_c = (MC')$, et la droite $\ell_c = (MC')$ est perpendiculaire aux droites (CC') et $\ell_b = (MB')$.

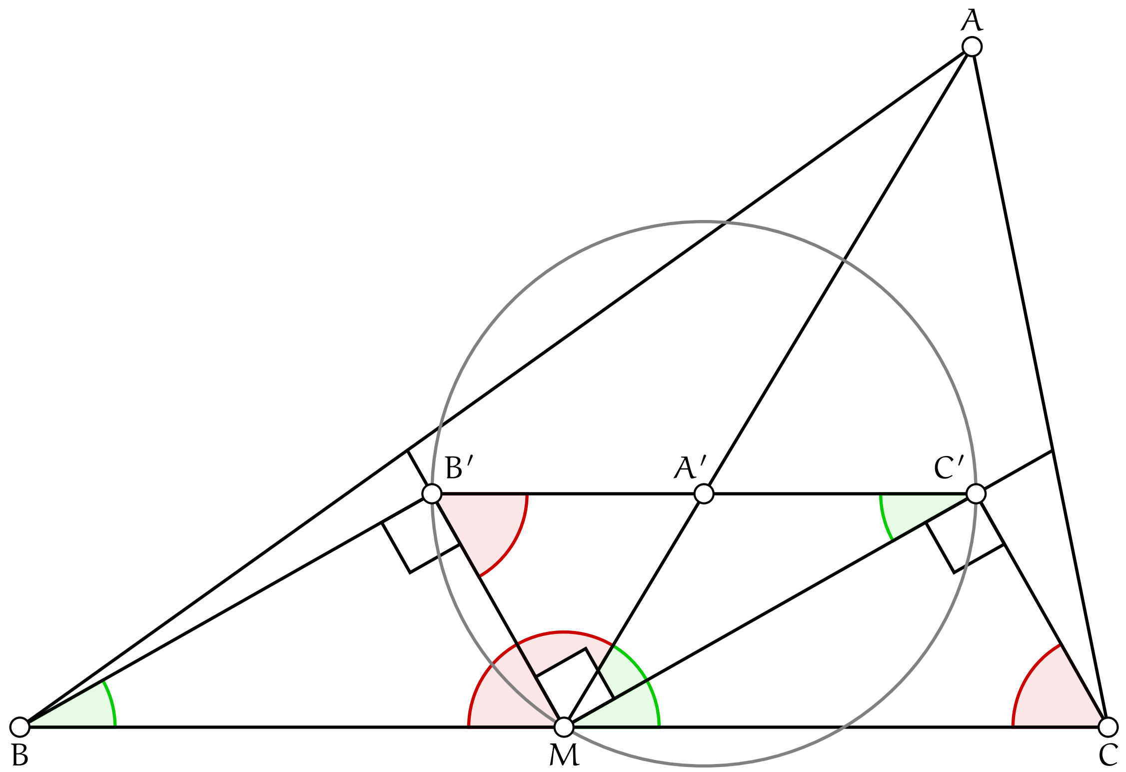
D'autre part, on remarque que $\widehat{B'BM} = 180° - \widehat{BB'M} - \widehat{BMB'} = 180° - 90° - \beta = \gamma$ et que, de même, $\widehat{C'CM} = \beta$. Ainsi, les deux triangles $BB'M$ et $MC'C$ sont semblables. En outre, puisque M est le pied de la médiane de ABC issue de A, c'est en fait le milieu de [BC], donc $BM = MC$. Les deux triangles $BB'M$ et MCC' sont donc isométriques.

En particulier, on en déduit que $BB' = MC'$ et que $CC' = MB'$. Mais alors, puisque le triangle $MB'C'$ est rectangle en M, il a un angle et deux côtés de mêmes mesures que le triangle $B'MB$, et il est donc isométrique avec $B'MB$ et avec $C'CM$.

On en déduit notamment que

$$\widehat{A'C'M} = \widehat{B'C'M} = \widehat{MBB'} = \gamma = \widehat{AMC'} = \widehat{A'MC'},$$

donc que le triangle $A'C'M$ est isocèle en A'. De même, le triangle $A'B'M$ est isocèle en A', et on en conclut comme prévu que $A'B' = A'M = A'C'$.



Exercice 4. Soit $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f(n+2) = (f(n+1) + f(n))/2$$

pour tout entier n. On suppose que f est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\mathbf{F}$ tel que $-\mathbf{F} \leqslant f(n) \leqslant \mathbf{F}$ pour tout n.
Démontrer que f est une fonction constante.

