PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 15 NOVEMBRE 2019

Consignes

- Le groupe Junior est constitué des élèves nés en 2005 ou après, et cherche les exercices Juniors.
- Le groupe Senior est constitué des élèves nés en 2004 ou avant, et cherche les exercices Seniors.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- **Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.**
- Respecter la numérotation des exercices.
- Pour chaque exercice de géométrie : faire au moins une figure sur une feuille blanche séparée.
  - Cette figure devra être **propre**, **grande**, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
  - Le respect de la consigne rapportera automatiquement un point. **Si elle n'est pas respectée, l'exercice ne sera pas corrigé.**
- **Bien préciser, sur chaque copie, votre nom en majuscules et votre prénom en minuscules.**

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

contact-pofm@animath.fr

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit $ABCD$ un quadrilatère et M, N, P, Q les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.
Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.

Exercice 2. Soit ABC un triangle rectangle en B. Soit M le point d'intersection de la médiane issue de B avec la droite (AC), et (d) la perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point M. Soit U le milieu du segment $[AB]$, V le milieu du segment $[AM]$, I le point d'intersection de la droite (UV) avec la droite (d), et J le point d'instersection de la droite (UV) avec la droite (BC).
Montrer que $AC = IJ$.

Exercice 3. Soient d_1, d_2, d_3 des droites concourantes et A, A' des points sur la droite d_1, B, B' des points sur la droite d_2, C, C' des points sur la droite d_3 tels que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles et les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.
Montrer que les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.

Exercice 4. Soit ABC un triangle isocèle et obtus en A. Soit Γ le cercle de centre B passant par A, et Ω le cercle de centre C passant par A. Soit D le point d'intersection du cercle Γ avec le segment $[BC]$, E le deuxième point d'intersection de la droite (AD) avec le cercle Ω, et F le point d'intersection de la droite (BC) avec le cercle Ω qui n'est pas sur le segment $[BC]$.
Montrer que le triangle DFE est isocèle en F.

Exercice 5. Soit Γ un cercle, P un point à l'extérieur du cercle. Les tangentes au cercle Γ pssant par le point P sont tangentes au cercle Γ en A et B. Soit M est le milieu du segment $[BP]$ et C le point d'intersection de la droite (AM) et du cercle Γ. Soit D la deuxième intersection de la droite (PC) et du cercle Γ.
Montrer que les droites (AD) et (BP) sont parallèles.

Exercice 6. Soit A, B, C et D quatre points sur un cercle dans cet ordre. Soit U le point d'intersection des droites (AB) et (CD), et V le point d'intersection des droites (BC) et (DA). Soit K le point d'intersection de la bissectrice issue de U dans le triangle AUC et de la bissectrice issue de V dans le triangle AVC. Soit L le point d'intersection de la médiatrice du segment $[KU]$ et de la médiatrice du segment $[KV]$.
Montrer que les points U, V et L sont alignés.

Exercice 7. Deux cercles de centres respectifs B et C et de rayons différents sont tangents extérieurement en un point A. Soit t une tangente commune aux deux cercles ne contenant pas le point A. La perpendiculaire à la droite t passant par le point A coupe la médiatrice du segment $[BC]$ en un point F.
Montrer que $BC = 2AF$.

Exercice 8. Soit ABC un triangle acutangle non isocèle en A. Soit M le milieu du segment $[BC]$, H l'orthocentre du triangle ABC, O_1 le milieu du segment $[AH]$ et O_2 le centre du cercle circonscrit au triangle CBH. Montrer que le quadrilatère O_1AMO_2 est un parallélogramme.

Exercice 9. Soit ABC un triangle, Γ sont cercle circonscrit et ω le cercle de même centre que Γ et tangent à la droite (BC). Les tangentes au cercle ω passant par A coupent (BC) en un point X du côté de B et en un point Y du côté de C. La tangente au cercle Γ en B et la parallèle à la droite (AC) passant par X se coupent en un point S et la tangente au cercle Γ en C et la parallèle à la droite (AB) passant par Y se coupent en un point T.
Montrer que la droite (ST) est tangente au cercle Γ.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soient d_1, d_2, d_3 des droites concourantes et A, A' des points sur la droite d_1, B, B' des points sur la droite d_2, C, C' des points sur la droite d_3 tels que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles et les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.
Montrer que les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.

Exercice 11. Soit ABC un triangle isocèle et obtus en A. Soit Γ le cercle de centre B passant par A, et Ω le cercle de centre C passant par A. Soit D le point d'intersection de Γ avec le segment $[BC]$, E le deuxième point d'intersection de la droite (AD) avec le cercle Ω, et F le point d'intersection de la droite (BC) avec le cercle Ω qui n'est pas sur le segment $[BC]$.
Montrer que le triangle DFE est isocèle en F.

Exercice 12. Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit et Ω un autre cercle passant par les points A et B. La droite (AC) coupe le cercle Ω en un point D et la tangente à cercle Γ en B coupe Ω en un point E.
Montrer que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Exercice 13. Soit A, B, C et D quatre points sur un cercle dans cet ordre. Soit U le point d'intersection des droites (AB) et (CD), et V le point d'intersection des droites (BC) et (DA). Soit K le point d'intersection de la bissectrice issue de U dans le triangle AUC et de la bissectrice issue de V dans le triangle AVC. Soit L le point d'intersection de la médiatrice du segment $[KU]$ et de la médiatrice du segment $[KV]$. Montrer que les points U, V et L sont alignés.

Exercice 14. Soit $BCDE$ un carré et soit O son centre. Soit A un point situé à l'extérieur du carré $BCDE$ tel que le triangle ABC est rectangle en A. Montrer que le point O appartiant à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 15. Soit Ω et Γ deux cercles sécants. On note A une de leurs intersections. Soit d une droite quelconque passant par le point A. On note P et Q les intersections respectives de la droite d avec les cercles Ω et Γ différentes de A.
Montrer qu'il existe un point indépendant de la droite d choisie et qui appartient toujours à la médiatrie du segment $[PQ]$.

Exercice 16. Soit ABC un triangle, H son orthocentre et M le milieu du segment $[BC]$. Soit d une droite passant par le point M. On suppose que d coupe le cercle de diamètre $[AH]$ en P et Q.
Montrer que l'orthocentre du triangle APQ est sur le cercle circonscrit du triangle ABC.

Exercice 17. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. La perpendiculaire à la droite (AI) passant par le point I coupe la droite (AB) en un point D et la droite (AC) en un point E. On suppose qu'il existe deux points F et G sur le segment $[BC]$ tels que $BA = BF$ et $CA = CG$. Soit T le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ADF et AEG.
Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle AIT se trouve sur la droite (BC).

Exercice 18. Soit ABC un triangle, soit O le centre de son cercle circonscrit. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC et D le point de tangence de ce cercle avec le segment $[AC]$. Les droites (OI) et (AB) se coupent en un point P. Soit M le milieu de l'arc AC ne contenant pas B et N le milieu de l'arc BC contenant A.
Montrer que les droites (MD) et (NP) se coupent sur le cercle circonscrit à ABC.