COUPE ANIMATH D'AUTOMNE

Mercredi 2 octobre 2019

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
  Chaque exercice est noté sur 7 points.
- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ **À part dans les exercices 1, 2 et 9,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Pour les exercices 1, 2 et 9, seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. Trouver le nombre d'entiers impairs compris entre 1 et 2019 inclus.
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 1 Les entiers recherchés sont les entiers impairs compris entre 1 et 2020 inclus. Or, parmi les 2020 entiers compris entre 1 et 2020, la moitié sont pairs, et l'autre moitié sont impairs. Cela fait donc 1010 entiers impairs, et la réponse attendue est 1010.

Commentaire des correcteurs Exercice bien réussi.

Exercice 2. Monsieur Deschamps possède des poules et des vaches ; les poules ayant toutes deux pattes, et les vaches quatre. En prévision de l'hiver, il doit leur confectionner des pantoufles. Il possède 160 animaux en tout, et il a dû confectionner 400 pantoufles. Combien possède-t-il de vaches ?
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 2 Soit p le nombre de poules de monsieur Deschamps, et v le nombre de vaches de monsieur Deschamps. On sait que $p + v = 160$ et que $2p + 4v = 400$. On en déduit que

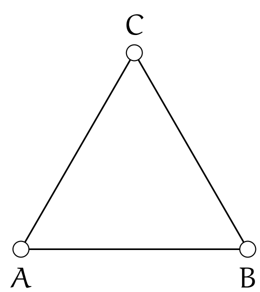
$$v = \frac{(2p + 4v) - 2(p + v)}{2} = \frac{400 - 2 \times 160}{2} = \frac{80}{2} = 40,$$

ce qui signifie que monsieur Deschamps possède 40 vaches.

Commentaire des correcteurs Exercice très bien réussi dans l'ensemble. Attention cependant à bien lire le sujet et à être rigoureux : la majorité des erreurs provient de la mauvaise considération du nombre d'animaux ou d'une erreur de calcul.

Exercice 3. Soit ABC un triangle isocèle tel que $\widehat{ABC} = 60°$; on ne sait pas en quel sommet ABC est isocèle. Trouver toutes les valeurs possibles de $\widehat{ACB}$.

Solution de l'exercice 3 Nous allons démontrer que $\widehat{ACB}$ peut valoir $60°$, et aucune autre valeur.
Tout d'abord, si ABC est équilatéral, alors il est bien isocèle, et on a $\widehat{ABC} = 60°$, donc ABC répond aux hypothèses de l'énoncé, et on constate que $\widehat{ACB} = 60°$.



Réciproquement, on va montrer que ABC est équilatéral, c'est-à-dire que ses trois angles, dont $\widehat{ACB}$ lui-même, valent $60°$. En effet, soit x, y et z les trois angles de ABC. L'énoncé nous indique que deux des angles sont égaux, et que l'un des angles vaut $60°$. Sans perte de généralité, on suppose que $x = y$, et que $x = 60°$ ou $z = 60°$:

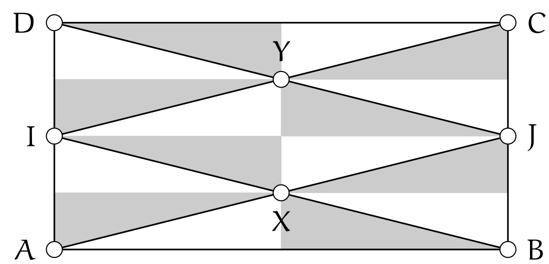
- ▷ si $x = 60°$, alors $y = 60°$ et $z = 180° - x - y = 60°$;
- ▷ si $z = 60°$, alors $2x = x + y = 180° - z = 120°$, donc $x = y = 60°$,

ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs Beaucoup de participants comprennent l'exercice mais oublient de traiter un des cas. Il faut aussi éviter les calculs dénués d'explications.

