Inégalités

Théo Lenoir

1 Un carré est positif

On commence par une remarque assez anodine : un carré est toujours positif.

Proposition 1.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

On peut en déduire une première inégalité, en développant $(a-b)^2$ qui, d'après la proposition 1, est positif.

Proposition 2.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, avec égalité si et seulement si $a = b$.

Démonstration. On utilise le fait que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$. On en déduit que $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ avec égalité si et seulement si $(a-b)^2 = 0$, c'est-à-dire si $a = b$. □

On peut noter que l'inégalité est équivalente à $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$. Elle permet donc de majorer (c'est-à-dire trouver une quantité plus grande) un produit par une somme de carrés avec un certain coefficient.

En prenant $b = 1$, on peut déduire le résultat suivant :

Corollaire 3.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $a^2 + 1 \geqslant 2a$, avec égalité si et seulement si $a = 1$.

On a également l'inégalité suivante :

Proposition 4.
Soit c, d des réels positifs. Alors $c + d \geqslant 2\sqrt{cd}$,avec égalité si et seulement si $c = d$. En particulier pour $d = 1$, on a $1 + c \geqslant 2\sqrt{c}$, avec égalité si et seulement si $c = 1$.

Démonstration. Posons $a = \sqrt{c}$, $b = \sqrt{d}$ et appliquons la proposition 2 : on obtient $a^2 + b^2 = c + d \geqslant 2ab = 2\sqrt{cd}$. On a égalité si et seulement si $a = b$, c'est à dire si et seulement si $a^2 = c = d = b^2$, par positivité de a et b. □

Exercice 1 Soit $x > 0$. Montrer que $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 2 Montrer que $5x^2 + y^2 + 1 \geqslant 4xy + 2x$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 3 Lemme du tourniquet : Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 4 Montrer que $x^2 + y^4 + z^6 \geqslant xy^2 + y^2 + z^3 + xz^3$, et trouver les cas d'égalité.

Exercice 5 Montrer que si $ab + bc + ca = 1$ pour des réels positifs a, b, c, alors $a + b + c \geqslant \sqrt{3}$. Trouver les cas d'égalité.

2 Inégalité arithmético-géométrique

L'inégalité suivante est une généralisation très utile de la proposition 4.

Théorème 5 (Inégalité arithmético-géométrique)**.**

Soit n un entier strictement positif et $x_1 \dots x_n$ des réels positifs. On a l'inégalité suivante : $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$. Il y a égalité si et seulement si tous les x_i sont égaux.

Remarque 6.
L'inégalité est appelée inégalité arithmético-géométrique car elle compare la moyenne arithmétique $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ et la moyenne géométrique $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$ des x_i.

Ici, si $x \geqslant 0$, alors $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel $y \geqslant 0$ tel que $y^n = x$, où y^n est le produit de n réels valant tous y.

L'inégalité arithmético-géométrique est un outil indispensable reliant le produit de termes à leur somme : ainsi quand on sait minorer (c'est-à-dire trouver une quantité plus petite) le produit de termes, on sait également minorer la somme. De même, quand on sait majorer une somme de termes, on peut majorer leur produit.

Passons à la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique.

Démonstration. La preuve est un peu technique et loin d'être nécessaire pour maîtriser l'inégalité arithmético-géométrique. Pas de panique si elle semble trop dure à lire dans un premier temps, ne pas hésiter à la relire avec un peu plus d'expérience.

On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$, $\frac{x_1}{1} = \sqrt[1]{x_1}$. On a donc bien l'égalité et l'inégalité.

Supposons l'inégalité et le cas d'égalité prouvé au rang n. Soient $x_1, \dots, x_{n+1}$ des réels positifs. Notons $S = \frac{x_1+\cdots+x_{n+1}}{n+1}$. Comme S est compris entre le minimum des x_i et le maximum des x_i, quitte à renuméroter les x_i, on peut supposer x_1 étant le minimum des x_i, x_2 le maximum. Posons $y_1 = S$, $y_2 = x_2 - (S - x_1) = x_2 - S + x_1 \geqslant 0$, et $y_i = x_i$ pour $3 \leqslant i \leqslant n+1$, les y_i sont bien tous positifs. On a $y_2 + \cdots + y_{n+1} = x_1 + \cdots + x_{n+1} - S = (n+1)S - S = nS$, ce qui signifie que $\frac{y_2+\cdots+y_{n+1}}{n} = S$. D'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a $y_2 + \cdots + y_{n+1} \leqslant \left(\frac{y_2+\cdots+y_{n+1}}{n}\right)^n = S^n$. En particulier $y_1 \times y_2 \dots y_{n+1} \leqslant S^{n+1}$.

Or $y_1y_2 - x_1x_2 = S(x_1+x_2-S) - x_1x_2 = Sx_1 + Sx_2 - S^2 - x_1x_2 = (S-x_1)(x_2-S) \geqslant 0$ donc $x_1x_2 \leqslant y_1y_2$. En particulier $x_1 \dots x_{n+1} \leqslant y_1 \dots y_{n+1} = S^{n+1}$, donc $\sqrt[n+1]{x_1 \dots x_{n+1}} \leqslant S = \frac{x_1+\cdots+x_{n+1}}{n+1}$: l'inégalité est prouvée.

