PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 5 : POT-POURRI

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 15 MARS 2018

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2003 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés “Groupe B” ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés “Communs” sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés “Groupe A” ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques, 11-13 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris.
olymp@animath.fr

Exercices du groupe B

Exercice 1. Trouver tous les entiers $x, y \geqslant 1$ tels que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2017}.$$

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> L'équation équivaut à $2017(x + y) = xy$, donc $2017|xy$. Comme 2017 est premier, $2017|x$ ou $2017|y$. Sans perte de généralité, x et y jouant le même rôle, on peut supposer que $2017|x$. Soit $x' \geqslant 1$ tel que $x = 2017x'$. On a donc $2017x' + y = x'y$, soit

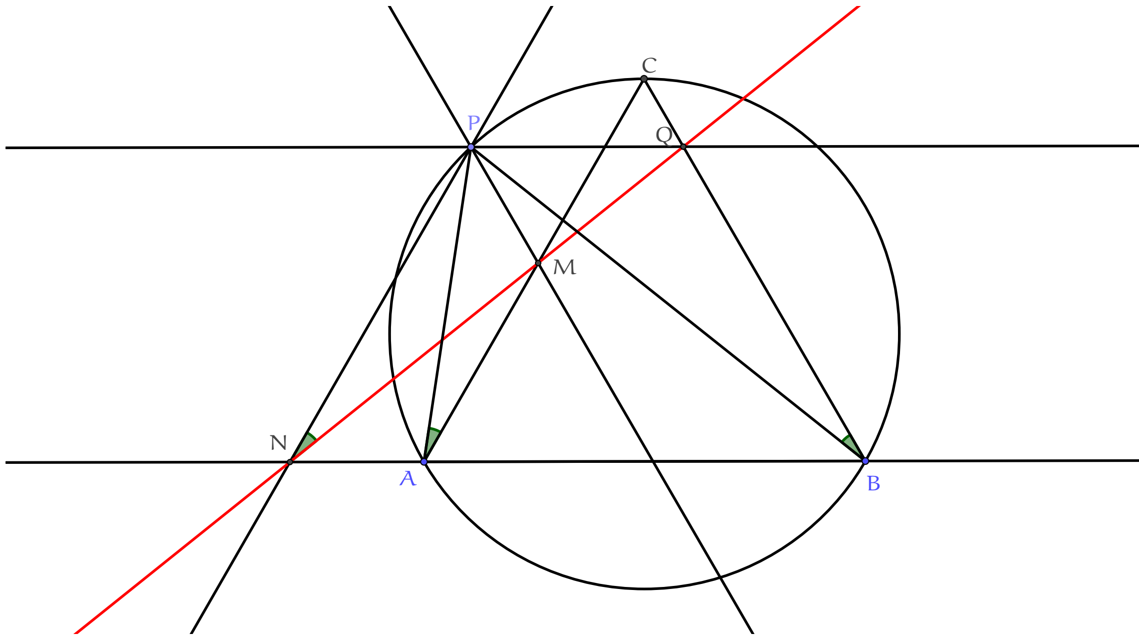
$$2017x' = y(x' - 1).$$

Donc $2017|y$ ou $2017|x' - 1$, comme précédemment.
Si $2017|y$, on écrit $y = 2017y'$, et donc $x' = y'(x' - 1)$, soit $x' + y' = x'y'$. On voit qu'il n'y a pas de solution si $x' = 1$ ou $y' = 1$. Si $x' = 2$, on trouve $y' = 2$ et réciproquement. Si $x', y' \geqslant 3$, $x'y' \geqslant max(3x', 3y') > x' + y'$ donc il n'y a pas de solution. On trouve ainsi une unique solution : $x' = y' = 2$, soit $x = y = 4034$. On vérifie que cela satisfait bien l'équation de départ.
Si '$2017|x'-1$, on écrit $x' = 2017k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. On obtient alors $2017k+1 = yk$, soit $(y-2017)k = 1$. Ceci implique que $k = 1$ et donc que $y - 2017 = 1$. Ainsi, $y = 2018$ et $x = 2017 \times 2018$. On vérifie que cela satisfait l'équation initiale.
Conclusion : il y a trois solutions, à savoir les couples d'entiers $(4034, 4034)$, $(2017 \times 2018, 2018)$ et $(2018, 2017 \times 2018)$. En effet, x et y jouant le même rôle, le deuxième cas que nous avons traité donne deux solutions.