Exercice 4. Soit $ABCD$ un rectangle d'aire 4. Soit I le milieu de $[AD]$ et soit J le milieu de $[BC]$. Soit X le point d'intersection de (AJ) et de (BI), et soit Y le point d'intersection de (DJ) et de (CI). Quelle est l'aire du quadrilatère $IXJY$?

Solution de l'exercice 4 Découpons le rectangle $ABCD$ en triangles rectangles isométriques, comme ci-dessous. Tous les triangles ont la même aire, et le rectangle est formé de 16 triangles en tout : chaque triangles est donc d'aire $1/4$. Or, le quadrilatère $IXJY$ est formé de 4 rectangles. Son aire est donc égale à 1.



Commentaire des correcteurs Exercice plutôt bien réussi. Cependant, un nombre non négligeable de copies propose un raisonnement sans aucune figure à l'appui, ce qui gêne la correction et s'accompagne souvent de plusieurs confusions. Une figure explicite valait parfois mieux qu'un long discours.
D'autre part, un nombre étonnant d'élèves se place immédiatement dans le cas particulier où le rectangle est un carré ou a les dimensions 4×1, ce qui est dommage car la résolution de ce cas est la même que celle du cas général.

Exercice 5. Combien existe-t-il de nombres compris entre 100 et 999 (inclus) dont les chiffres forment une progression arithmétique si on les lit de gauche à droite ?
On dit qu'une suite de trois nombres a, b, c *forme une progression arithmétique si* $a + c = 2b$.
Une réponse numérique correcte sans justification rapportera 4 *points. Pour obtenir la totalité des points, un raisonnement détaillé est attendu.*

Solution de l'exercice 5 Soit n un nombre compris entre 100 et 999, et soit a, b, c ses trois chiffres, lus de gauche à droite. Si n est l'un des nombres recherchés, alors a et c sont des chiffres de même parité, et on a $b = (a+c)/2$. Ainsi, une fois la paire (a, c) déterminée, avec a et c de même parité, on peut lui associer un unique entier n parmi ceux recherchés.
Il s'agit donc de déterminer combien il existe de paires d'entiers (a, c) de même parité, tels que $1 \leqslant a \leqslant 9$ et $0 \leqslant c \leqslant 9$. Or, pour chaque valeur possible de a, il existe exactement 5 valeurs de c convenables. Il existe donc $9 \times 5 = 45$ paires (a, c) telles que recherchées, et la réponse attendue est donc égale à 45.

Commentaire des correcteurs Exercice bien réussi. Certains élèves étaient particulièrement efficaces dans leurs arguments, d'autres comptaient patiemment toutes les solutions. Le danger de la recherche à la main était les quelques oublis ou ajouts. Attention à ne pas aller trop vite dans les raisonnements et à vérifier que l'on peut prouver toutes les règles que l'on énonce !

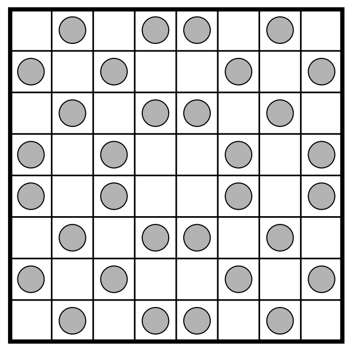
Exercice 6. Martin joue à un jeu. Son but est de placer des jetons sur un échiquier 8 par 8 de telle sorte qu'il y ait au plus un jeton par case, et que chaque colonne et chaque ligne contienne au plus 4 jetons.

a) Combien Martin peut-il poser, au plus, de jetons ?

b) Si, en plus des contraintes précédentes, chacune des deux grandes diagonales peut contenir au plus 4 jetons, combien Martin peut-il poser, au plus, de jetons ?

Les grandes diagonales d'un échiquier sont les deux diagonales allant d'un coin de l'échiquier au coin opposé.

