COUPE ANIMATH D'AUTOMNE

Mercredi 2 octobre 2019

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
  Chaque exercice est noté sur 7 points.
- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- **À part dans les exercices 1, 2 et 9,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Pour les exercices 1, 2 et 9, seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. Trouver le nombre d'entiers impairs compris entre 1 et 2019 inclus.
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 2. Monsieur Deschamps possède des poules et des vaches ; les poules ayant toutes deux pattes, et les vaches quatre. En prévision de l'hiver, il doit leur confectionner des pantoufles. Il possède 160 animaux en tout, et il a dû confectionner 400 pantoufles. Combien possède-t-il de vaches ?
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 3. Soit ABC un triangle isocèle tel que $\widehat{ABC} = 60°$; on ne sait pas en quel sommet ABC est isocèle. Trouver toutes les valeurs possibles de $\widehat{ACB}$.

Exercice 4. Soit $ABCD$ un rectangle d'aire 4. Soit I le milieu de $[AD]$ et soit J le milieu de $[BC]$. Soit X le point d'intersection de (AJ) et de (BI), et soit Y le point d'intersection de (DJ) et de (CI). Quelle est l'aire du quadrilatère $IXJY$?

Exercice 5. Combien existe-t-il de nombres compris entre 100 et 999 (inclus) dont les chiffres forment une progression arithmétique si on les lit de gauche à droite ?
On dit qu'une suite de trois nombres a, b, c forme une progression arithmétique si $a + c = 2b$.
Une réponse numérique correcte sans justification rapportera 4 points. Pour obtenir la totalité des points, un raisonnement détaillé est attendu.

Exercice 6. Martin joue à un jeu. Son but est de placer des jetons sur un échiquier 8 par 8 de telle sorte qu'il y ait au plus un jeton par case, et que chaque colonne et chaque ligne contienne au plus 4 jetons.

a) Combien Martin peut-il poser, au plus, de jetons ?
b) Si, en plus des contraintes précédentes, chacune des deux grandes diagonales peut contenir au plus 4 jetons, combien Martin peut-il poser, au plus, de jetons ?

Les grandes diagonales d'un échiquier sont les deux diagonales allant d'un coin de l'échiquier au coin opposé.

Exercice 7. Est-il vrai que, si a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1 et d_2 sont des nombres entiers strictement positifs tels que

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} \quad \text{et} \quad \frac{c_1}{d_1} < \frac{c_2}{d_2},$$

on a toujours

$$\frac{a_1 + c_1}{b_1 + d_1} < \frac{a_2 + c_2}{b_2 + d_2} \ ?$$

Exercice 8. Existe-t-il un entier dont l'écriture décimale contienne exactement 300 chiffres « 1 », aucun autre chiffre différent de « 0 », et qui soit un carré parfait ?
On dit qu'un entier n est un carré parfait s'il existe un entier k tel que $n = k^2$. Par exemple, $9 = 3 \times 3$ est un carré parfait tandis que 2 ne l'est pas.

Exercices lycéens

Exercice 9. Monsieur Deschamps possède des poules et des vaches ; les poules ayant toutes deux pattes, et les vaches quatre. En prévision de l'hiver, il doit leur confectionner des pantoufles. Il possède 160 animaux en tout, et il a dû confectionner 400 pantoufles. Combien possède-t-il de vaches ?
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 10. J'ai des chaussettes de deux couleurs différentes : 6 chaussettes bleues et 6 chaussettes rouges. Je prends plusieurs chaussettes au hasard. Combien dois-je en prendre, au minimum, pour être sûr d'avoir deux chaussettes de couleurs différentes ?

Exercice 11. Soit $ABCD$ un rectangle d'aire 4. Soit I le milieu de $[AD]$ et soit J le milieu de $[BC]$. Soit X le point d'intersection de (AJ) et de (BI), et soit Y le point d'intersection de (DJ) et de (CI). Quelle est l'aire du quadrilatère $IXJY$?

Exercice 12. Martin joue à un jeu. Son but est de placer des jetons sur un échiquier 8 par 8 de telle sorte qu'il y ait au plus un jeton par case, et que chaque colonne et chaque ligne contienne au plus 4 jetons.

a) Combien Martin peut-il poser, au plus, de jetons ?

b) Si, en plus des contraintes précédentes, chacune des deux grandes diagonales peut contenir au plus 4 jetons, combien Martin peut-il poser, au plus, de jetons ?

Les grandes diagonales d'un échiquier sont les deux diagonales allant d'un coin de l'échiquier au coin opposé.

Exercice 13. Existe-t-il un entier dont l'écriture décimale contienne exactement 300 chiffres « 1 », aucun autre chiffre différent de « 0 », et qui soit un carré parfait ?
On dit qu'un entier n est un carré parfait s'il existe un entier k tel que $n = k^2$. Par exemple, $9 = 3 \times 3$ est un carré parfait tandis que 2 ne l'est pas.

Exercice 14. Paul joue à un jeu avec N billes et un sac, les billes formant un tas. Au premier tour, Paul retire une bille du tas pour la mettre dans son sac et sépare le tas restant en deux tas non vides. Plus généralement, à chaque tour, Paul choisit un tas d'au moins 4 billes, en prend une qu'il met dans son sac, et sépare le tas restant en deux tas non vides, le jeu s'arrêtant quand plus aucun tour n'est possible. Paul gagne s'il arrive à une situation où tous les tas sont constitués de 3 billes, et perd sinon.

a) Montrer que si $N = 2019$, Paul peut gagner.

b) Montrer que si $N = 2020$, Paul ne peut pas gagner.

Exercice 15. Soit ABC un triangle. Soit E le pied de la hauteur de ABC issue de B, et F le pied de la hauteur de ABC issue de C. On note également H le point d'intersection des droites (BE) et (FC), et O le centre du cercle circonscrit à ABC. Démontrer que, si $AF = FC$, alors le quadrilatère $EHFO$ est un parallélogramme.

Exercice 16. On place 2020 points sur un cercle, numérotés au hasard de 1 à 2020 ; tous les numéros sont différents. Pour une corde reliant un sommet de numéro a à un sommet de numéro b, avec $a > b$, on associe à la corde la valeur $a - b$. Montrer qu'il est possible de relier les sommets par 1010 cordes telles que

- les cordes ne se coupent pas,
- de chaque sommet part exactement une corde,
- la somme des valeurs des cordes est égale à 1010^2.

Exercice 17. Existe-t-il une suite d'entiers strictement positifs $a_0, a_1, \ldots$ tels que

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_n + a_{n+1}}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$?