Exercice 2. Adalbert et Babette jouent aux dominos sur une grille rectangulaire de 2 cases de hauteur et 2018 cases de largeur. Adalbert commence en posant un domino de taille 1×2 en position horizontale, de façon à ce qu'il recouvre exactement deux cases de la grille. Puis Babette joue de même un domino 1×2 en position verticale, et ainsi de suite. Le premier qui ne peut plus jouer sans chevaucher un domino déjà posé a perdu. Montrer qu'Adalbert a une stratégie gagnante.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Divisons la grille en 1009 blocs consécutifs de taille 2×2. Adalbert commence par poser un domino dans un de ces blocs. Il est alors assurer de pouvoir le compléter plus tard par un autre domino. Babette doit alors jouer dans un autre bloc (et elle ne peut pas jouer à cheval entre deux blocs, car ses dominos sont verticaux). Adalbert joue dans un troisième bloc, etc. Lorsqu'il joue pour la 505-ème fois, il entame un 505-ème bloc, ce qui lui garantit la possibilité de jouer encore 505 fois. Il pourra donc poser 1010 dominos au total. Comme on peut poser au plus 2018 dominos au total, Babette pourra en poser au plus 1008, elle sera donc bloquée avant Adalbert, qui l'emporte.

Exercice 3. Soit ABC un triangle équilatéral et P un point de son cercle circonscrit, distinct de A, B et C. Les droites passant par P et parallèles à (BC), (CA) et (AB) intersectent respectivement (AC) en M, (AB) en N et (BC) en Q. Prouver que M, N et Q sont alignés.



Solution de l'exercice 3

Sans perte de généralité, on peut supposer que P est sur l'arc (AC), comme sur la figure. Il y a de nombreuses droites parallèles, donc égalités d'angles, donc sans doute des points cocycliques donnant encore plus d'égalité d'angles... En effet, $(NP)//(AC)$ et $(PM)//(CB)$ donc $\widehat{NPM} = \widehat{ACB} = 60^o$. Et $\widehat{NAM} = 180^o - \widehat{CAB} = 120^o$. Donc $\widehat{NPM} + \widehat{NAM} = 180^o$, donc P, M, A, N sont cocycliques. Ainsi,

$$\widehat{PNM} = \widehat{PAM} = \widehat{PAC}.$$

Notons que $\widehat{PNM}$ a un certain intérêt pour nous : si on prouve que $\widehat{PNM} = \widehat{PNQ}$, alors on aura montré que M, N et Q sont alignés.

Cherchons désormais à travailler sur $\widehat{PNQ}$: on constate comme précédemment que P, Q, B, N sont cocycliques, donc

$$\widehat{PNQ} = \widehat{PBQ} = \widehat{PBC}.$$

Or $\widehat{PBC} = \widehat{PAC}$ car P, B, A, C sont cocycliques. Donc $\widehat{PNQ} = \widehat{PNM}$ et M, N, Q sont alignés.

Exercices Communs

Exercice 4. Est-il possible de ranger 601 disques de rayon 1 dans une boîte rectangulaire de taille 4×600 sans que deux disques ne se chevauchent (ils peuvent toutefois se toucher) ?

Solution de l'exercice 4

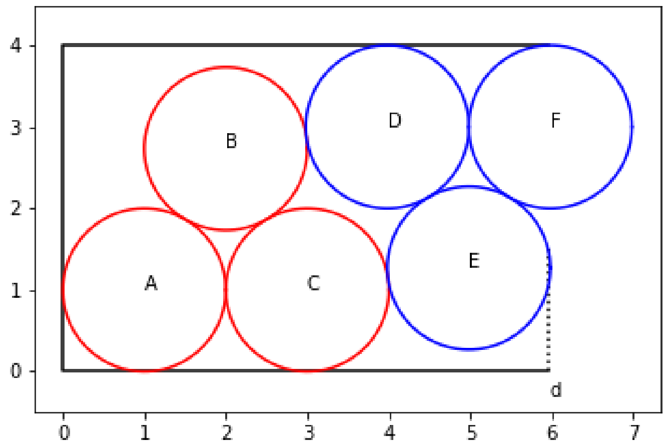
La réponse est oui ! Pour le montrer, on considère la disposition *en triangle* sur la figure ci-dessous.