Pour le cas d'égalité, supposons qu'on a égalité. Notons d'abord que si un des x_i est nul, on a égalité si et seulement si $\frac{x_1+\dots x_{n+1}}{n+1} = 0$. Comme les x_i sont positifs, pour avoir égalité il faut que tous les x_i soient nuls, donc $x_1 = \cdots = x_{n+1}$. Si les x_i sont tous non nuls, en particulier S est non nul car supérieur au minimum des x_i, et les y_i sont non nuls (c'est évident pour $i \geqslant 3$, pour $i = 1$ ça vient du fait que $S > 0$, et $y_2 = x_2 - S + x_1 \geqslant x_1 > 0$). En particulier, si on a égalité, on a égalité dans les deux inégalités précédentes : c'est à dire dans $y_2+\cdots+y_{n+1} \leqslant \left(\frac{y_2+\cdots+y_{n+1}}{n}\right)^n$ et $y_1y_2 - x_1x_2 = S(x_1+x_2-S) - x_1x_2 = Sx_1+Sx_2-S^2-x_1x_2 = (S-x_1)(x_2-S) \geqslant 0$. Par hypothèse de récurrence, cela donne que $y_2 = y_3 = \cdots = y_{n+1}$ et $x_1 = S$ ou $x_2 = S$. En particulier $x_3 = \cdots = x_{n+1}$. Si $x_1 = S$, alors $y_2 = x_2 = x_3 \dots x_{n+1}$, ainsi $S = \frac{S+x_2+\dots x_{n+1}}{n+1} = \frac{S+nx_2}{n+1}$. On obtient que $(n+1)S = S + nx_2$, donc $nx_2 = nS$ donc $x_2 = S$. En particulier $S = x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$. On obtient le même résultat si $x_2 = S$. Réciproquement si $x_1 = \cdots = x_{n+1}$, $\frac{x_1+\cdots+x_{n+1}}{n+1} = x_1 = \sqrt[n+1]{x_1 \dots x_{n+1}}$, on a bien égalité.

□

On peut écrire cette inégalité de diverses façons.

Corollaire 7.
Soit n un entier strictement positif, $y_1, \dots, y_n$ des réels positifs. On a les inégalités suivantes : $\frac{y_1^n+\cdots+y_n^n}{n} \geqslant y_1 \dots y_n$ et $\left(\frac{y_1+\dots y_n}{n}\right)^n \geqslant y_1 \dots y_n$ avec égalité si et seulement si tous les y_i sont égaux

Démonstration. La deuxième inégalité est immédiate en prenant la puissance n-ième de l'inégalité arithmético-géométrique appliquée aux y_i. La première inégalité est une conséquence de l'inégalité arithmético-géométrique appliquée aux y_i^n qui sont égaux si et seulement si les y_i le sont par positivité. □

Voici quelques exercices pour mettre en pratique les inégalités précédentes. Les solutions sont présentées à la partie 6.

Exercice 6 Soit a, b, c, d positifs tels que $abcd = 1$. Montrer que $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd+bc+ad+ac+bd \geqslant 10$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 7 Soit a, b, c des réels positifs tels que $(a+1)(b+1)(c+1) = 8$. Montrer que $a+b+c \geqslant 3$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 8 Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels positifs de produit 1. Montrer que $(1+a_1)\dots(1+a_n) \geqslant 2^n$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 9 Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels positifs de somme n. Montrer que $(1+\frac{1}{a_1})\dots(1+\frac{1}{a_n}) \geqslant 2^n$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 10 Soit a, b, c, d des réels positifs de somme 1. Montrer que $\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} \leqslant \frac{1}{9}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 11 Soit a, b, c des réels positifs de produit $\frac{1}{8}$. Montrer que $a^2+b^2+c^2+a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2 \geqslant \frac{15}{16}$. Trouver les cas d'égalité.

3 Cauchy-Schwarz et mauvais élèves

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une inégalité très importante : en effet, elle permet de relier la somme des carrés, avec le carré de sommes.

Théorème 8 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots a_n$ et $b_1, \dots b_n$ des réels. On a l'inégalité suivante :

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2$$

.

On a égalité si et seulement si tous les b_i sont nuls ou il existe λ réel tels que $a_i = \lambda b_i$ pour tout entier i entre 1 et n.

Démonstration. Soit i et j des entiers entre 1 et n. On sait que $a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 \geqslant 2a_i b_i a_j b_j$ par la proposition 2. Fixons j et sommons les inégalités pour toutes les valeurs de i possibles : on obtient que $(a_1^2 + \dots + a_n^2)b_j^2 + a_j^2(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geqslant 2a_j b_j(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)$. Sommons ensuite sur toutes les valeurs de j entre 1 et n : on obtient que $(a_1^2+\dots+a_n^2)(b_1+\dots+b_n^2)+(a_1^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+\dots+b_n^2) \geqslant 2(a_1 b_1+\dots+a_n b_n)(a_1 b_1+\dots+a_n b_n)$. En particulier, en simplifiant par 2,

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2.$$

Intéressons nous au cas d'égalité : supposons qu'on a égalité. Dans ce cas, on a égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique utilisée c'est-à-dire dans $a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 \geqslant 2a_i b_i a_j b_j$. Ainsi on a nécessairement $a_i b_j = a_j b_i$ pour tout (i, j) entiers entre 1 et n. Supposons qu'il existe i tel que b_i soit non nul. Dans ce cas, pour tout j entre 1 et n, $a_j = \frac{a_i}{b_i} b_j$. En particulier pour $\lambda = \frac{a_i}{b_i}$ on a bien $a_j = \lambda b_j$ pour tout entier j entre 1 et n. Réciproquement, soit tous les b_i sont nuls, et dans ce cas $(a_1^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+\dots+b_n^2) = 0 = (a_1 b_1+\dots+a_n b_n)^2$, soit il existe λ réel tel que $a_j = \lambda b_j$ pour tout entier j entre 1 et n, et dans ce cas $(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) = \lambda^2(b_1^2 + \dots + b_n^2)^2 = (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2$.