Solution de l'exercice 4 Supposons que f n'est pas constante. Il existe donc un entier n et un réel $\varepsilon \neq 0$ tels que $f(n+1) - f(n) = \varepsilon$.
Pour tout entier k, posons $\Delta_k = f(k+1) - f(k)$. Alors

$$\Delta_{k+1} = f(k+2) - f(k+1) = (f(k+1) + f(k))/2 - f(k+1) = -\Delta_k/2$$

et, réciproquement, $\Delta_{k-1} = -2\Delta_k$. Une récurrence immédiate indique alors que $\Delta_{n-k} = (-2)^k \varepsilon$ pour tout $k \geqslant 0$.
Or, pour tout entier k, on sait que $|\Delta_k| \leqslant |f(k+1)| + |f(k)| \leqslant 2\mathbf{F}$. Mais ceci est incompatible avec le fait que $|\Delta_{n-k}| = 2^k|\varepsilon|$ pout tout $k \geqslant 0$. Notre supposition initiale était donc absurde, et f est bien constante.

Exercices du groupe Senior

Exercice 5. Soit A, B, C et P quatre points du plan tels que ABC soit un triangle équilatéral et que $AP < BP < CP$. On suppose que la seule donnée des longueurs AP, BP et CP nous permet de déterminer, de manière unique, la longueur AB.

Démontrer que P appartient au cercle circonscrit à ABC.

Solution de l'exercice 5 Soit Γ_a, Γ_b et Γ_c les cercles de centre P et passant respectivement par A, B et C. Soit également $C^\bullet$ le symétrique de C par rapport à (AP). Notons que $C^\bullet$ est le seul point de Γ_c, autre que C lui-même, tel que $AC = AC^\bullet$.

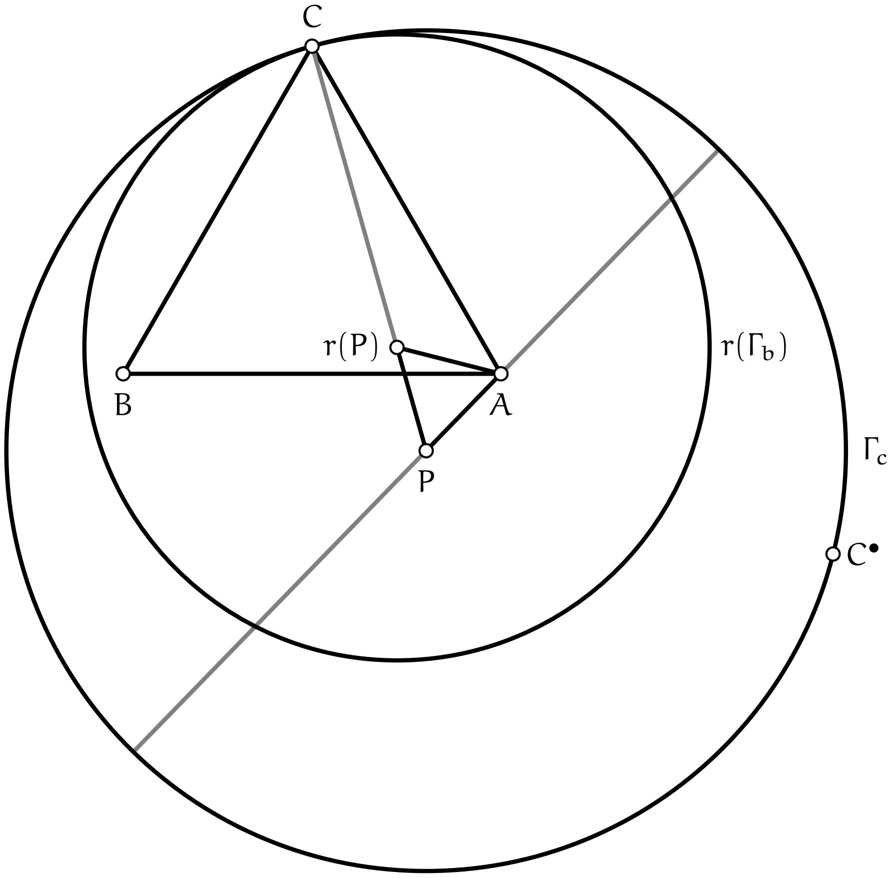
On note maintenant r la rotation de centre A et d'angle $60°$ dans le sens horaire. Quitte à faire subir une symétrie à la figure de répart, on suppose que $C = r(B)$.

Puis, à tout point B' de Γ_b, on associe le point $C' = r(B')$. Le triangle $AB'C'$ est équilatéral, et l'hypothèse de l'énoncé stipule donc que, pour tout B', le point C' ne peut appartenir à Γ_c que s'il est égal à C ou à $C^\bullet$.

Or, quand B' décrit Γ_b, le point C' décrit le cercle $r(\Gamma_b)$, de centre $r(P)$ et de rayon PB. Ce cercle ne peut contenir à la fois les points C et $C^\bullet$, puisque alors son centre se trouverait sur la médiatrice (AP) de $[CC^\bullet]$, ce qui n'est pas le cas de $r(P)$.

Comme $r(\Gamma_b)$ contient déjà C, il ne peut donc pas contenir d'autre point de Γ_c, et puisque $r(P)A = PA < PB$, on sait que A est situé à l'intérieur de $r(\Gamma_b)$, qui est donc tangent intérieurement, en le point C, à Γ_c.

