Association pour l'animation mathématique

COUPE ANIMATH DE PRINTEMPS

Mercredi 29 Mai 2019

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Les exercices pour le collège sont ceux de 1 à 5, et ceux pour le lycée sont ceux de 4 à 8.
Chaque exercice est noté sur 7 points.

Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques, 11-13 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris.
Contact : contact-pofm@animath.fr

Énoncés des exercices

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Énoncés collège

Exercice 1. Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la *partie entière* de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x. On note $\{x\}$ sa *partie décimale*, c'est-à-dire $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Par exemple, on a $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ et $\{3.1\} = 3.1 - 3 = 0.1$. On a aussi $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ et $\{-2.7\} = -2.7 - (-3) = 0.3$.
Trouver tous les nombres réels x tels que $\lfloor x \rfloor \times \{x\} = 2019 \times x$.

Exercice 2. Combien y a-t-il de nombres à 8 chiffres dont l'écriture décimale est de la forme $ab2019cd$ avec $a > 0$, et qui sont divisibles par 360 ?

Exercice 3. Soit $ABCD$ un rectangle. Soient P un point sur le segment $[AB]$, et Q un point sur le segment $[BC]$. Les segments $[AQ]$ et $[DP]$ s'intersectent en X, les segments $[AQ]$ et $[CP]$ s'intersectent en Y et les segments $[CP]$ et $[DQ]$ s'intersectent en Z. On note respectivement a, b et c les aires du triangle APX, du triangle CQZ et du quadrilatère $BPYQ$.
Montrer que l'aire du quadrilatère $DXYZ$ vaut $a + b + c$.

Énoncés communs

Exercice 4. On considère une grande grille carrée de côté 10, découpée en petits carrés de côté 1. Deux petits carrés sont dits *voisins* si ils ont un côté commun. Sur chacun des petits carrés est inscrit un nombre réel positif. De plus, 5 grenouilles se déplacent sur la grille, et peuvent recouvrir chacune un petit carré. Deux grenouilles ne recouvrent jamais le même carré. Entre deux instants, chaque grenouille saute du carré où elle se trouve vers un carré voisin.
On suppose que la somme des nombres visibles vaut 10 à l'instant 1, puis 10^2 à l'instant 2, puis 10^3 à l'instant 3, et ainsi de suite jusqu'à l'instant k où la somme vaut 10^k. Quelle est la plus grande valeur possible de k ?

Exercice 5. On rappelle (voir Exercice 1) que la partie entière $\lfloor x \rfloor$ d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
Soit x un nombre réel positif. On suppose que $\lfloor x^2 \rfloor$, $\lfloor x^3 \rfloor$ et $\lfloor x^4 \rfloor$ sont des carrés d'entiers.
Montrer qu'alors $\lfloor x \rfloor$ est aussi le carré d'un entier.

Énoncés lycée

Exercice 6. Soit $ABCD$ un parallélogramme, et P un point à l'intérieur de $ABCD$ tel que $CP = CB$. On note M et N les milieux de $[AP]$ et $[CD]$. Montrer que les droites (BP) et (MN) sont perpendiculaires.

Exercice 7. Soit (u_n) une suite d'entiers telle que $u_1 > 0$ et, pour tout $n \geqslant 0$, le nombre u_{n+1} est la somme de u_n et de son plus grand diviseur excepté lui-même. Par exemple, si $u_n = 12$, alors $u_{n+1} = 12+6 = 18$.
Montrer qu'il existe N tel que, pour tout $n > N$, l'entier u_n est divisible par 3^{2019}.

Exercice 8. Soient m et n deux entiers impairs avec $m, n \geqslant 3$. Dans une grille $m \times n$, on colorie chaque petit carré en bleu ou en rouge. On note A le nombre de lignes où les carrés bleus sont majoritaires, et B le nombre de colonnes où les carrés rouges sont majoritaires.
Quelle est la plus grande valeur possible de $A + B$?