□

Notons qu'on a plusieurs conséquences de cette inégalité :

Corollaire 9.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $c_1, \dots c_n$ et $c_1, \dots c_n$ des réels. On a l'inégalité suivante :

$$(c_1 + \dots + c_n)(d_1 + \dots + d_n) \geqslant \left(\sqrt{c_1 d_1} + \dots + \sqrt{c_n d_n}\right)^2$$

Il y a égalité si et seulement si les d_i sont tous nuls ou s'il existe λ réel positif tel que $c_i = \lambda d_i$ pour tout i entre 1 et n.

Démonstration. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $a_i = \sqrt{c_i}$ et $b_i = \sqrt{d_i}$. □

On a un corollaire très utile de cette inégalité, appelé *inégalité des mauvais élèves* : on additionne les numérateurs de fractions et on échange une somme avec un carré, et alors on obtient un résultat plus petit.

Théorème 10 (Inégalité des mauvais élèves)**.**
Soit n un entier strictement positif, $e_1, \dots, e_n$ des réels, et $f_1 \dots f_n$ des réels strictement positifs. On a l'inégalité suivante :

$$\frac{e_1^2}{f_1} + \dots + \frac{e_n^2}{f_n} \geqslant \frac{(e_1 + \dots + e_n)^2}{f_1 + \dots + f_n}.$$

Il y a égalité si et seulement s'il existe un réel λ tel que $e_i = \lambda f_i$ pour tout i entre 1 et n.

Démonstration. On applique le corollaire 9 avec $c_i = \frac{e_i^2}{f_i}$ et $d_i = f_i$. On en déduit que

$$\left(\frac{e_1^2}{f_1} + \dots + \frac{e_n^2}{f_n}\right)(f_1^2 + \dots + f_n^2) \geqslant \left(\sqrt{\frac{e_1^2}{f_1} f_1} + \dots + \sqrt{\frac{e_n^2}{f_n} f_n}\right)^2 = (|e_1| + \dots |e_n|)^2.$$

Ici, si x est réel, $|x|$ est la valeur absolue de x : elle vaut x si x est positif, $-x$ sinon. Comme $(|e_1| + \dots |e_n|) \geqslant e_1 + \dots e_n \geqslant -(|e_1| + \dots |e_n|)$, on sait que $(e_1 + \dots + e_n)^2 \leqslant (|e_1| + \dots |e_n|)^2$, et donc que

$$\left(\frac{e_1^2}{f_1} + \dots + \frac{e_n^2}{f_n}\right)(f_1^2 + \dots + f_n^2) \geqslant (|e_1| + \dots |e_n|)^2 \geqslant (e_1 + \dots e_n)^2.$$

On en déduit que $\frac{e_1^2}{f_1}+\cdots+\frac{e_n^2}{f_n} \geqslant \frac{(e_1+\cdots+e_n)^2}{f_1+\cdots+f_n}$.

Intéressons nous au cas d'égalité : si on a égalité, alors comme les f_i sont non nuls, il existe un réel t tel que, pour tout i, $\frac{e_i^2}{f_i} = tf_i$, c'est-à-dire $e_i = \pm\sqrt{t}f_i$. Pour avoir égalité dans $(e_1+\cdots+e_n)^2 \leqslant (|e_1|+\ldots|e_n|)^2$, et comme $(|e_1|+\ldots|e_n|) \geqslant e_1+\ldots e_n \geqslant -(|e_1|+\ldots|e_n|)$, il faut avoir soit $(|e_1|+\ldots|e_n|) = e_1+\ldots e_n$ c'est-à-dire tous les e_i positifs, (et, en particulier, $e_i = \sqrt{t}f_i$ pour tout i), soit $e_1+\ldots e_n \geqslant -(|e_1|+\ldots|e_n|)$, c'est à dire tous les e_i négatifs (et, en particulier, $e_i = -\sqrt{t}f_i$ pour tout i). Réciproquement, s'il existe λ réel tel que pour tout i $e_i = \lambda f_i$, on obtient bien l'égalité :

$$\frac{e_1^2}{f_1}+\cdots+\frac{e_n^2}{f_n} = \lambda^2(f_1+\cdots+f_n = (e_1+\ldots\frac{(e_1+\cdots+e_n)^2}{f_1+\cdots+f_n}.$$

□

Exercice 12 Soit $a_1\ldots a_n$ des réels strictement positifs. Montrer que $\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n} \geqslant \frac{n^2}{a_1+\cdots+a_n}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 13 Soit $a_1\ldots a_n$ des réels. Montrer que $a_1^2+\cdots+a_n^2 \geqslant \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{n}$

Exercice 14 Montrer que si a, b, c sont des réels positifs tels que $a^2+b^2+c^2 = 3$, $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac} \geqslant \frac{3}{2}$. Trouver les cas d'égalité.

