PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 4 : COMBINATOIRE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 14 FÉVRIER 2018

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices du groupe Junior ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices communs aux deux groupes sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices du groupe Senior ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.
copies.ofm@gmail.com

Exercices du groupe Junior

Exercice 1. Dans chaque case d'un échiquier 8×8, on a écrit l'entier 0, 1 ou -1. Est-il possible que toutes les sommes des nombres écrits sur les lignes, les colonnes et sur les deux grandes diagonales de l'échiquier soient différentes ?

Exercice 2. On considère une grille carrée de côté n. Pour quels entiers n est-il possible de paver cette grille avec des dominos 1×2 sans qu'aucune paire de dominos ne forme de carré 2×2 ?

Exercice 3. Lors d'un tournois, 2019 équipes ont joué des matchs. Chaque paire d'équipes se sont affrontées au plus une fois, et pour chaque paire d'équipes qui se sont affrontées, au moins une des équipes a joué au plus 42 matchs. Quel est le nombre maximum de matchs qui ont pu être joués ?

Exercices communs aux deux groupes

Exercice 4. Un certains nombre de participants participent à un stage. On dit que deux participants A, B sont des amis indirects s'il existe un entier $n \geqslant 2$ et des participants $A = C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n = B$ tels que C_i et C_{i+1} soient amis pour $0 \leqslant i < n$, et si A et B sont des participants différents.
Avant le stage, certaines paires de participants sont amis. Après le stage, les anciens amis le restent, et de nouvelles paires d'amis se créent, de sorte que chaque participant ait au moins un ami après le stage. Un participant est dit *spécial* si son nombre d'amis indirects a doublé entre le début et la fin du stage.
Montrer que la proportion de participants spéciaux est d'au plus $\frac{2}{3}$.

Exercice 5. Alice et Bob jouent à un jeu : n pièces ayant chacune une face blanche et une face noire sont disposées en ligne. La première et la dernière pièces sont sur leur face blanche, et les autres sur leur face noire. À chaque tour, la pièce la plus à gauche est déplacée à l'extrémité droite de la ligne de pièces et :

— si elle est sur sa face blanche, alors Alice décide sur quelle face elle la repose ;
— si elle est sur sa face noire, alors Bob décide sur quelle face il la repose.

Alice gagne si, à un instant, toutes les pièces sont sur leur face noire. En supposant que Bob joue parfaitement, pour quels entiers n dispose-t-elle d'une stratégie gagnante ?

Exercice 6. Lors d'une fête, n personnes posent leur chapeau en cercle. Chaque personne se place devant un chapeau, le met, puis le repose, et chacun se place devant le chapeau situé à droite. On recommence ainsi jusqu'à ce que chacun ait mis tous les chapeaux. Pour quels entiers n existe-t-il un placement initial des personnes tel que, à chaque instant, il y ait au moins une personne ayant son propre chapeau sur le tête ?

Exercices du groupe Senior

Exercice 7. Soit n un entier. On considère une liste de n points du plan, et on s'autorise la transformation suivante : prendre deux points et les remplacer tous les deux par leur milieu. On dit que l'entier n est "grégaire" si, pour toute liste initiale de n points, on peut obtenir en un nombre fini d'étapes une liste de n points identiques. Montrer que n est grégaire si et seulement si n est un puissance de 2.

Exercice 8. On considère une grille infinie. On appelle la croix d'une case l'ensemble des cases sur sa ligne et sa colonne. Soit k et N deux entiers. N cases de la grille sont initialement coloriées, et on s'autorise à colorier une case si sa croix contient au moins k cases coloriées.
Quel est le plus petit entier N tel qu'il est possible, pour un certain ensemble de N cases coloriées initialement, de colorier chaque case de la grille ?

Exercice 9. Soit n un entier, et T un tableau d'entiers compris entre 0 et $n-1$, à n lignes et n colonnes. On numérote les lignes et les colonnes de T de 0 à $n-1$.
On dit ensuite que T est un tableau *auto-descriptif* si l'entier sur la ligne i et la colonne j correspond au nombre de fois que le nombre i apparaît à la ligne j. Par exemple, le tableau suivant est auto-descriptif.

1	0	3	3	4
1	3	2	1	1
0	1	0	1	0
2	1	0	0	0
1	0	0	0	0

Montrer qu'il n'existe pas de tableaux auto-descriptifs arbitrairement grands.