Calculons d. On note (x_A, y_A) les coordonnées du centre du disque A, et ainsi de suite. On a donc directement

$$x_A = 1, \quad x_B = 2, \quad x_C = 3, \quad \text{et} \quad y_A = 1, \quad y_B = ?, \quad y_C = 1.$$

Pour déterminer y_B, on écrit que $(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = 4$, d'où $y_B = 1 + \sqrt{3}$. On détermine ensuite la position du centre du disque D. On sait que $y_D = 3$, puis on doit avoir $(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 = 4$, d'où $x_D = 2 + \sqrt{4\sqrt{3} - 3}$. On obtient que les coordonnées du centre de E sont

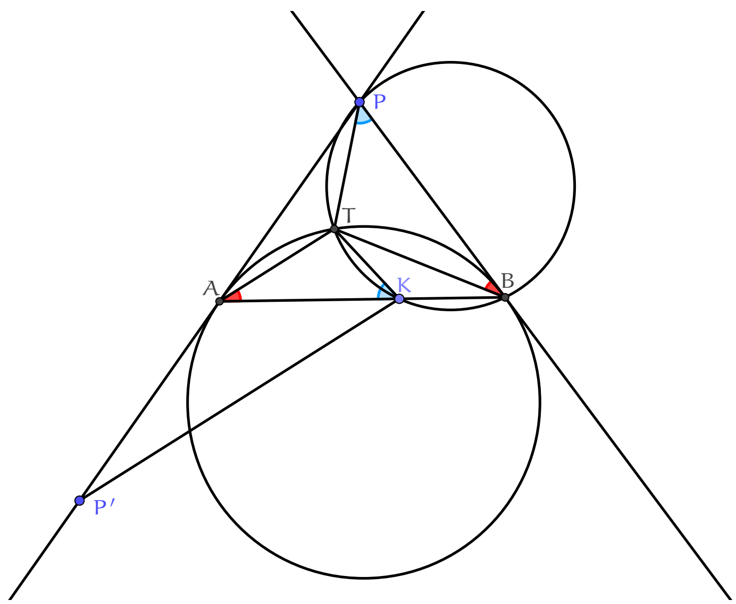
$$x_E = x_D + 1 = 3 + \sqrt{4\sqrt{3} - 3} \quad \text{et} \quad y_E = 4 - y_B = 3 - \sqrt{3}.$$



On vérifie que les disques E et C sont tangents, car $(x_E - x_C)^2 + (y_E - y_C)^2 = 4$. Donc notre figure est valide (pas de recouvrements). Au final, on trouve $d = x_E + 1 = 4 + \sqrt{4\sqrt{3} - 3}$.

On peut alors recommencer notre disposition à partir de l'abscisse d. Autrement dit, on peut mettre 6 disques dans un intervalle d, et donc $6k$ disques dans un intervalle dk. En prenant $k = 100$, on trouve qu'on peut mettre 600 disques dans un intervalle de taille $100d \approx 596.4$. Il reste donc plein de place pour mettre le dernier disque dans le coin en bas à droite.

Exercice 5. Soit $\mathcal{C}$ un cercle, P un point extérieur à celui-ci, A et B les points de contact des deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par P. Soit K un point quelconque sur (AB), distinct de A et de B. On appelle T la seconde intersection de $\mathcal{C}$ et du cercle circonscrit au triangle PBK. En outre, on appelle P' le symétrique de P par rapport à A.
Montrer que $\widehat{PBT} = \widehat{P'KA}$.



Solution de l'exercice 5
Prouvons que les triangles PBT et KAT sont semblables (dans cet ordre des sommets) : d'après le théorème de l'angle inscrit à la tangente, $\widehat{PBT} = \widehat{TAB} = \widehat{TAK}$. Comme P, T, B, K sont cocycliques,

$\widehat{TPB} = 180^o - \widehat{TKB} = \widehat{TKA}$. On en déduit que PBT et KAT sont semblables, et que

$$\frac{PT}{KT} = \frac{PB}{KA}.$$

Or $PB = PA = P'A$. Donc

$$\frac{PT}{KT} = \frac{P'A}{KA},$$

et $P'AK$ et PTK sont semblables. Donc $\widehat{P'KA} = \widehat{PKT}$. Or $\widehat{PKT} = \widehat{PBT}$ par théorème de l'angle inscrit, ce qui conclut.