Remarque 11. En utilisant l'exercice 13 pour la première inégalité et l'inégalité arithmético-géométrique appliquée aux $\frac{1}{x_i}$ pour la dernière inégalité, on obtient les inégalités suivantes : pour tout n strictement positif et $x_1,\ldots,x_n$ des réels strictement positifs :

$$\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1\ldots x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots\frac{1}{x_n}}$$

L'égalité de chaque inégalité est lorsque tous les x_i sont égaux. Le terme le plus à gauche est la moyenne quadratique, le second terme la moyenne arithmétique, le troisième la moyenne géométrique, le dernier est la moyenne harmonique.

4 Inégalité du réordonnement

Si les mathématiques sont coefficient 4, et la technologie coefficient 1, vaut-il mieux avoir 10 en mathématiques et 20 en technologie ou l'inverse ? Evidemment il vaut mieux avoir 20 en mathématiques et 10 en technologie pour avoir une meilleur moyenne. L'inégalité du réordonnement traduit cela.

Tout d'abord définissons ce qu'est une permutation.

Définition 12.
Soit $n \geqslant 1$ un entier $x_1,\ldots,x_n$ et $y_1,\ldots,y_n$ des réels. On dit que les (y_i) sont une permutation des (x_i) si ce sont les mêmes nombres mais placés dans un ordre différent.

Par exemple pour $n = 3$, si on pose $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$, la suite $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ et $y_3 = 0$ est une permutation des (x_i) car $(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_3, y_2)$. Par contre la suite $z_1 = 1$, $z_2 = 1$ et $z_3 = 0$ n'est pas une permutation des (x_i). En effet, elle contient deux fois le chiffre 1, alors que la suite des (x_i) ne le contient qu'une fois.

Énonçons maintenant l'inégalité du réordonnement. La preuve étant un peu technique, elle peut être passée en première lecture.

Théorème 13 (Inégalité du réordonnement)**.**
Soit $n \geqslant 1$ un entier et $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ des réels, et $c_1, c_2, \ldots, c_n$ une permutation des (b_i). On a l'inégalité suivante :

$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n \geqslant a_1c_1+\cdots+a_nc_n.$$

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur n. Pour $n = 1$, l'inégalité est évidente. Supposons maintenant l'inégalité vraie pour un certain $n \geqslant 1$, et donnons nous des réels $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots a_{n+1}$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_{n+1}$, ainsi qu'une permutation $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ des nombres (b_i). Si $b_1 = c_1$, par hypothèse de récurrence, on a $b_2a_2+\cdots+b_{n+1}a_{n+1} \geqslant a_2c_2+\cdots+a_{n+1}c_{n+1}$, donc $b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_{n+1}a_{n+1} \geqslant a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{n+1}c_{n+1}$.

Si $c_1 \neq b_1$, soit i tel que $c_1 = b_i$ et j tel que $c_j = b_1$. Dans ce cas, $a_1b_1 + b_ia_j - (a_1c_1 + a_jb_i) = (a_1 - a_j)(b_1 - b_i) \geqslant 0$. En particulier $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{n+1}c_{n+1} \leqslant a_1b_1 + a_2c_2 + \cdots + a_ic_1 + \ldots a_{n+1}c_{n+1}$. Comme la famille $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1} \ldots c_{n+1}$ est une permutation de $b_2 \ldots b_{n+1}$, on en déduit par hypothèse de récurrence que $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{n+1}c_{n+1} \leqslant a_1b_1 + a_2c_2 + \cdots + a_ic_1 + \ldots a_{n+1}c_{n+1} \leqslant a_1b_1 + \cdots + a_{n+1}b_{n+1}$ ce qui conclut. □

Remarque 14.
Le cas d'égalité de l'inégalité du réordonnement n'est pas présenté. En effet il est assez pénible à décrire et souvent peu utile.

Une autre version utile de cette inégalité est le cas où les deux suites sont croissantes :

Corollaire 15.
Soit $n \geqslant 1$ un entier et $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ des réels, et $c_1, c_2, \ldots, c_n$ une permutation des (b_i). On a l'inégalité suivante :

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \geqslant a_1c_1 + \cdots + a_nc_n.$$

Démonstration. Comme les suites $(-b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(-a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont décroissantes, par l'inégalité du réordonnement :,

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = (-a_1)(-b_1) + \cdots + (-a_n)(-b_n) \geqslant (-a_1)(-c_1) \cdots + (-a_n)(-c_n) = a_1c_1 + \cdots + a_nc_n.$$

□

Une autre version utile de l'inégalité du réordonnement est le cas où une suite est croissante et l'autre est décroissante :

Corollaire 16.
Soit $n \geqslant 1$ un entier et $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ des réels, et $c_1, c_2, \ldots, c_n$ une permutation des (b_i). On a l'inégalité suivante :

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leqslant a_1c_1 + \cdots + a_nc_n.$$

Le résultat est toujours valable si la suite $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est décroissante $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est croissante.