Solution de l'exercice 6 Tout d'abord, chaque colonne contient au plus 4 jetons. Puisqu'il y a 8 colonnes, Martin ne peut donc pas poser plus de $4 \times 8 = 32$ jetons. Rétrospectivement, Martin peut bien poser 32 jetons en respectant toutes les contraintes de l'énoncé, aussi bien dans le cas a) que dans le cas b). Il lui suffit, par exemple, de procéder comme dans la grille ci-dessous, ce qui permet même à Martin de s'arranger pour qu'aucune des grandes diagonales ne contienne de jeton.



Commentaire des correcteurs Exercice bien compris. Chacune des questions contient deux parties : montrer qu'il y a au plus 32 jetons et ensuite donner une configuration dans laquelle on peut effectivement mettre 32 jetons en respectant les conditions. Plusieurs élèves se sont contentés de ne faire que l'une de ces deux étapes. Pour la configuration, un dessin d'échiquier clair valait mieux qu'une longue description sous la forme de paragraphes.

Exercice 7. Est-il vrai que, si a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1 et d_2 sont des nombres entiers strictement positifs tels que

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} \quad \text{et} \quad \frac{c_1}{d_1} < \frac{c_2}{d_2},$$

on a toujours

$$\frac{a_1 + c_1}{b_1 + d_1} < \frac{a_2 + c_2}{b_2 + d_2} \ ?$$

Solution de l'exercice 7 La réponse est **négative**. En effet, on peut par exemple choisir $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $a_2 = 4$, $b_2 = 2$, $c_1 = 8$, $d_1 = 2$, $c_2 = 5$ et $d_2 = 1$: dans ce cas-là, on a

$$\frac{a_1}{b_1} = 1 < 2 = \frac{a_2}{b_2}, \frac{c_1}{d_1} = 4 < 5 = \frac{c_2}{d_2} \text{ et } \frac{a_1 + c_1}{b_1 + d_1} = 3 = \frac{a_2 + c_2}{b_2 + d_2}.$$

Commentaire des correcteurs Beaucoup d'élèves ont pensé que l'affirmation était vraie, sans doute en confondant la somme des fractions avec la fraction des sommes des numérateurs et des dénominateurs. Pour se forger une intuition correcte du résultat, il était pertinent de regarder l'inégalité à discuter, de multiplier de part et d'autre par les dénominateurs et de développer les produits pour voir les conditions exigées sur les variables.

Exercice 8. Existe-t-il un entier dont l'écriture décimale contienne exactement 300 chiffres « 1 », aucun autre chiffre différent de « 0 », et qui soit un carré parfait ?
On dit qu'un entier n est un carré parfait s'il existe un entier k tel que $n = k^2$. Par exemple, $9 = 3 \times 3$ est un carré parfait tandis que 2 ne l'est pas.

Solution de l'exercice 8 La réponse est **négative**. En effet, soit n un tel entier, et supposons qu'il s'agisse d'un carré parfait. On peut donc l'écrire sous la forme $n = k^2$, où k est un entier. La somme des chiffres de n est égale à 300. Les critères de divisibilité par 3 et par 9 indiquent alors que n est divisible par 3, mais pas par 9.
Puisque $n = k^2$ n'est pas divisible par $9 = 3^2$, c'est donc que k n'est pas divisible par 3. Mais, puisque 3 est un nombre premier, cela veut dire que 3 ne divise pas $k^2 = n$, ce qui constitue une contradiction. Notre supposition était donc incorrecte, d'où la réponse annoncée.

Commentaire des correcteurs Plusieurs élèves étaient convaincus que la réponse était négative, mais très peu ont réussi à en fournir une preuve. Attention à justifier chacune de ses affirmations : c'est une bonne façon de vérifier qu'elles sont vraies !