Comme $PB = r(P)C < PC$, c'est en fait que les points C, $r(P)$ et P sont alignés dans cet ordre. On en déduit que $PC = r(P)C + r(P)P = PB + PA$, ou encore que $CP \cdot AB = BP \cdot AC + AP \cdot BC$. L'égalité de Ptolémée indique donc que les points A, B, C et P sont cocycliques, ce qui conclut.



Exercice 6. Soit $a_0, a_1, \ldots, a_d$ des entiers tels que $\mathrm{PGCD}(a_0, a_1) = 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{d} a_k \varphi(n+k).$$

Démontrer que 1 est le seul entier naturel divisant tous les entiers u_n.

On rappelle que $\varphi(n+k)$ *est le nombre d'entiers naturels* $\ell < n+k$ *tels que* $\mathrm{PGCD}(\ell, n+k) = 1$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Procédons par l'absurde, et supposons qu'il existe un nombre premier p qui divise tous les entiers u_n.

Tout d'abord, puisque $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$ et que $\varphi(n)$ est pair pour tout $n \geqslant 2$, on remarque que $u_1 \equiv a_0 + a_1 \pmod 2$ et que $u_2 \equiv a_0 \pmod 2$. Comme a_0 et a_1 sont premiers entre eux, les entiers u_1 et u_2 ne peuvent donc pas être pairs tous les deux, de sorte que $p \geqslant 3$.

Soit alors δ le plus grand entier tel que p ne divise pas a_δ. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathbf{T}_n$ le δ-uplet $(\varphi(n), \varphi(n+1), \ldots, \varphi(n+\delta-1))$, considéré modulo p. Puisque $u_n \equiv 0 \pmod p$, c'est que

$$\varphi(n+\delta) \equiv -a_\delta^{-1} \sum_{k=0}^{\delta-1} a_k \varphi(n+k) \pmod p.$$

Ainsi, si l'on note $\lambda : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\delta \mapsto (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\delta$ la fonction définie par

$$\lambda : (x_0, x_1, \ldots, x_{\delta-1}) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{\delta-1}, -a_\delta^{-1} \sum_{k=0}^{\delta-1} a_k x_k),$$

on a $\mathbf{T}_{n+1} = \lambda(\mathbf{T}_n)$. Or, d'après le principe des tiroirs, il existe deux entiers $k, \ell \geqslant 1$ tels que $\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_{k+\ell}$. On a alors $\mathbf{T}_n = \mathbf{T}_{n+\ell}$ et $\varphi(n) \equiv \varphi(n+\ell) \pmod p$ pour tout $n \geqslant k$.

On montre alors le lemme suivant : pour tous les entiers $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 3$, il existe un nombre premier $q > a$ tel que $q \not\equiv 1 \pmod b$. En effet, l'entier $m = \max\{a, b\}! - 1$ est congru à $-1 \pmod b$, donc il admet nécessairement un facteur premier $q \not\equiv 1 \pmod b$, et q ne peut pas diviser $m + 1 = \max\{a, b\}!$, donc $q > a$.

En appliquant ce lemme deux fois de suite, on en déduit qu'il existe deux nombres premiers q et r tels que $q, r \not\equiv 1 \pmod p$ et $q > r > k + \ell$. Mais alors q est premier avec ℓ, donc $q^{\varphi(\ell)} \equiv 1 \pmod \ell$, et $\varphi(q^{\varphi(\ell)} n) \equiv \varphi(n) \pmod p$ pour tout $n \geqslant k$.

Puisque $q > r \geqslant k$, on en déduit que

$$\begin{aligned}(q-1)q^{\varphi(\ell)} &\equiv \varphi(q^{\varphi(\ell)+1}) \equiv \varphi(q) \equiv q - 1 \pmod p \\ (r-1)(q-1)q^{\varphi(\ell)-1} &\equiv \varphi(rq^{\varphi(\ell)}) \equiv \varphi(r) \equiv r - 1 \pmod p.\end{aligned}$$

Comme $q, r \not\equiv 1 \pmod p$, c'est que $q^{\varphi(\ell)} \equiv (q-1)q^{\varphi(\ell)-1} \equiv 1 \pmod p$, donc que $q^{\varphi(\ell)-1} \equiv 0 \pmod p$, ce qui est impossible. On a ainsi obtenu la contradiction souhaitée, ce qui conclut.

Note : On peut aussi faire appel au théorème de Dirichlet, qui affirme que, pour tous les entiers a et b premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers $q \equiv a \pmod b$. Il existe alors des nombres premiers $q_0 > q_1 > \ldots > q_d > p + d$ congrus à $1 \pmod p$. Puis, si on choisit $k \in \{0, 1\}$ tel que p ne divise pas a_k, il existe aussi un nombre premier r tel que $r \equiv 2 \pmod p$ et $r \equiv k - i \pmod{q_i}$ pour tout $i \neq k$. Alors p ne divise pas u_{r-k}.

Exercice 7. **L'énoncé et un corrigé de cet exercice seront disponibles le 3 mars 2020.**