Exercice 6. Trouver tous les entiers strictement positifs p, q tels que

$$p2^q = q2^p.$$

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Premier cas : si $p = q$, alors l'égalité est vraie.
Second cas : si $p \neq q$, on peut supposer sans perte de généralité que $p > q$, le cas $q > p$ se traitant de même. On remarque que tout diviseur impair de p est un diviseur impair de q, et réciproquement. Ainsi, si on écrit $p = a2^b$ et $q = c2^d$ avec a, c impairs et $b, d \in \mathbb{N}$ (et il est toujours possible de faire ainsi d'après le théorème fondamental de l'arithmétique), alors $a = c$. Le rapport p/q est donc une puissance de 2 (différente de 1 car $p \neq q$). Soit $e \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = 2^e q$. On a alors

$$2^{e+q} = 2^{2^e q},$$

donc $e + q = 2^e q$ en identifiant les exposants, soit $e = q(2^e - 1)$. Or, une récurrence rapide montre que $2^n - 1 > n$ pour tout $n \geqslant 2$: c'est en effet vrai pour $n = 2$, et si $2^n > 1 + n$ pour un certain entier n, alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2(1+n) > 2n + 2 \geqslant (n+1) + 1$. Donc si $e > 2$, $q(2^e - 1) > qe \geqslant e$, contradiction. Donc $e = 1$, donc $1 = q(2^1 - 1)$, soit $q = 1$. On en déduit que la seule solution est $p = 2$ et $q = 1$.
Conclusion : les solutions du problème sont les couples (p, p) pour $p \in \mathbb{N}^*$ ainsi que les couples $(2, 1)$ et $(1, 2)$.

Exercices du groupe A

Exercice 7. On définit une suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ ainsi : on choisit $a_0, a_1 \in \mathbb{N}^*$, et pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$a_{n+2} = \left\lfloor \frac{2a_n}{a_{n+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a_{n+1}}{a_n} \right\rfloor,$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier qui ne dépasse pas x. Prouver qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a_m = 4$ et $a_{m+1} \in \{3, 4\}$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$, on note $g(a, b) := \left\lfloor \frac{2a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2b}{a} \right\rfloor$. Il est bien connu que $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2$, or un carré est toujours positif, donc $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$, avec égalité si et seulement si $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, soit $a = b$. Et pour tout réel x, on a $\lfloor x \rfloor > x - 1$. Donc $g(a, b) > 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 \geqslant 2$. Or $g(a, b)$ est entier, donc $g(a, b) \geqslant 3$. Ainsi, $a_n \geqslant 3$ pour tout $n \geqslant 2$ (ce qui permet au passage de justifier la bonne définition de la suite (a_n) : elle ne s'annule jamais, donc les termes au dénominateur

dans l'énoncé ne posent pas de problème).
Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \max(a_n, a_{n+1})$. On remarque que pour $a \geqslant b \geqslant 3$, $g(a,b) \leqslant \frac{2\max(a,b)}{3} + 2$, donc si $\max(a,b) > 6$, on a $g(a,b) < a$. Donc, si $u_n > 6$, $a_{n+2} < u_n$. Si de plus $a_{n+1} < u_n$, alors $u_{n+1} < u_n$. Sinon, $u_{n+1} = u_n$, et $a_{n+3} < u_{n+1}$ comme précédemment, donc $u_{n+2} < u_{n+1}$. Ainsi, si $u_n > 6$, $u_{n+1} < u_n$ ou $u_{n+2} < u_n$. Or (u_n) est une suite à valeurs entières, donc $\min(u_{n+1}, u_{n+2}) \leqslant u_n - 1$. En continuant de cette façon, on arrive nécessairement après un nombre fini d'étapes sur un entier l tel que $u_l \leqslant 6$. On a donc $a_l, a_{l+1} \in \{3,4,5,6\}$. On prouve aisément par récurrence sur $n \geqslant l$ que $3 \leqslant a_n \leqslant 6$, en utilisant le fait que $g(a,b) \leqslant \frac{2\max(a,b)}{3} + 2$. Ainsi, la suite (a_n) prendra toujours ses valeurs dans $\{3,4,5,6\}$. Et, on constate facilement que si $a \in \{3,4,5,6\}$, $g(a,4) = g(4,a) \in \{3,4\}$. Il suffit ainsi de montrer que $a_m = 4$, pour un certain $m \geqslant l$. Il reste donc à étudier le cas où $a_l, a_{l+1} \in \{3,5,6\}$. On vérifie par une petite étude de cas que $g(a,b) \leqslant 5$ pour tout $a, b \in \{3,4,5,6\}$, donc $a_{l+2}, a_{l+3} \in \{3,4,5\}$. Si $a_{l+2} = 4$ ou $a_{l+3} = 4$, c'est gagné. Sinon, on vérifie que pour $a, b \in \{3,5\}$, $g(a,b) = 4$, ce qui nous permet de conclure.