Démonstration. Comme les suites $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(-a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont croissantes, par l'inégalité du réordonnement :

$$a_1b_1 + \ldots a_nb_n = -(-a_1)(b_1) + \cdots + (-a_n)(b_n) \leqslant -(-a_1)(c_1) \cdots + (-a_n)(c_n) = a_1c_1 + \cdots + a_nc_n.$$

Pour le cas où la suite $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est décroissante $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est croissante, la même preuve est encore valable car les deux suites $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(-a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont décroissantes □

Remarque 17.
A priori, lorsqu'on doit résoudre une inégalité, il est rarement précisé que les variables sont ordonnées de façon croissante. Mais si l'inégalité est symétrique (c'est-à-dire si en échangeant deux variables on ne change pas l'inégalité), on peut ordonner les variables de façon croissante.

Exercice 15 Soit a, b, c des réels. Montrer à l'aide de l'inégalité du réordonnement que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$.

Exercice 16 Inégalité de Tchebychev. Montrer que si $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ et $b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_n$, alors $a_1b_1 + \ldots a_nb_n \geqslant \frac{(a_1+\cdots+a_n)}{n}(b_1 + \cdots + b_n)$.

Remarque 18.
L'inégalité de Tchebychev est très utile, elle est vraiment importante à connaître.

Exercice 17 Montrer que si (a_k) est une suite d'entiers strictement positifs deux à deux distincts, alors

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geqslant n$$

Exercice 18 Inégalité de Nesbitt. Montrer que si a, b, c sont des réels strictement positifs, $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$.

5 Résoudre et rédiger un problème d'inégalité

Tout d'abord, quelques conseils pour la résolution :

1. Il est souvent utile de chercher dès le début les cas d'égalité. En effet, si on trouve le cas d'égalité, on sait quelles inégalités on peut utiliser ou non pour conserver l'égalité. Imaginons, par exemple, que l'on souhaite lontrer que, si $abc = 1$ et $b \geqslant 1$, alors $a + 2b + c \geqslant 4$. On peut voir que $a = b = c = 1$ est un cas d'égalité. Si on décide de faire une inégalité arithmético-géométrique avec pour termes $a, 2b, c$ comme dans le cas $a = b = c = 1$, $a = 1$ et $2b = 2$, on ne va pas avoir égalité dans l'inégalité. Or, on sait que pour $a = b = c = 1$ on a égalité : il est donc vain de poursuivre dans cette direction. De plus, signaler les cas d'égalités rapporte toujours des points.
2. Souvent, les cas d'égalité sont quand toutes les variables sont égales, et on peut trouver leur valeur via la contrainte donnée dans l'énoncé (ceci est souvent vrai, mais pas toujours, donc à prendre avec des pincettes).
3. Attention aux nombres négatifs et signe moins, qui sont régulièrement embêtants pour prouver des inégalités. Il est souvent plus facile de montrer qu'un terme positif est plus grand qu'un autre terme positif.
4. Parfois, il n'est pas évident de savoir comment utiliser la contrainte, et partir de la contrainte peut être un bon réflexe : faire un changement de variable en conséquence peut être intelligent. Un changement de variable consite à remplacer les variables du problème par d'autres variables. Par exemple, pour montrer l'inégalité $a^6 + b^6 \geqslant 2a^3b^3$, on peut faire le changement de variable $u = a^3$, $v = b^3$, et l'inégalité à montrer devient $u^2 + v^2 \geqslant 2uv$ qui est plus simple : c'est le résultat de la proposition 2.
5. Il faut faire attention au degré (le degré d'un terme est la puissance sur le x si on remplace chacune des inconnues par x). Parfois, si tous les termes (éventuellement tous les termes au numérateur) ont le même degré sauf quelques uns (qui sont en minorité), on peut envisager d'utiliser la contrainte pour obtenir un degré constant partout. Par exemple, si on sait que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et qu'on veut montrer que $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geqslant 2(ab + bc + ac)$, on peut remplacer 1 dans le terme de gauche (de degré 0) par $a^2 + b^2 + c^2$: c'est le seul terme de degré 0 alors que les autres sont de degré 2. Ensuite, utiliser le lemme du tourniquet permet de conclure.
6. Dans les mauvais élèves, faire très attention à ne pas utiliser une version fausse de l'inégalité (c'est une erreur très habituelle) !
7. Une fois l'inégalité prouvée, pour chercher les cas d'égalité, c'est rarement utile de regarder toutes les inégalités utilisées et les cas d'égalité. La première chose à faire est de chercher le cas d'égalité de l'inégalité dont les cas sont les plus simples (souvent l'inégalité arithmético-géométrique) et d'utiliser une contrainte si elle est donnée ; les cas d'égalité d'autres inégalités (surtout Cauchy-Schwarz, réordonnement) sont généralement plus compliqués. Si on arrive à trouver ce que chaque variable vaut dans le cas d'égalité, il faut s'arrêter là ; sinon, si les résultats donnés ne mènent pas au cas d'égalité, il faut regarder les autres inégalités utilisées.
8. Vérifier qu'on a bien l'égalité dans les cas trouvés précédemment.

