PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 28 NOVEMBRE 2018
DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

copies.ofm@gmail.com

Exercice 1. Un pays comprend $2018n+1$ villes, où n est un entier naturel non nul. Certaines paires de villes sont reliées par des lignes directes de chemin de fer, de sorte qu'il y ait au plus une ligne entre deux villes ; chaque ligne va dans les deux sens. La distance entre deux villes A et B est alors le nombre minimal de lignes à prendre pour aller de A à B.

Trouver l'ensemble des entiers n pour lesquels il possible de construire un réseau ferré respectant le critère suivant :

Pour toute ville C et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, 2018\}$, il y a exactement n villes à distance i de C.

Exercice 2. On dispose, dans le plan, 16 points deux à deux distincts, que l'on note $A_{i,j}$ pour $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ces points vérifient les relations d'alignement et de cocyclicité suivantes :

- ▷ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, les points $A_{i,1}$, $A_{i,2}$, $A_{i,3}$ et $A_{i,4}$ sont alignés ;
- ▷ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, les points $A_{1,j}$, $A_{2,j}$, $A_{3,j}$ et $A_{4,j}$ sont alignés ;
- ▷ les quadrilatères $A_{1,1}A_{1,2}A_{2,2}A_{2,1}$, $A_{2,1}A_{2,2}A_{3,2}A_{3,1}$, $A_{3,1}A_{3,2}A_{4,2}A_{4,1}$, $A_{1,2}A_{1,3}A_{2,3}A_{2,2}$, $A_{1,3}A_{1,4}A_{2,4}A_{2,3}$, $A_{1,1}A_{2,2}A_{2,3}A_{1,4}$ et $A_{1,1}A_{2,2}A_{3,2}A_{4,1}$ sont cycliques.

Montrer que le quadrilatère $A_{4,1}A_{3,2}A_{3,3}A_{4,4}$ est lui aussi cyclique.

Note : on dit qu'un quadrilatère est cyclique si ses quatre sommets sont sur un même cercle.

Exercice 3. On dit qu'un entier k est *olympique* s'il existe quatre entiers a, b, c et d, tous premiers avec k, tels que k divise $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$. Soit n un entier quelconque.

Montrer que $n^2 - 2$ est olympique.