Exercice 8. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe un réel A vérifiant $A > f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et telles que pour tous réels x, y, on ait :

$$f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy).$$

Solution de l'exercice 8 La fonction nulle est clairement solution. Supposons désormais que f n'est pas nulle sur tout $\mathbb{R}$.
En posant $x = 0$, on a $yf(0) = f(0)$ pour tout réel y donc $f(0) = 0$. En posant $y = 1$, on a $f(xf(1)) = xf(1)$ pour tout réel x, donc si $f(1) \neq 0$, on contredit l'énoncé en choisissant $x = \frac{A}{f(1)}$. Donc $f(1) = 0$.
En posant $x = 1$, on a $f(f(y)) = 2f(y)$. Supposons qu'il existe z tel que $f(z) > 0$. En composant z n fois par f, pour $n \geqslant 0$, on trouve $f(\ldots f(z)\ldots) = 2^n f(z)$. Pour n assez grand, $2^n f(z) > A$, contradiction. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 0$.
Si $f(y) = 0$ pour un certain $y \neq 0$, alors $yf(x) = f(xy)$ pour tout réel x. Si x est tel que $f(x) \neq 0$, $f(xy) \neq 0$. Donc $f(x)$ et $f(xy)$ sont du même signe d'après le paragraphe précédent, donc $y > 0$. Il en résulte que f est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$.
Prenons $x \neq 0$ et $y = \frac{1}{x}$ dans l'équation initiale. On obtient

$$f\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \frac{f(x)}{x} = xf\left(\frac{1}{x}\right).$$

En échangeant x et $\frac{1}{x}$, on obtient

$$f\left(\frac{f(x)}{x}\right) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x}.$$

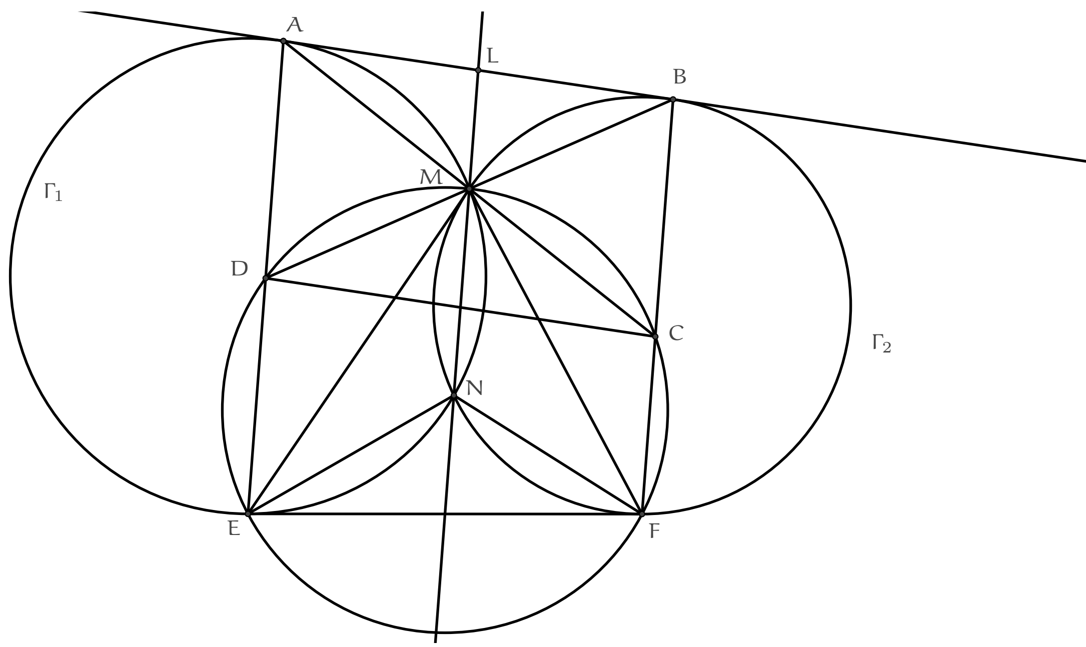
En additionnant ces deux égalités, on aboutit à

