PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 26 FÉVRIER 2019
DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

copies.ofm@gmail.com

Exercice 1. Soit a et b deux réels tels que $ab \geqslant a^3 + b^3$.
Démontrer que $a + b \leqslant 1$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Puisque $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab \geqslant 4ab$, on en déduit que

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3(a+b)ab \leqslant (3a+3b+1)ab \leqslant (3a+3b+1)(a+b)^2/4.$$

Si $a + b > 1$, on peut diviser notre inégalité par $(a+b)^2/4$, ce qui signifie que $4(a+b) \leqslant 3a + 3b + 1$, donc que $a + b \leqslant 1$ tout de même.

Exercice 2. Un *coloriage* de $\mathbb{Q}$ consiste à colorier tout nombre rationnel soit en rouge, soit en bleu. On dit qu'un coloriage de $\mathbb{Q}$ est *harmonieux* si, pour tous les rationnels x et y d'une même couleur, le rationnel $x + y$ est encore de la même couleur.

Trouver tous les coloriages de $\mathbb{Q}$ qui sont harmonieux.

Solution de l'exercice 2 On va montrer que les coloriages recherchés sont les suivants :

- on colorie tous les rationnels avec la même couleur ;
- on colorie tous les rationnels positifs ou nuls avec une même couleur, et tous les rationnels strictement négatifs avec l'autre couleur ;
- on colorie tous les rationnels strictement positifs avec une même couleur, et tous les rationnels négatifs ou nuls avec l'autre couleur.

Tout d'abord, il est clair que chacun de ces coloriages est harmonieux. Montrons que ce sont les seuls.

Dans la suite, on supposera que l'on dispose d'un coloriage harmonieux fixé. On note B l'ensemble des rationnels coloriés en bleu et R l'ensemble des rationnels coloriés en rouge.

Avec ces notations, si x est un rationnel quelconque appartenant à un ensemble $E \in \{B, R\}$, on va d'abord montrer que pour tout nombre rationnel p/q strictement positif, px/q appartient aussi à E. En effet, si $x/q \notin E$, alors une récurrence immédiate montre que $x = qx/q \notin E$, ce qui n'est pas possible. On en déduit que $x/q \in E$, puis que $px/q \in E$, toujours par récurrence immédiate.

Ainsi, tous les rationnels strictement positifs sont de la même couleur que 1, et tous les rationnels strictement négatifs sont de la même couleur que -1. Vu notre objectif, il reste à montrer que, si 1 et -1 sont de la même couleur, alors 0 est de cette couleur là également : ceci découle précisément du fait que $0 = 1 + (-1)$ est du caractère harmonieux de notre coloriage.

Exercice 3. Soit ABC un triangle isocèle en A, et soit D un point sur (AC) tel que A soit situé entre C et D, mais ne soit pas le milieu de $[CD]$.

On note d_1 et d_2 les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$, et Δ la médiatrice de $[BD]$. Enfin, soit E et F les points d'intersection respectifs de Δ avec les droites d_1 et d_2.

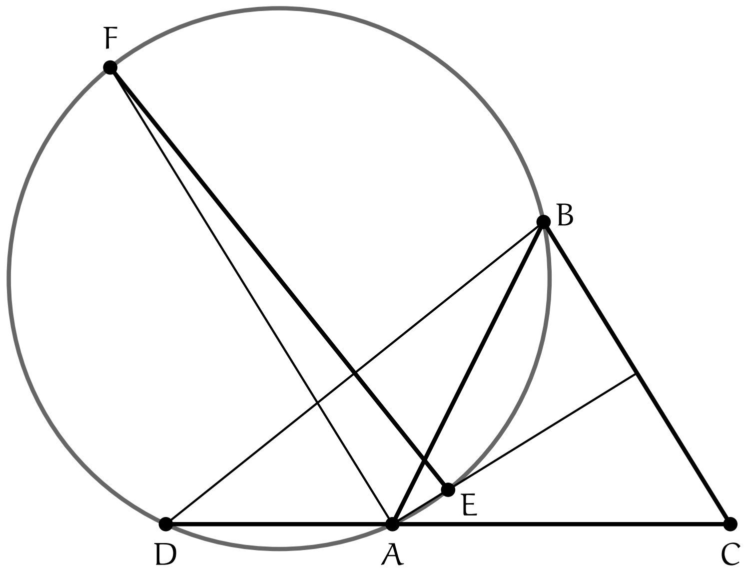
Démontrer que les points A, D, E et F sont cocycliques.

Solution de l'exercice 3 Une jolie figure suggère même que les points A, B, D, E et F sont cocycliques : c'est ce que nous allons montrer.

Soit Γ le cercle circonscrit à ABD, et soit G_1 et G_2 les points d'intersection respectifs des droites d_1 et d_2 avec Γ, et autres que D lui-même. Il nous suffit de montrer que $E = G_1$ et que $F = G_2$.

Puisque d_2 est la bissectrice extérieure de $\widehat{BAC}$, donc la bissectrice intérieure de $\widehat{BAD}$, le théorème du pôle Sud indique que G_2 est équidistant de B et D. De même, d_1 est la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$, donc la bissectrice extérieure de $\widehat{BAD}$, et le théorème du pôle Nord indique que G_1 est équidistant de B et D.

Mais alors (G_1G_2) est bien la médiatrice de $[BD]$, donc $G_1 = E$ et $G_2 = F$, ce qui conclut.



Exercice 4. Dans un tournoi auxquels participent n joueurs, numérotés de 1 à n, chaque paire de joueurs se rencontre exactement une fois. Cette rencontre se termine par la victoire d'un des deux joueurs et la défaite de l'autre joueur. On note v_k le nombre de victoires du joueur k au cours du tournoi, et d_k son nombre de défaites.
Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} v_k^2 = \sum_{k=1}^{n} d_k^2$.

Solution de l'exercice 4 Puisque chaque joueur a disputé $n-1$ parties et que l'ensemble des joueurs a totalisé $n(n-1)/2$ victoires, on sait que

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = n(n-1)/2$$

et que $v_k + d_k = n-1$ pour tout $k \leqslant n$. On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} d_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (n-1-v_k)^2 = n(n-1)^2 - 2(n-1)\sum_{k=1}^{n} v_k + \sum_{k=1}^{n} v_k^2 = \sum_{k=1}^{n} v_k^2.$$