Exercices lycéens

Exercice 9. Monsieur Deschamps possède des poules et des vaches ; les poules ayant toutes deux pattes, et les vaches quatre. En prévision de l'hiver, il doit leur confectionner des pantoufles. Il possède 160 animaux en tout, et il a dû confectionner 400 pantoufles. Combien possède-t-il de vaches ?
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 9 Soit p le nombre de poules de monsieur Deschamps, et v le nombre de vaches de monsieur Deschamps. On sait que $p + v = 160$ et que $2p + 4v = 400$. On en déduit que

$$v = \frac{(2p + 4v) - 2(p + v)}{2} = \frac{400 - 2 \times 160}{2} = \frac{80}{2} = 40,$$

ce qui signifie que monsieur Deschamps possède 40 vaches.

Commentaire des correcteurs Exercice très bien réussi dans l'ensemble. Attention cependant à bien lire le sujet et à être rigoureux : la majorité des erreurs provient de la mauvaise considération du nombre d'animaux ou d'une erreur de calcul.

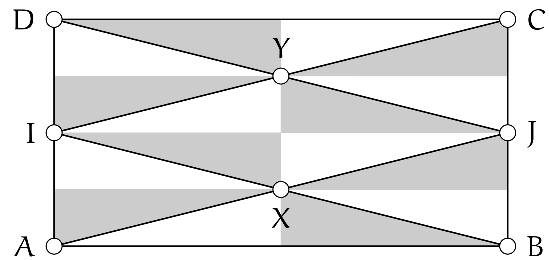
Exercice 10. J'ai des chaussettes de deux couleurs différentes : 6 chaussettes bleues et 6 chaussettes rouges. Je prends plusieurs chaussettes au hasard. Combien dois-je en prendre, au minimum, pour être sûr d'avoir deux chaussettes de couleurs différentes ?

Solution de l'exercice 10 Je dois prendre, au minimum, 7 chaussettes pour être sûr d'avoir deux chaussettes de couleurs différentes. En effet, si je prends 6 chaussettes ou moins, il est possible que ces chaussettes soient toutes bleues. Réciproquement, si je prends 7 chaussettes, elles ne pourront pas être toutes bleues (donc j'aurai pris au moins une chaussette rouge), et ne pourront pas non plus être toutes rouges (donc j'aurai pris au moins une chaussette bleue). Ainsi, j'aurai bien pris deux chaussettes de couleurs différentes.

Commentaire des correcteurs Le problème a été bien réussi. Il fallait faire attention à bien traiter deux sens : montrer que 6 chaussettes ou moins ne suffisent pas, et ensuite montrer que 7 chaussettes suffisent. Plusieurs élèves ont oublié de traiter l'une de ces deux parties. Beaucoup d'élèves ont utilisé à tort des probabilités alors que l'on ne s'intéressait pas à la probabilité d'un événement ; on désirait plutôt qu'il se produise toujours.

Exercice 11. Soit $ABCD$ un rectangle d'aire 4. Soit I le milieu de $[AD]$ et soit J le milieu de $[BC]$. Soit X le point d'intersection de (AJ) et de (BI), et soit Y le point d'intersection de (DJ) et de (CI). Quelle est l'aire du quadrilatère $IXJY$?

Solution de l'exercice 11 Découpons le rectangle $ABCD$ en triangles rectangles isométriques, comme ci-dessous. Tous les triangles ont la même aire, et le rectangle est formé de 16 triangles en tout : chaque triangles est donc d'aire $1/4$. Or, le quadrilatère $IXJY$ est formé de 4 rectangles. Son aire est donc égale à 1.



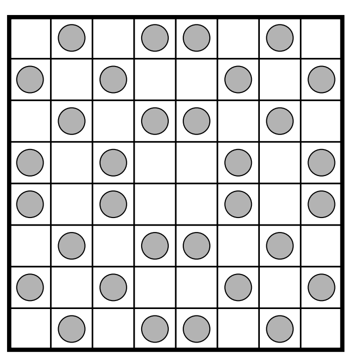
Commentaire des correcteurs Exercice plutôt bien réussi. Cependant, un nombre non négligeable de copies propose un raisonnement sans aucune figure à l'appui, ce qui gêne la correction et s'accompagne souvent de plusieurs confusions. Une figure explicite valait parfois mieux qu'un long discours.
D'autre part, un nombre étonnant d'élèves se place immédiatemment dans le cas particulier où le rectangle est un carré ou a les dimensions 4×1, ce qui est dommage car la résolution de ce cas est la même que celle du cas général.