$$f\left(\frac{f(x)}{x}\right) + f\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0,$$

or f est à valeurs négatives, donc $f\left(\frac{f(x)}{x}\right) = f\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$ pour tout $x \neq 0$.
Si $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} \neq 0$, donc $\frac{f(x)}{x} = 0$, soit $f(x) = 0$ (on rappelle que f est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$). En prenant $y > 0$ dans l'équation initiale, on a $yf(x) = f(xy)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, pour $x = -1$, on obtient $f(-y) = yf(-1)$ et f est linéaire sur $\mathbb{R}_-$. Donc pour $y < 0$, comme $f(y) < 0$,

on a $f(f(y)) = -f(-1)f(y)$. Avec $x = 1$ dans l'équation initiale, on obtient $f(f(y)) = 2f(y)$, donc $f(-1) = 2$.
Ainsi, $f(x) = 2x$ si $x < 0$ et 0 sinon. On vérifie rapidement qu'elle satisfait bien l'équation de départ. On a ainsi deux fonctions solution du problème, avec la fonction nulle.

Exercice 9. Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en M et N. Soit A et B les points de contact de ces deux cercles avec leur tangente extérieure commune la plus proche de M. Soient C et D les symétriques respectifs de A et B par rapport à M, et E et F les points d'intersection (autres que M) du cercle circonscrit à MCD avec Γ_1 et Γ_2 respectivement. Montrer que les cercles circonscrits à MEF et NEF ont le même rayon.



Solution de l'exercice 9

L'énoncé ainsi formulé peut sembler curieux, mais on remarque qu'il suffit de prouver que $\widehat{EMF} + \widehat{ENF} = 180^o$ pour obtenir le résultat voulu.
Soit L l'intersection de (MN) et (AB). L est sur l'axe radical de Γ_1 et Γ_2, donc sa puissance par rapport à ces deux cercles est la même, soit $LA^2 = LB^2$, donc L est le milieu de $[AB]$.
Par construction de C et D, $ABCD$ est un parallèlogramme de centre M, donc $(AD)//(BC)//(MN)$.
Prouvons que B, C, F sont alignés : par théorème de l'angle inscrit, $\widehat{CFM} = \widehat{CDM}$. Or $\widehat{CDM} = \widehat{DBA} = \widehat{MBA}$ et $\widehat{MBA} = \widehat{BFM}$ par théorème de l'angle inscrit à la tangente. Donc B, C, F sont alignés, et il en va de même pour A, D, E par symétrie.
Ainsi, $AMNF$ et $BMNE$ sont des trapèzes dont les quatre sommets sont cocycliques, le théorme de l'angle inscrit montre qu'ils sont isocèles. Donc $\widehat{MNE} = \widehat{AMN}$ et $\widehat{MNP} = \widehat{NMB}$, ce qui implique que $\widehat{ENF} = \widehat{AMB} = 180^o - \widehat{BMC}$. Il reste donc à établir que $\widehat{BMC} = \widehat{EMF}$.
On prouve même que CMB et EMF sont semblables (ce qui permet de conclure) : comme C, D, E, F, M sont cocycliques, $\widehat{MCB} = 180^o - \widehat{MCF} = \widehat{MEF}$ et $\widehat{MBC} = \widehat{MDA} = 180^o - \widehat{MDE} = \widehat{MFE}$, donc CMB et EMF sont bien semblables.