PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 20 MARS 2019
DURÉE : 4H

Instructions

- Le groupe Junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après.
  Le groupe Senior est constitué des élèves nés en 2003 ou avant.
- Les exercices 1 à 3 ne concernent que les élèves du groupe Junior.
  L'exercice 4 concerne tous les élèves, quel que soit leur groupe.
  Les exercices 5 et 6 ne concernent que les élèves du groupe Senior.
- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques

Merci de renvoyer par mail les copies scannées à l'adresse suivante :
`copies.ofm@gmail.com`

Exercices du groupe Junior

Exercice 1. Soit $ABCD$ un trapèze tel que (AB) soit parallèle à (CD). Soit P un point de $[AC]$ et Q un point de $[BD]$ tels que $\widehat{APD} = \widehat{BQC}$.

Démontrer que $\widehat{AQD} = \widehat{BPC}$.

Exercice 2. Soit a, b, c des nombres réels positifs ou nuls tels que $a + b + c = 1$.

Démontrer que

$$\frac{5 + 2b + c^2}{1 + a} + \frac{5 + 2c + a^2}{1 + b} + \frac{5 + 2a + b^2}{1 + c} \geqslant 13.$$

Exercice 3. On dit qu'une paire d'entiers (a, b) est *chypriote* si $a > b \geqslant 2$, si a et b sont premiers entre eux, et si $a + b$ divise $a^b + b^a$.

Démontrer qu'il existe une infinité de paires chypriotes distinctes.

Exercice commun aux groupes Junior et Senior

Exercice 4. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1 et soit $\mathbf{T}$ un nombre réel. On dit qu'un ensemble de triangles est $\mathbf{T}$-*méraire* s'il satisfait les trois conditions suivantes :

- les sommets de chaque triangle appartiennent à $\mathcal{C}$;
- les triangles sont d'intérieurs deux à deux disjoints (mais deux triangles peuvent partager un côté ou un sommet) ;
- chaque triangle est de périmètre strictement plus grand que $\mathbf{T}$.

Trouver tous les réels $\mathbf{T}$ tels que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un ensemble $\mathbf{T}$-méraire contenant exactement n triangles.

Exercices du groupe Senior

Exercice 5. Soit u un entier naturel non nul.

Démontrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de triplets d'entiers naturels (a, b, n) tels que $n! = u^a - u^b$.

Note : on rappelle que $0! = 1! = 1$.

Exercice 6. Soit ABC un triangle, soit I le centre du cercle inscrit dans ABC. Soit A', B' et C' trois points respectivement situés sur (AI), (BI) et (CI). On suppose que A', B' et C' sont distincts de A, B, C et I, et qu'ils sont alignés. Enfin, soit P_A le point d'intersection des médiatrices de $[BB']$ et $[CC']$. De même, soit P_B le point d'intersection des médiatrices de $[CC']$ et $[AA']$, et soit P_C le point d'intersection des médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$.

Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles ABC et $P_A P_B P_C$ sont tangents l'un à l'autre.