Quelques conseils pour la rédaction :

1. Mentionnez les inégalités que vous utilisez. Si ce n'est pas clair (et très souvent ce n'est pas clair), mentionnez ce à quoi vous appliquez l'inégalité (par exemple si vous dites que vous appliquez l'inégalité arithmético-géométrique à $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, on ne peut pas savoir si vous l'appliquez avec tous les termes, si vous l'appliquez une fois avec a^2 et b^2, une avec c^2 et d^2, si vous l'appliquez juste une fois avec deux termes...).
2. Pour le cas d'égalité, indiquez sur quelle inégalité vous vous fondez pour trouver le cas d'inégalité (n'hésitez pas à mettre un symbole au moment où vous utilisez une inégalité par exemple (*) pour y faire référence ensuite).
3. Une fois que vous avez trouvé les cas d'égalité, vérifiez que vous avez bien égalité et que vous avez bien la contrainte parfois demandée.

6 Solutions des exercices

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Posons $c = x$, $d = \frac{1}{x}$ et appliquons la proposition 4. On obtient $c + d = x + \frac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{cd} = 2\sqrt{\frac{x}{x}} = 2$. On a égalité si et seulement si $c = d$ c'est-à-dire $x = \frac{1}{x}$ si et seulement si $x^2 = 1$. Le cas d'égalité est donc atteint pour $x = 1$.

Solution de l'exercice 2 Regardons le terme de droite. En voyant un facteur $2x$, on pense à utiliser que $2x \leqslant x^2+1$. Il suffit ensuite de prouver que $4xy \leqslant 4x^2+y^2$. Or, on remarque que $4x^2+y^2 = (2x)^2+y^2 \geqslant 2\times(2x)\times y = 4xy$.

Supposons qu'on a égalité. Dans ce cas on a égalité dans les deux inégalités précédentes. Comme on a égalité dans $2x \leqslant x^2+1$, $x=1$. Comme on a égalité dans $2\times(2x)y \leqslant (2x)^2+y^2$, on sait que $y = 2x = 2$. Réciproquement, si $(x,y) = (1,2)$, alors $5x^2+y^2+1 = 10 = 4xy+2x$.

Solution de l'exercice 3 Regardons le terme de droite : on cherche à majorer des produits de deux nombres par une somme de carrés. On utilise donc le fait que $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$, $bc \leqslant \frac{b^2+c^2}{2}$ et $ac \leqslant \frac{a^2+c^2}{2}$. En sommant ces trois inégalités, on obtient $ab+bc+ac \leqslant a^2+b^2+c^2$.

Supposons qu'on a égalité. Dans ce cas on a égalité dans les trois inégalités utilisées, donc par la proposition 2, $a=b$, $b=c$ et $a=c$. En particulier $a=b=c$. Réciproquement, si $a=b=c$, alors $a^2+b^2+c^2 = 3a^2 = ab+bc+ca$: on a bien égalité.

Solution de l'exercice 4 Posons $a=x$, $b=y^2$, $c=z^3$. L'inégalité précédente est équivalente à $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$, qui est vraie d'après l'exercice 3. Le cas d'égalité est lorsque $a=b=c$, c'est-à-dire $x=y^2=z^3$.

Solution de l'exercice 5 Vu qu'il y a une racine dans le résultat, on calcule $(a+b+c)^2$. On constate alors que $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) = a^2+b^2+c^2+2$. Or, $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca = 1$, donc $(a+b+c)^2 \geqslant 3$, de sorte que $(a+b+c) \geqslant \sqrt{3}$.

Supposons maintenant qu'on a égalité. Alors on a égalité dans le lemme du tourniquet, donc $a=b=c$. Comme $ab+bc+ca=1$, c'est que $3a^2=1$, donc $a = \frac{1}{\sqrt{3}} = b = c$. Réciproquement, si $a = \frac{1}{\sqrt{3}} = b = c$, on a bien $a+b+c = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Solution de l'exercice 6 On a une somme de 10 termes et on veut prouver qu'elle est plus grande que 10. On va donc utiliser l'inégalité arithmético-géométrique sur les 10 termes. On obtient :

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd+bc+ad+ac+bd \geqslant 10\sqrt[10]{a^5b^5c^5d^5} = 10\sqrt[10]{(abcd)^5} = 10$$

Si on a égalité, alors $a^2=b^2=c^2=d^2$, donc par positivité $a=b=c=d$. Comme $abcd=1$, $a^4=1$ donc $a=b=c=d=1$. Réciproquement si $a=b=c=d=1$, alors $abcd=1$ et $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd+bc+ad+ac+bd=10$

Solution de l'exercice 7 On utilise l'inégalité arithmético-géométrique sur $a+1$, $b+1$, $c+1$: on constate alors que $2 = \sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)} \leqslant \frac{a+1+b+1+c+1}{3} = \frac{a+b+c}{3}+1$, donc $\frac{a+b+c}{3} \geqslant 1$, donc $a+b+c \geqslant 3$.

Supposons qu'on a égalité. Dans ce cas on a égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique. Ainsi, $a+1 = b+1 = c+1$, donc $a=b=c$. Comme $(a+1)(b+1)(c+1) = (a+1)^3 = 8$, on a $a+1=2$, donc $a=b=c1$. Réciproquement, si $a=b=c=1$, alors $(a+1)(b+1)(c+1)=8$ et $a+b+c=3$.