Exercice 12. Martin joue à un jeu. Son but est de placer des jetons sur un échiquier 8 par 8 de telle sorte qu'il y ait au plus un jeton par case, et que chaque colonne et chaque ligne contienne au plus 4 jetons.

a) Combien Martin peut-il poser, au plus, de jetons ?
b) Si, en plus des contraintes précédentes, chacune des deux grandes diagonales peut contenir au plus 4 jetons, combien Martin peut-il poser, au plus, de jetons ?

Les grandes diagonales d'un échiquier sont les deux diagonales allant d'un coin de l'échiquier au coin opposé.

Solution de l'exercice 12 Tout d'abord, chaque colonne contient au plus 4 jetons. Puisqu'il y a 8 colonnes, Martin ne peut donc pas poser plus de $4 \times 8 = 32$ jetons. Rétrospectivement, Martin peut bien poser 32 jetons en respectant toutes les contraintes de l'énoncé, aussi bien dans le cas a) que dans le cas b). Il lui suffit, par exemple, de procéder comme dans la grille ci-dessous, ce qui permet même à Martin de s'arranger pour qu'aucune des grandes diagonales ne contienne de jeton.



Commentaire des correcteurs Exercice bien compris. Chacune des questions contient deux parties : montrer qu'il y a au plus 32 jetons et ensuite donner une configuration dans laquelle on peut effectivement mettre 32 jetons en respectant les conditions. Plusieurs élèves se sont contentés de ne faire que l'une de ces deux étapes. Pour la configuration, un dessin d'échiquier clair valait mieux qu'une longue description sous la forme de paragraphes.

Exercice 13. Existe-t-il un entier dont l'écriture décimale contienne exactement 300 chiffres « 1 », aucun autre chiffre différent de « 0 », et qui soit un carré parfait ?
On dit qu'un entier n est un carré parfait s'il existe un entier k tel que $n = k^2$. Par exemple, $9 = 3 \times 3$ est un carré parfait tandis que 2 ne l'est pas.

Solution de l'exercice 13 La réponse est **négative**. En effet, soit n un tel entier, et supposons qu'il s'agisse d'un carré parfait. On peut donc l'écrire sous la forme $n = k^2$, où k est un entier. La somme des chiffres de n est égale à 300. Les critères de divisibilité par 3 et par 9 indiquent alors que n est divisible par 3, mais pas par 9.
Puisque $n = k^2$ n'est pas divisible par $9 = 3^2$, c'est donc que k n'est pas divisible par 3. Mais, puisque 3 est un nombre premier, cela veut dire que 3 ne divise pas $k^2 = n$, ce qui constitue une contradiction. Notre supposition était donc incorrecte, d'où la réponse annoncée.

Commentaire des correcteurs Plusieurs élèves étaient convaincus que la réponse était négative, mais très peu ont réussi à en fournir une preuve. Attention à justifier chacune de ses affirmations : c'est une bonne façon de vérifier qu'elles sont vraies !

Exercice 14. Paul joue à un jeu avec N billes et un sac, les billes formant un tas. Au premier tour, Paul retire une bille du tas pour la mettre dans son sac et sépare le tas restant en deux tas non vides. Plus généralement, à chaque tour, Paul choisit un tas d'au moins 4 billes, en prend une qu'il met dans son sac, et sépare le tas restant en deux tas non vides, le jeu s'arrêtant quand plus aucun tour n'est possible. Paul gagne s'il arrive à une situation où tous les tas sont constitués de 3 billes, et perd sinon.

a) Montrer que si $N = 2019$, Paul peut gagner.
b) Montrer que si $N = 2020$, Paul ne peut pas gagner.

