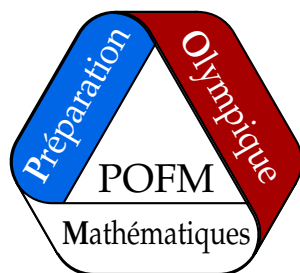


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 9 JANVIER 2019

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ Le groupe Junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après.
Le groupe Senior est constitué des élèves nés en 2003 ou avant.
- ▷ Les exercices 1 à 3 ne concernent que les élèves du groupe Junior.
L'exercice 4 concerne tous les élèves, quel que soit leur groupe.
Les exercices 5 et 6 ne concernent que les élèves du groupe Senior.
- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

copies.ofm@gmail.com

Exercices du groupe Junior

Exercice 1. Soit x et y deux entiers tels que $5x + 6y$ et $6x + 5y$ soient des carrés parfaits. Montrer que x et y sont tous deux divisibles par 11.

Note : on dit qu'un entier n est un carré parfait si c'est le carré d'un entier.

Exercice 2. Soit Γ un cercle de centre O et de rayon r et ℓ une droite qui ne coupe pas Γ . On note E le point d'intersection entre ℓ et la droite perpendiculaire à ℓ passant par O .

Soit M un point de ℓ différent de E . Les tangentes au cercle Γ et passant par M touchent Γ en A et B . Enfin, soit H le point d'intersection des droites (AB) et (OE) .

Montrer que $OH = r^2/OE$.

Exercice 3. Soit n un entier naturel. Un escalier de taille n est constitué de petits carrés 1×1 , avec 1 carré pour la première marche, 2 carrés pour la deuxième marche, et ainsi de suite, jusqu'à n carrés pour la $n^{\text{ème}}$ marche.

On dispose de pierres carrées (de côté entier) de toutes les tailles pour construire cet escalier et on note $f(n)$ le nombre minimum de pierres que l'on doit utiliser pour un escalier de taille n . Par exemple, $f(2) = 3$ et $f(4) = 7$, comme illustré ci-dessous.



1. Trouver tous les entiers $n \geq 0$ tels que $f(n) = n$.
2. Trouver tous les entiers $n \geq 0$ tels que $f(n) = n + 1$

Exercice commun aux groupes Junior et Senior

Exercice 4. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x^2 + y^2)$$

pour tous les entiers naturels x et y .

Note : on rappelle que \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Exercices du groupe Senior

Exercice 5. Soit n un entier impair, et soit S un ensemble de n points du plan à coordonnées entières. On considère une permutation $f : S \rightarrow S$ qui satisfait la propriété suivante :

Pour toute paire de points A et B appartenant à S , la distance entre $f(A)$ et $f(B)$ est supérieure ou égale à la distance entre A et B .

Montrer qu'il existe un point X , appartenant à S , tel que $f(X) = X$.

Exercice 6. Soit ABC un triangle, et soit E et F deux points appartenant respectivement aux droites (AB) et (AC) , distincts de A , B et C . Soit également Ω le cercle circonscrit à ABC , soit O le centre de Ω , et soit Γ le cercle circonscrit à AEF . Enfin, soit P le point d'intersection de Γ et Ω autre que A , et soit Q le symétrique de P par rapport à la droite (EF) .

Montrer que Q appartient à la droite (BC) si et seulement si O appartient au cercle Γ .