Solution de l'exercice 8 On utilise la proposition 4 : pour tout i entre 1 et n, $1+a_i \geqslant 2\sqrt{a_i}$. En particulier, $(1+a_1)\dots(1+a_n) \geqslant 2\sqrt{a_1}\times 2\sqrt{a_2}\dots 2\sqrt{a_n} = 2^n\sqrt{a_1\dots a_n} = 2^n$.

Supposons qu'on a égalité, dans ce cas pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a égalité dans l'inégalité $1+a_i \geqslant 2\sqrt{a_i}$, donc $a_i = 1$. Réciproquement, si $a_1 = \dots = a_n = 1$, alors $a_1\dots a_n = 1$ et $(1+a_1)\dots(1+a_n) = 2\times\dots\times 2 = 2^n$

Solution de l'exercice 9 On utilise la proposition 4 : pour tout i entre 1 et n, on a $1+\frac{1}{a_i} \geqslant 2\frac{1}{\sqrt{a_i}}$. En particulier, $(1+\frac{1}{a_1})\dots(1+\frac{1}{a_n}) \geqslant 2\frac{1}{\sqrt{a_1}}\times 2\frac{1}{\sqrt{a_2}}\dots 2\frac{1}{\sqrt{a_n}} = 2^n\frac{1}{\sqrt{a_1\dots a_n}}$. Or, $a_1\dots a_n \leqslant \left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right)^n = 1^n = 1$, donc $(1+\frac{1}{a_1})\dots(1+\frac{1}{a_n}) \geqslant 2^n\frac{1}{\sqrt{a_1\dots a_n}} \geqslant 2^n$.

Supposons qu'on a égalité. Alors on a égalité dans l'inégalité $1+\frac{1}{a_i} \geqslant 2\frac{1}{\sqrt{a_i}}$ pour tout i, donc $\frac{1}{a_i} = 1$ donc $a_i = 1$ pour tout i. Réciproquement si $a_1 = \dots = a_n = 1$, $(1+\frac{1}{a_1})\dots(1+\frac{1}{a_n}) = (1+1)\times(1+1) = 2^n$ on a bien égalité.

Solution de l'exercice 10 On utilise que $1-a = b+c+d$, $1-b = a+c+d$ et similairement pour $1-c$ et $1-d$. $\frac{bcd}{(1-a)^2}+\frac{acd}{(1-b)^2}+\frac{abd}{(1-c)^2}+\frac{abc}{(1-d)^2} = \frac{bcd}{(b+c+d)^2}+\frac{acd}{(a+c+d)^2}+\frac{abd}{(a+b+d)^2}+\frac{abc}{(a+b+c)^2}$

Or, par l'inégalité arithmético-géométrique, $\frac{bcd}{(b+c+d)^2} \leqslant \frac{\left(\frac{b+c+d}{3}\right)^3}{(b+c+d)^2} = \frac{b+c+d}{27}$. On utilise la même majoration pour les 3 autres termes de la somme, on obtient :

$$\frac{bcd}{(1-a)^2}+\frac{acd}{(1-b)^2}+\frac{abd}{(1-c)^2}+\frac{abc}{(1-d)^2} \leqslant \frac{b+c+d}{27}+\frac{a+c+d}{27}+\frac{a+b+d}{27}+\frac{a+b+c}{27} = \frac{3(a+b+c+d)}{27} = \frac{1}{9}.$$

Supposons qu'on a égalité. En particulier, on a égalité dans les différentes inégalités arithmético-géométriques utilisées. Pour avoir égalité dans la première, on doit avoir $b = c = d$; pour la seconde, on doit avoir $a = c = d$, de sorte que $a = b = c = d$. Comme $a + b + c + d = 1$, on a nécessairement $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. Réciproquement, si $a = b = c = d = \frac{1}{4}$, $a + b + c + d = 1$ et $\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} = 4 \times \frac{a^3}{(1-a)^2} = 4 \times \frac{4^2}{4^3 \times 3^2} = \frac{1}{9}$.

Solution de l'exercice 11 On est tenté d'utiliser directement une inégalité arithmético-géométrique sur les 6 termes. Mais si on regarde attentivement, on peut voir qu'on a l'égalité pour $a = b = c = \frac{1}{2}$, et que dans ce cas $a^2 = \frac{1}{4}$ et $a^2b^2 = \frac{1}{16}$. On ne pourra pas avoir égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique, et on ne peut donc utiliser directement l'inégalité arithmético-géométrique. Par contre, on a bien $a^2 = b^2 = c^2$ et $a^2b^2 = a^2c^2 = b^2c^2$. On a va donc faire séparément une inégalité arithmético-géométrique sur les deux triplets de termes. Par l'inégalité arithmético-géométrique, $a^2+b^2+c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3(\sqrt[3]{abc})^2 = 3(\sqrt[3]{\frac{1}{8}})^2 = 3\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$. Par l'inégalité arithmético-géométrique, $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} = 3(\sqrt[3]{abc})^4 = 3(\sqrt[3]{\frac{1}{8}})^4 = 3\frac{1}{2^4} = \frac{3}{16}$. Ainsi, $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2 \geqslant \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$.