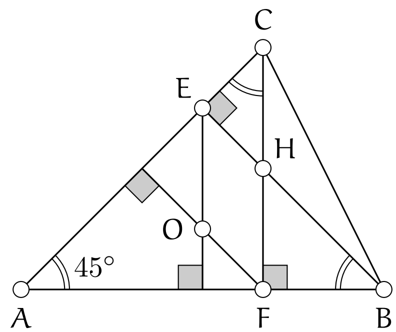
Solution de l'exercice 14

a) Si $N = 2019$, Paul peut gagner en procédant comme suit. Il se débrouille pour avoir, à la fin du $k^{\text{ème}}$ tour, un tas de $N-4k$ billes et k tas de 3 billes (on considère que le début de la partie coïncide avec la fin du $0^{\text{ème}}$ tour). En effet, pour ce faire, il lui suffit, lors de la $(k+1)^{\text{ème}}$ étape, de choisir le tas de $N-4k$ billes et de le séparer en un tas de 3 billes et un tas de $N-4(k+1)$ billes. Ainsi, à la fin du $504^{\text{ème}}$ tour, il disposera d'un tas de $N - 4 \times 504 = 3$ billes et de 504 tas de 3 billes également, et il aura donc gagné.
b) Si $N = 2020$, à la fin du $k^{\text{ème}}$ tour, Paul aura retiré k billes, et il en restera $N-k$, réparties en $k+1$ tas. S'il arrive, à la fin du $\ell^{\text{ème}}$ tour, à n'avoir devant lui que des tas de 3 billes, il a donc devant lui $N - \ell = 3(\ell+1)$ billes. Mais alors $\ell = (N-3)/4$, ce qui n'est pas possible puisque $N-3$ n'est pas divisible par 4.

Commentaire des correcteurs Pour résoudre la question b), plusieurs élèves ont pensé qu'il suffisait de montrer que la stratégie appliquée en question a) ne fonctionnait pas. D'autres ont pensé à un argument de divisibilité par 3 pour la question a) alors que cela n'intervenait pas. Attention à la bonne lecture de l'énoncé.

Exercice 15. Soit ABC un triangle. Soit E le pied de la hauteur de ABC issue de B, et F le pied de la hauteur de ABC issue de C. On note également H le point d'intersection des droites (BE) et (FC), et O le centre du cercle circonscrit à ABC. Démontrer que, si $AF = FC$, alors le quadrilatère $EHFO$ est un parallélogramme.

Solution de l'exercice 15 Il s'agit de démontrer que (EH) est parallèle à (FO) et que (EO) est parallèle à (FH).
En premier lieu, puisque O et F sont équidistants de A et C, c'est que (FO) est la médiatrice de $[AC]$. Par conséquent, (FO) est perpendiculaire à (AC). Or, la droite (EH) est confondue avec la droite (EB) : en tant que hauteur de ABC, elle est aussi perpendiculaire à (AC), et elle est donc parallèle à (FO).
D'autre part, puisque ACF est isocèle rectangle en F, on a $\widehat{BAE} = 45°$. Comme $\widehat{AEB} = 90°$, le triangle AEB est donc isocèle rectangle en E. Ainsi, O et E sont équidistants de A et B, et (EO) est la médiatrice de $[AB]$. De même que précédemment, les droites (EO) et (FH) sont donc parallèles à (AB), et elles sont donc parallèles, ce qui conclut.



