PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 26 FÉVRIER 2019

à destination des élèves préparant
la JBMO (groupe JUNIOR) et
l'EGMO (filles du groupe SENIOR)

14H-18H (DURÉE : 4H)

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

copies.ofm@gmail.com

Exercice 1. Soit a et b deux réels tels que $a\,b \geqslant a^3 + b^3$.

Démontrer que $a + b \leqslant 1$.

Exercice 2. Un *coloriage* de $\mathbb{Q}$ consiste à colorier tout nombre rationnel soit en rouge, soit en bleu. On dit qu'un coloriage de $\mathbb{Q}$ est *harmonieux* si, pour tous les rationnels x et y d'une même couleur, le rationnel $x + y$ est encore de la même couleur.

Trouver tous les coloriages de $\mathbb{Q}$ qui sont harmonieux.

Exercice 3. Soit ABC un triangle isocèle en A, et soit D un point sur (AC) tel que A soit situé entre C et D, mais ne soit pas le milieu de [CD].

On note d_1 et d_2 les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$, et Δ la médiatrice de [BD]. Enfin, soit E et F les points d'intersection respectifs de Δ avec les droites d_1 et d_2.

Démontrer que les points A, D, E et F sont cocycliques.

Exercice 4. Dans un tournoi auxquels participent n joueurs, numérotés de 1 à n, chaque paire de joueurs se rencontre exactement une fois. Cette rencontre se termine par la victoire d'un des deux joueurs et la défaite de l'autre joueur. On note v_k le nombre de victoires du joueur k au cours du tournoi, et d_k son nombre de défaites.

Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} v_k^2 = \sum_{k=1}^{n} d_k^2$.