Supposons maintenant qu'on a égalité. Dans ce cas, comme on a égalité dans $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, on a $a^2 = b^2 = c^2$ donc $a = b = c$. Comme $a^3 = abc = \frac{1}{8}$, $a = b = c = \frac{1}{2}$. Réciproquement, si $a = b = c = \frac{1}{2}$, alors $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2 = 3(a^2 + a^4) = 3(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}) = 3\frac{5}{16} = \frac{15}{16}$.

Solution de l'exercice 12 On applique l'inégalité des mauvais élèves pour $e_i = 1$ et $f_i = a_i$. On obtient $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{(1+\cdots+1)^2}{a_1+\cdots+a_n} = \frac{n^2}{a_1+\cdots+a_n}$.

On a égalité si et seulement s'il existe un réel λ tel que $1 = \lambda a_i$ pour tout i, c'est-à-dire $a_i = \frac{1}{\lambda}$, donc si et seulement si les a_i sont tous égaux.

Solution de l'exercice 13 On applique l'inégalité des mauvais élèves pour $e_i = a_i$ et $f_i = 1$, on obtient $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{1+\ldots 1} = \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{n}$.

On a égalité si et seulement s'il exsite λ réel tel que pour tout i, $a_i = \lambda$ i.e. tous les a_i sont égaux.

Solution de l'exercice 14 On utilise l'inégalité des mauvais élèves (ou l'exercice 12) avec $n = 3$ les e_i valant tous 1 et $f_1 = 1 + ab$, $f_2 = 1 + ac$, $f_3 = 1 + bc$. On obtient $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geqslant \frac{(1+1+1)^2}{1+ab+1+bc+1+ac} = \frac{9}{3+ab+bc+ca}$. Or, par le lemme du tourniquet, on a $ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2 = 3$, donc $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geqslant \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

Supposons maintenant qu'on a égalité. Alors on a égalité dans le lemme du tourniquet, donc $a = b = c$. Comme $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, on obtient $3a^2 = 3$ donc $a = b = c = 1$. Réciproquement si $a = b = c = 1$, $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} = 3\frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$.

Solution de l'exercice 15 Échanger deux variables ne change pas l'inégalité. On peut donc supposer $a \geqslant b \geqslant c$. Comme $a^2 + b^2 + c^2 = a \times a + b \times b + c \times c$, on applique l'inégalité du réordonnement avec $a_1 = b_1 = a$, $a_2 = b_2 = b$, $a_3 = b_3 = c$ et $c_1 = b$, $c_2 = c$, $c_3 = a$ qui est une permutation de (b_i) car $(b_1, b_2, b_3) = (c_3, c_1, c_2)$. On obtient ainsi $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a \times b + b \times c + c \times a$.

Solution de l'exercice 16 Soit $2 \leqslant i \leqslant n$: par l'inégalité du réordonnement, $a_1b_1 + \ldots a_nb_n \geqslant a_1b_i + \cdots + a_{n-i+1}b_n + a_{n-i+2}b_1 + \cdots + a_nb_{i-1}$ ce qui fait $(n-1)$ inégalités. Sommons ces inégalités et rajoutons l'inégalité évidente $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \geqslant a_1b_1 + \ldots a_nb_n$. On obtient :

$$n(a_1b_1+\cdots+a_nb_n) \geqslant a_1(b_1+\ldots b_n)+a_2(b_1+\cdots+b_n)+\cdots+a_n(b_1+\cdots+b_n) = (a_1+\cdots+a_n)(b_1+\cdots+b_n).$$

En divisant l'inégalité par n on obtient $a_1b_1 + \ldots a_nb_n \geqslant \frac{(a_1+\cdots+a_n)}{n}(b_1 + \cdots + b_n)$.

Solution de l'exercice 17 Notons $b_1, \ldots, b_n$ la permutation de $a_1, \ldots, a_n$ tels que $b_1 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ (en fait ce sont les a_i rangés dans l'ordre croissant). Notons que $b_1 \geqslant 1$, comme $b_2 \neq b_1$ et $b_2 \geqslant b_1$, $b_2 > b_1 \geqslant 1$ donc $b_2 \geqslant 2$. En itérant on montre facilement que $b_k \geqslant k$. Comme $b_1 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ et $\frac{1}{1} \geqslant \frac{1}{2} \geqslant \cdots \geqslant \frac{1}{n}$ et les (a_k) sont une permutation des (b_k), par l'inégalité du réordonnement, $a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geqslant \frac{b_1}{1} + \cdots + \frac{b_n}{n} \geqslant \frac{1}{1} + \cdots + \frac{n}{n} = n$

Solution de l'exercice 18 Échanger deux variables ne change pas l'inégalité. Elle est donc symétrique, et on peut supposer $a \geqslant b \geqslant c$. Comme $b + c \leqslant a + c$, on a $\frac{1}{b+c} \geqslant \frac{1}{a+c}$. De même, comme $a + c \leqslant a + b$, on a $\frac{1}{a+c} \geqslant \frac{1}{a+b}$. Ainsi, $\frac{1}{b+c} \geqslant \frac{1}{a+c} \geqslant \frac{1}{a+b}$ et $a \geqslant b \geqslant c$. On en déduit par inégalité du réordonnement que $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b}$ et que $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b}$. En sommant ces deux inégalités, $2 \times (\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}) \geqslant \frac{b+c}{b+c} + \frac{a+c}{a+c} + \frac{a+b}{a+b} = 3$. Ainsi, $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$