Commentaire des correcteurs L'exercice est bien réussi. Plusieurs approches étaient possibles. Lorsqu'une approche analytique était tentée, il fallait faire attention aux erreurs de calcul. Plusieurs élèves ont utilisé l'égalité $EA = EB$ sans la démontrer. Attention aussi à bien connaître les critères pour affirmer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

Exercice 16. On place 2020 points sur un cercle, numérotés au hasard de 1 à 2020 ; tous les numéros sont différents. Pour une corde reliant un sommet de numéro a à un sommet de numéro b, on associe à la corde la valeur $|b - a|$. Montrer qu'il est possible de relier les sommets par 1010 cordes telles que

- ▷ les cordes ne se coupent pas,
- ▷ de chaque sommet part exactement une corde,
- ▷ la somme des valeurs des cordes est égale à 1010^2.

Solution de l'exercice 16 On va faire en sorte que chaque corde relie deux sommets de numéros a et b tels que $a \leqslant 1010$ et $1011 \leqslant b$. En effet, en procédant ainsi, la somme des valeurs des cordes sera égale à

$$(1011 + 1012 + \ldots + 2020) - (1 + 2 + \ldots + 1010) = (1011 - 1) + (1012 - 2) + \ldots + (2020 - 1010) = 1010^2.$$

Pour ce faire, colorions en blanc les sommets de numéro $a \leqslant 1010$ en noir les sommets de numéro $b \geqslant 1011$. On va répéter 1010 fois le processus suivant : à chaque étape,

- ▷ on choisit deux sommets voisins de couleurs distinctes ; puisque, en faisant le tour du cercle, on est à un moment sur un sommet blanc puis, à un autre moment, sur un sommet noir, on a bien dû rencontrer deux sommets voisins de couleurs distinctes ;
- ▷ on relie nos deux sommets par une corde, puis on efface les deux sommets et la corde qui les relie.

Par construction, la corde que l'on vient d'effacer ne peut couper aucune des cordes que l'on créera ensuite. Nos 1010 cordes ne se coupent donc pas, et chaque corde relie bien un sommet blanc à un sommet noir, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs Exercice plus délicat. L'énoncé était parfois mal compris. Les élèves ont souvent cru qu'ont pouvaient toujours relier le sommet 2020 au sommet 1, le sommet 2019 au sommet 2, et ainsi de suite, alors que ce n'est pas toujours le cas.

Exercice 17. Existe-t-il une suite d'entiers strictement positifs $a_0, a_1, \ldots$ tels que

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_n + a_{n+1}}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$?

<u>*Solution de l'exercice 17*</u> La réponse est **négative**. En effet, supposons que l'on dispose d'une telle suite $a_0, a_1, \ldots$ Pour tout entier $n \geqslant 0$, posons $b_n = \sqrt{a_n + a_{n+1}}$. Alors, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} b_{n+1} + b_n &= (a_{n+3} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+1}) \\ &= a_{n+3} - a_{n+1} \\ &= (a_{n+3} + a_{n+2}) - (a_{n+2} + a_{n+1}) \\ &= b_{n+2}^2 - b_{n+1}^2 \\ &= (b_{n+2} + b_{n+1})(b_{n+2} - b_{n+1}). \end{aligned}$$

Or, tous les entiers a_k sont strictement positifs, donc tous les entiers b_k le sont également. On en déduit que

$$b_{n+2} = b_{n+1} + \frac{b_{n+1} + b_n}{b_{n+2} + b_{n+1}} > b_{n+1},$$

ce qui signifie que la suite $b_1, b_2, \ldots$ est strictement croissante. Mais alors l'égalité ci-dessus indique que

$$b_{n+2} + b_{n+1} = (b_{n+3} + b_{n+2})(b_{n+3} - b_{n+2}) \geqslant b_{n+3} + b_{n+2} > b_{n+2} + b_{n+1},$$

ce qui est absurde. Notre supposition initiale était donc incorrecte, ce qui conclut.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Cet exercice était assez difficile. Il ne fallait pas hésiter à écrire toutes les remarques qui semblaient pertinentes, mêmes celles qui semblaient les plus élémentaires (sur les variations de la suite (a_n), par exemple) étaient valorisées. Attention aux notations : de nombreux élèves ont manifestement confondu a_{n+1} et $a_n + 1$.